



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**CARRERA DE INGENIERIA CIVIL**

Proyecto de Investigación previo a la obtención del título de Ingeniero Civil

**TRABAJO DE TITULACIÓN**

Título del proyecto:

**INTERPRETACIÓN DE LA RIGIDEZ LATERAL EN ESCALERAS PARA  
EL BALANCE TORSIONAL APROXIMADO EN CONFIGURACIONES  
ESTRUCTURALES DE EDIFICACIONES DE CONCRETO REFORZADO**

Autor:

Andrés Fabián Salazar Moreano

Tutor:

M.Sc. Ing. Diego J. Barahona R.

**Riobamba – Ecuador**

**Año 2020**

## PÁGINA DE REVISIÓN DEL TRIBUNAL

Los miembros del Tribunal de Graduación del proyecto de investigación de título: **“INTERPRETACIÓN DE LA RIGIDEZ LATERAL EN ESCALERAS PARA EL BALANCE TORSIONAL APROXIMADO EN CONFIGURACIONES ESTRUCTURALES DE EDIFICACIONES DE CONCRETO REFORZADO”** presentado por Andrés Fabián Salazar Moreano y dirigida por el Ing. Diego Barahona. Una vez escuchada la defensa oral y revisado el informe final del proyecto de investigación con fines de graduación escrito en el cual se ha constatado el cumplimiento de las observaciones realizadas, remite la presente para uso y custodia en la biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Chimborazo.

Para constancia de lo expuesto firman:



---

Ing. Diego Barahona

### Tutor del proyecto

DIEGO  
HERNAN  
HIDALGO  
ROBALINO

Firmado digitalmente  
por DIEGO HERNAN  
HIDALGO ROBALINO  
Fecha: 2020.09.28  
15:01:38 -05'00'

---

Ing. Diego Hidalgo

### Miembro del tribunal



Firmado electrónicamente por:  
**ANDREA NATALI  
ZARATE  
VILLACRES**

---

Ing. Andrea Zárate

### Miembro del tribunal

## **CERTIFICACIÓN DEL TUTOR**

Yo, Ing. Diego Barahona, en calidad de Tutor de Tesis, cuyo tema es: **“INTERPRETACIÓN DE LA RIGIDEZ LATERAL EN ESCALERAS PARA EL BALANCE TORSIONAL APROXIMADO EN CONFIGURACIONES ESTRUCTURALES DE EDIFICACIONES DE CONCRETO REFORZADO.”**, CERTIFICO; que el informe final del trabajo investigativo, ha sido revisado y corregido, razón por la cual autorizo al estudiante Andrés Fabián Salazar Moreano, para que se presente ante el tribunal de defensa respectivo para que se lleve a cabo la sustentación de su Tesis.

Atentamente,

A handwritten signature in purple ink, appearing to read "Diego Barahona", enclosed within a hand-drawn oval shape.

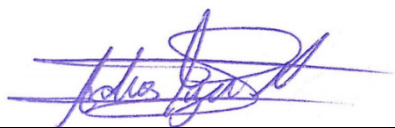
---

Ing. Diego Barahona

**Tutor de tesis**

## AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La responsabilidad del contenido de este Proyecto de Graduación corresponde exclusivamente a: Andrés Fabián Salazar Moreano, e Ing. Diego Barahona; y el patrimonio intelectual de la misma a la Universidad Nacional de Chimborazo.



---

Andrés Fabián Salazar Moreano

C.I. 060465859-1

## **AGRADECIMIENTO**

*Quiero expresar mi gratitud a Dios, quien con su bendición llena siempre mi vida y a toda mi familia para que estén siempre presentes. De igual manera mis agradecimientos a la Universidad Nacional de Chimborazo, a toda la Facultad de Ingeniería, a mis profesores en especial a los Ingenieros, Diego Hidalgo, Tito Castillo, Marcel Paredes, Alexis Martínez, Alfonso Arellano, Nelson Núñez, Oswaldo Ortiz, Édison Chávez, Nelson Patiño, Andrea Zárate y Edison Bonifaz, quienes con la enseñanza de sus valiosos conocimientos hicieron que pueda crecer día a día como profesional, gracias a cada una de ustedes por su paciencia, dedicación, apoyo incondicional y su gran y valiosa amistad; finalmente quiero expresar mi más grande y sincero agradecimiento a mis compañeros y amigos, a mi pareja Daniela y a mis padres principalmente, que me han apoyado durante este proceso de investigación y de conocimiento al desarrollar este trabajo*

*Andrés Fabián Salazar Moreano*

## **DEDICATORIA**

*El presente trabajo lo dedico principalmente a Dios, por ser el inspirador y darme fuerza para continuar en este proceso de obtener uno de los anhelos más deseados en mi vida, a mis padres, por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí y convertirme en lo que soy, ya que han sido unos padres ejemplares. A todas las personas que me han apoyado y han hecho que el trabajo se realice con éxito en especial a aquellos que me abrieron las puertas y compartieron sus conocimientos.*

*Andrés Fabián Salazar Moreano*

## INDICE DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPITULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	2
OBJETIVOS.....	4
OBJETIVO GENERAL.....	4
OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	4
CAPITULO II. MARCO TEÓRICO.....	5
2.1. Estructuras de concreto reforzado.....	5
2.2. Rigidez de una estructura.....	6
2.3 Matriz de rigidez (K) de una estructura .....	8
2.3.1 Procedimiento para calcular la matriz de rigidez de la estructura K .....	10
2.4 Matriz de rigidez lateral o condensación de la matriz de rigidez en escaleras	11
2.4.1 Escaleras .....	11
2.4.2 Matriz de rigidez lateral.....	12
2.5 Configuración estructural .....	13
2.6 Balance torsional en edificaciones.....	13
2.6.1 Centro de masas .....	14
2.6.2. Centro de rigidez.....	15
CAPITULO III. METODOLOGIA.....	17
3.1. Hipótesis .....	17
3.2. Identificación de las variables.....	17
3.2.1. Variable independiente .....	17
3.2.2. Variables dependientes .....	17
3.3. Tipo de estudio.....	17
3.4. Población y muestra.....	17
3.4.1. Población .....	17
3.4.2. Muestra .....	17

3.5. Selección del tipo de escalera .....	18
3.6. Dimensionamiento de la escalera .....	19
3.7. Altura equivalente del espesor de la escalera. ....	19
3.8. Modelos matemáticos .....	19
3.9. Cálculo de la matriz de rigidez de los modelos matemáticos .....	21
3.10. Condensación estática de la matriz de rigidez de la estructura.....	21
3.11. Inclusión de la matriz de rigidez lateral de la escalera en el balance torsional de la edificación.....	22
CAPITULO IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	23
4.1 Selección del tipo y dimensionamiento de la escalera.....	23
4.2 Modelos matemáticos y su matriz de rigidez.....	25
4.3 Rigidez lateral de la escalera incluida en el balance torsional de la edificación. ....	29
CONCLUSIONES.....	31
RECOMENDACIONES .....	33
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	34
ANEXOS .....	36



## INDICE DE GRÁFICOS

Figura 2.1. Componentes De Desplazamiento De Los Extremos De Un Elemento.....	7
Figura 2.2. Componentes De Fuerzas De Los Extremos De Un Elemento .....	8
Figura 2.3. Relación Entre Vectores De Cargas Generalizadas Y Desplazamientos Generalizados .....	9
Figura 2.4. Modelos Matemáticos .....	12
Figura 2.5. Torsión De La Edificación .....	14
Figura 3.1. Escalera Autoportante.....	18
Figura 3.2. Modelo Matemático Empotrado-Apoyado.....	20
Figura 3.3. Modelo Matemático Apoyado-Apoyado.....	20
Figura 4.1. Huella Y Contrahuella .....	24
Figura 4.2. Sistema Empotrado-Apoyado.....	25
Figura 4.3. Sistema Apoyado-Apoyado.....	26
Figura A.1. Dimensiones De La Estructura De La Escalera.....	36
Figura A.2. Intersección De Rectas Para Huella Y Contrahuella .....	38
Figura A.3. Dimensiones De Los Peldaños .....	42
Figura A.4. División De Figuras Geométricas.....	44
Figura A.5. Esquema De Dimensiones Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado, Ensamblaje Directo.....	49
Figura A.6. Sistema $P - p$ Modelo Matemático Empotrado-Apoyado, Ensamblaje Directo	49
Figura A.7. Sistema $Q - p$ Modelo Matemático Empotrado-Apoyado, Ensamblaje Directo	50
Figura A.8. Esquema De Dimensiones Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A .....	55
Figura A.9. Sistema $P - p$ Modelo Matemático Empotrado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A .....	56

Figura A.10.	Sistema $Q - q$ Modelo Matemático Empotrado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	56
Figura A.11.	Deformada Elemental $q_1$ , Modelo Matemático Empotrado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	57
Figura A.12.	Deformada Elemental $q_2$ , Modelo Matemático Empotrado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	58
Figura A.13.	Deformada Elemental $q_3$ , Modelo Matemático Empotrado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	60
Figura A.14.	Deformada Elemental $q_4$ , Modelo Matemático Empotrado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	61
Figura A.15.	Esquema De Dimensiones Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Ensamblaje Directo	67
Figura A.16.	Sistema $P - p$ Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Ensamblaje Directo	68
Figura A.17.	Sistema $Q - p$ Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Ensamblajedirecto	68
Figura A.18.	Esquema De Dimensiones Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	74
Figura A.19.	Sistema $P - p$ Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	75
Figura A.20.	Sistema $Q - q$ Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad	75
Figura A.21.	Deformada Elemental $q_1$ , Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	76
Figura A.22.	Deformada Elemental $q_2$ , Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	77
Figura A.23.	Deformada Elemental $q_3$ , Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	79
Figura A.24.	Deformada Elemental $q_4$ , Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A	80

Figura A.25. Deformada Elemental $q_5$ , Modelo Matemático Apoyado-Apoyado, Matriz De Compatibilidad A .....	82
Figura A.26. Esquema De Dimensiones Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado	87
Figura A.27. Esquema De Dimensiones Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado	90
Figura A.28. Esquema De Dimensiones Y Cargas Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado .....	94
Figura A.29. Acciones De Empotramiento Del Elemento Inclinado, Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado .....	95
Figura A.30. Descomposición De La Carga En Coordenadas Locales Del Elemento Inclinado Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado .....	96
Figura A.31. Distribución De Cargas En Coordenadas Locales Del Elemento Inclinado Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado .....	98
Figura A.32. Equilibrio De Nudos En Coordenadas Locales Del Elemento Inclinado Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado .....	98
Figura A.33. Acciones De Empotramiento Del Elemento Horizontal, Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado .....	100
Figura A.34. Equilibrio De Nudos En Coordenadas Locales Del Elemento Inclinado Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado .....	100
Figura A.35. Coordenadas De Desplazamiento Del Modelo Matemático Empotrado-Apoyado	103
Figura A.36. Desplazamientos De Las Coordenadas 1, 2 Y 3 .....	103
Figura A.37. Desplazamiento De La Coordenada 4.....	103
Figura A.38. Esquema De Dimensiones Y Cargas Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado	104
Figura A.39. Acciones De Empotramiento Del Elemento Inclinado, Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado .....	105
Figura A.40. Descomposición De La Carga En Coordenadas Locales Del Elemento Inclinado Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado .....	106

Figura A.41. Distribución De Cargas En Coordenadas Locales Del Elemento Inclinado Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado .....	108
Figura A.42. Equilibrio De Nudos En Coordenadas Locales Del Elemento Inclinado Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado .....	108
Figura A.43. Acciones De Empotramiento Del Elemento Horizontal, Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado .....	110
Figura A.44. Equilibrio De Nudos En Coordenadas Locales Del Elemento Inclinado Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado .....	110
Figura A.45. Coordenadas De Desplazamiento Del Modelo Matemático Apoyado-Apoyado	113
Figura A.46. Desplazamientos De Las Coordenadas 1, 2 Y 3 .....	113
Figura A.47. Desplazamiento De La Coordenada 4.....	114
Figura A.48. Desplazamiento De La Coordenada 5.....	114
Figura A.49. Esquema De Una Planta Para El Analisis Del Balance Torsional De La Edificación	115
Figura A.50. Planta Con Dimensiones Totales .....	116
Figura A.51. Dimensiones Del Hueco De La Escalera.....	117
Figura A.52. Cálculo De <b><i>XCR</i></b> Y <b><i>YCR</i></b> .....	119
Figura A.53. Ubicación Del Centro De Masas Y Centro De Rigidez.....	120
Figura A.54. Rigideces " <b><i>t</i></b> " En El Sentido Y, Incluyendo La Rigidez De La Escalera	123
Figura A.55. Rigideces " <b><i>t</i></b> " En El Sentido X.....	123
Figura A.56. Modelación Presentada En Elevación.....	125
Figura A.57. Modelación Presentada En Planta.....	126
Figura A.58. Diafragma De La Planta De La Edificación .....	127
Figura A.59. Tabla De Centro De Masas Y Rigidez.....	128

## RESUMEN

La presente investigación presenta la interpretación de la rigidez lateral en escaleras para el balance torsional aproximado en configuraciones estructurales de edificaciones de concreto reforzado con el objeto de determinar la rigidez lateral en escaleras para incluirlas en el análisis del balance torsional. Determinando el tipo de escalera más común utilizado en edificaciones de la ciudad de Riobamba, para después aplicar el dimensionamiento de la escalera y para proceder al cálculo de la rigidez lateral de la misma por medio de procesos de cálculo por ensamblaje directo y por medio de la matriz de compatibilidad A. Se continúa con la condensación estática de la matriz de rigidez para dos modelos matemáticos que se presentan, siendo el primero un sistema empotrado-apoyado y el segundo un sistema apoyado-apoyado, dando a conocer una ecuación con la cual calcular directamente la rigidez lateral de la escalera e incluyendo la misma en el análisis del balance torsional de una planta propuesta de una edificación, por medio del centro de masas y de rigidez, llegando a la conclusión de que es posible incluir la rigidez lateral de la escalera en el cálculo del centro de rigidez de la edificación, dentro del dimensionamiento de la configuración estructural de una edificación.

**Palabras clave:** Matriz de Rigidez, Rigidez lateral, Escaleras, Balance Torsional, Ensamblaje Directo.

## ABSTRACT

This research interprets lateral stiffness in stairs for approximate torsional balance on structural configurations for reinforcing concrete buildings, and determining the lateral stiffness in stairs to be included in the torsional balance analysis. Determining the most common type of staircase used in buildings in the city of Riobamba, to later apply the dimensioning of the staircase and to proceed to the calculation of the lateral stiffness of the same one by means of calculation processes, direct assembly, and means of the compatibility matrix A. We continue with the static condensation of the stiffness matrix for two mathematical models that are presented. The first one is an embedded-supported system and the second one is a supported-supported system. They give an equation to directly calculate the lateral stiffness of the staircase which includes the analysis of the torsional balance of a proposed building, by means of the center of masses and rigidity. For reaching the conclusion, it is possible to include the lateral rigidity of the staircase in the calculation of the center of rigidity of the building, within the dimensioning of the structural configuration of a building.

**Keywords:** Stiffness Matrix, Lateral Stiffness, Stairs, Torsional Balance, Direct Assembly.

**Reviewed and corrected by:** Lic: Armijos Jacqueline, MsC.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Jacqueline', with a large, stylized flourish above it and a wavy line extending downwards from the end of the signature.

## INTRODUCCIÓN

Es importante comprender que los aspectos relacionados al tema de escaleras sin lugar a duda presenta una copiosa información; en razón de que se consideran diferentes aspectos como las dimensiones, la ubicación y el tipo de escalera para un determinado proyecto en relación a otro, sin embargo, si se desea propender hacia un diseño novedoso se deberá tomar consideraciones especiales como la rigidez lateral de la escalera y el análisis del balance torsional de la edificación en base a sus excentricidades, esto para edificios de varias plantas, de tal manera que se ofrezca una guía técnica para la modelación y diseño de escaleras incluyendo todas las condicionantes de diseño, arquitectónico, estructural y sísmico. Es importante mencionar que la rigidez lateral de una estructura es el resultado de la condensación estática de la matriz de rigidez de la estructura obtenida por medio de dos procedimientos de cálculo como son por ensamblaje directo y por medio de la matriz de compatibilidad **A**, realizado para dos modelos matemáticos propuestos en la presente investigación.

La particularidad principal de esta investigación, es el considerar la influencia de la escalera para el balance torsional de la edificación, mencionando que una escalera es un elemento no estructural utilizado en las edificaciones, para salvar las alturas comprendidas entre una planta y la siguiente.

Para analizar esta problemática es necesario mencionar sus causas, una de ellas es el tomar en consideración que en el Ecuador se han realizado investigaciones acerca de diseños sísmicos y diseños de estructuras con cada uno de sus elementos estructurales, sin embargo, se debería obtener la rigidez lateral de las escaleras aproximadamente de una manera sencilla para incorporarla a los procesos de dimensionamiento de la estructura, de acuerdo al tipo de escalera que considerada en esta investigación, para realizar el cálculo estructural de la edificación.

La finalidad u objetivos del trabajo de investigación fue el analizar una ecuación, mediante la cual se calcule la rigidez lateral de la escalera, para poder incorporarla al balance torsional de la edificación.

## CAPITULO I.

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el análisis y diseño de estructuras y edificaciones, es muy recurrente no incluir en la planificación el cálculo del análisis de las escaleras, por el motivo de que las mismas no son consideradas un elemento estructural al menos que sean integrados en el análisis estructural de la edificación, como elementos estructurales(Xoquic, 2016); por lo que su omisión genera efectos en la rigidez que brinda a la edificación.

Se puede indicar que al incluir la escalera en el análisis y diseño estructural de una edificación se están tomando en cuenta la rigidez que aporta la escalera en la edificación y por lo tanto la influencia que tiene este cambio de rigidez en el balance torsional de la misma, puesto que al generar una excentricidad con respecto al centro de masas surgen efectos de torsión, lo cual al ser muy grande este valor, podría causar un colapso de la estructura ante una actividad sísmica.

A partir del análisis del sistema de escalera auto portante, obteniendo su matriz de rigidez y consecuentemente la matriz de rigidez lateral de la misma, se podrá añadir esta al cálculo del centro de rigidez de la edificación, tanto por el método de la rigidez lateral ***KL*** como por el método de las rigideces "***t***", lo cual ayudará a contribuir en análisis y diseños, dentro de planificaciones de diferentes edificaciones de concreto reforzado.

Esta investigación pretende resolver el problema que refiere la exclusión del sistema de escaleras en las edificaciones, presentando así una forma de aplicar la rigidez lateral de la escalera en el balance torsional de la edificación, considerándolas así parte del diseño estructural.

Hasta la presente fecha no se han presentado antecedentes que permitan tener una ecuación de cálculo de la matriz de rigidez lateral de la escalera e incluirla al balance torsional de la edificación, puesto como un antecedente se tiene la realización de una investigación en Guatemala realizada por (Xoquic, 2016), acerca de la influencia de sistemas de escaleras en el centro de rigidez de las edificaciones, pero no se indica una ecuación con la cual calcular la matriz de rigidez de la escalera para determinar su inclusión en la edificación.



Este trabajo de investigación es pertinente, ya que en la actualidad la demanda de construcción y diseño de edificaciones va aumentando considerablemente y fundamentando que la presencia del elevador o ascensor ha enviado a las escaleras a ser consideradas en segundo plano, se debe corregir ese error, ya que las escaleras forman un elemento muy importante dentro de las edificaciones ya que sirven de apoyo contingente a los mismos elevadores en casos de eventos sísmicos para cumplir procesos de evacuación de los ocupantes de la edificación, a su vez es factible y pertinente también ya que hubo el acceso a toda la información necesaria y acceso a las edificaciones de la ciudad de Riobamba y también el asesoramiento por parte del tutor de este trabajo investigativo.

Los beneficiarios directos de esta investigación serán los estudiantes de la carrera de ingeniería civil, los docentes de la misma, los analistas y diseñadores estructurales; mientras que los beneficiarios indirectos de esta investigación serán las empresas constructoras y personas que requieren o planifican construir una edificación, ya que se considerará la escalera desde el dimensionamiento inicial de la configuración estructural y así tener un diseño estructural mejor y se puede impartir estos procedimientos de cálculo a todos los beneficiarios anteriormente mencionados.

Por esta razón, en este proyecto de investigación para solventar este problema se planteará una ecuación con la cual se calcule la matriz de rigidez lateral de un modelo de escalera auto portante que se compone de dos tramos en diferente sentido para subir y bajar de la edificación, siendo este modelo de escalera el más utilizado dentro de las edificaciones consideradas para esta investigación de la ciudad de Riobamba, para así incluir esta rigidez en el análisis del balance torsional.

## **OBJETIVOS**

### **OBJETIVO GENERAL**

Determinar la rigidez lateral en escaleras para incluirlas en el análisis del balance torsional de configuraciones estructurales de edificaciones de concreto reforzado.

### **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Determinar el tipo más común de escalera utilizada en las edificaciones más relevantes de tres pisos o de mayor altura de la ciudad de Riobamba

Establecer dos modelos matemáticos mediante los cuales se pueda analizar la estructura de la escalera.

Determinar una expresión, mediante la cual sea factible calcular la rigidez lateral de la escalera de una edificación de concreto reforzado mediante la aplicación de cualquiera de los dos modelos matemáticos presentados.

Plantear un modelo de planta arquitectónica de una edificación en donde se incluya la rigidez lateral de la escalera para analizar el balance torsional de la edificación, realizando cálculos de forma manual, los cuales posteriormente serán comparados con resultados provenientes del software ETABS.

## **CAPITULO II.**

### **MARCO TEÓRICO**

#### **2.1. Estructuras de concreto reforzado**

Frecuentemente el concreto reforzado se lo ha utilizado durante muchos años para la construcción de diferentes edificaciones de uso funcional, cotidiano y según los requerimientos de diseñadores y constructores. (Abdallha, 2017)

El concreto es un material semejante a la piedra que se obtiene mediante una mezcla cuidadosamente proporcionada de cemento, agua, arena y grava u otro agregado; después esta mezcla se endurece en formaletas con la forma y dimensiones deseadas. El cuerpo del material consiste en agregado fino y grueso, mientras que el cemento y el agua interactúan químicamente para unir las partículas de agregado y conformar una masa sólida, teniendo en cuenta que es necesario agregar agua además de aquella que se requiere para la reacción química, con el fin de darle a la mezcla la trabajabilidad adecuada que permita llenar las formaletas, antes de que inicie el endurecimiento. Se pueden obtener concretos en un amplio rango de propiedades ajustando apropiadamente las proporciones de los materiales constitutivos. Un rango más amplio de propiedades puede obtenerse mediante la utilización de cementos especiales, agregados especiales, aditivos y mediante métodos especiales de curado. Estas propiedades dependen en gran medida de las proporciones de la mezcla, del cuidado con el cual se mezclan los diferentes materiales constitutivos y de las condiciones de humedad y temperatura bajo las cuales se mantenga la mezcla desde el momento en que se coloca en la formaleta hasta que se encuentra totalmente endurecida, debemos enfocarnos en que su resistencia a la compresión, similar a la de las piedras naturales es alta, lo que lo hace apropiado para elementos sometidos principalmente a compresión tales como columnas o arcos, sin embargo, asimismo, de nuevo como en las piedras naturales, el concreto es un material relativamente frágil, con una baja resistencia a la tensión comparada con la resistencia a la compresión; esto impide su utilización en elementos estructurales sometidos a tensión, ya sea en toda su sección como es en el caso de elementos de amarre o sobre parte de sus secciones transversales como en vigas u otros elementos sometidos a flexión. Para contrarrestar esta limitación, en la segunda mitad del siglo XIX se consideró factible utilizar acero para reforzar el concreto debido a su alta resistencia a la tensión, principalmente en aquellos sitios donde la baja resistencia a la tensión del concreto

limitaría la capacidad portante del elemento. El refuerzo, conformado de acero con deformaciones superficiales apropiadas para proporcionar adherencia, se coloca en las formaletas antes de vaciar el concreto; una vez que las barras estén completamente rodeadas por la masa de concreto endurecido, comienzan a formar parte integral del elemento siendo la combinación resultante de los dos materiales, conocida como concreto reforzado, combinando muchas de las ventajas de cada uno como son el costo relativamente bajo, la buena resistencia al clima y al fuego, la buena resistencia a la compresión y la excelente capacidad de moldeo del concreto con la alta resistencia a la tensión y la aún mayor ductilidad y tenacidad del acero. Es precisamente esta combinación la que permite el casi ilimitado rango de usos y posibilidades del concreto reforzado en la construcción de edificios, puentes, presas, tanques, depósitos y muchas otras estructuras.(Nilson, 1999)

Las características básicas de una estructura deben ser la resistencia, la rigidez, la economía, la estética y debe ser sustentable. La resistencia se dice que es adecuada cuando la fuerza resistente es mayor que las fuerzas internas,  $FR \geq FU$ . La rigidez se dice que es adecuada cuando los desplazamientos son menores a la tolerancia,  $\Delta_{max} \leq \Delta_{tol}$ . Las estructuras tienen que ser económicas, no baratas. Se debe proporcionar el refuerzo mínimo sin comprometer la seguridad o rigidez de la estructura. La estética es un aspecto importante debido a que las comunidades se identifican a través de la infraestructura que poseen. Finalmente, el aspecto de sustentabilidad deberá ser considerado en todo el proceso de diseño, construcción, operación y conservación de las estructuras. (Orta, 2019). Por tanto, La estructura de un edificio es un conjunto de elementos que tienen la responsabilidad de mantener su forma bajo la actuación de cargas, fuerzas y factores del medio ambiente, deben cumplir requerimientos básicos como son la estabilidad y el equilibrio. La Estabilidad se refiere en este caso al movimiento de los edificios, siendo que se evitaría ciertos colapsos generados a causa de cargas emitidas por factores externos como son, viento, sismo, lluvia, entre otros. El equilibrio, por consiguiente, debe dar la seguridad de que, si actuaran estas cargas ya mencionadas la edificación presente una inmovilidad, pero que a su vez no se trastorne la forma del edificio.

## **2.2. Rigidez de una estructura**

La rigidez es la propiedad que tiene cada uno de los elementos estructurales para oponerse a las deformaciones, es decir, es la capacidad de soportar cargas sin deformarse

o desplazarse excesivamente; la rigidez de las estructuras está en función del módulo de elasticidad del material del elemento, el momento de inercia y la longitud del elemento.

$$K = \frac{12 * E * I}{L^3} \quad \text{Ec. 2.1}$$

Hernández (2005) expresa que, la rigidez de un elemento estructural se entiende comúnmente como la magnitud de la fuerza requerida para producir un desplazamiento unitario. Para ser más específicos, la palabra desplazamiento en el concepto anterior deberá especificarse en detalle mencionando su carácter, es decir, lineal o angular y su localización; como cada elemento tiene dos extremos, la palabra desplazamiento se interpreta como desplazamiento generalizado en los extremos de un elemento. En el sistema coordenado tridimensional el vector que representa el desplazamiento en un punto tiene seis componentes, tres lineales y tres angulares como se indica en la figura 2.1.

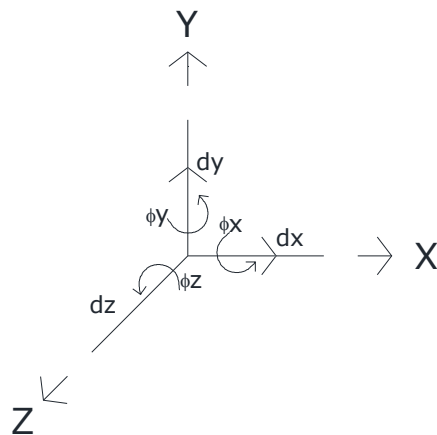


FIGURA 2.1. COMPONENTES DE DESPLAZAMIENTO DE LOS EXTREMOS DE UN ELEMENTO

Elaborado por: Andrés Salazar  
Fuente: Adaptado de (Hernández, 2005)

Al igual que el desplazamiento la fuerza debe entenderse como una fuerza generalizada que en el sistema coordenado tiene seis componentes como se indica en la figura 2.2.

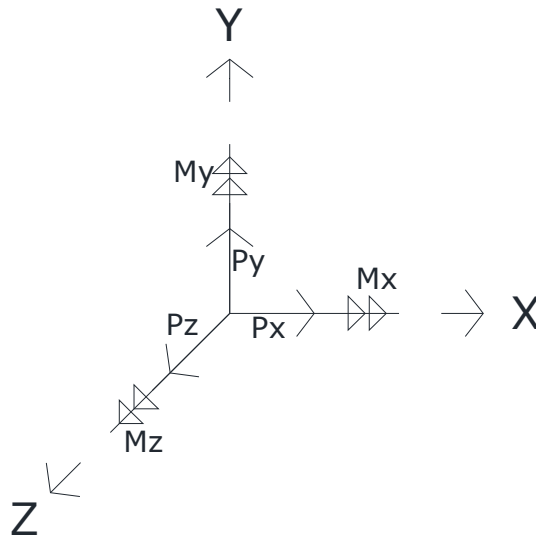


FIGURA 2.2. COMPONENTES DE FUERZAS DE LOS EXTREMOS DE UN ELEMENTO

Elaborado por: Andrés Salazar  
Fuente: Adaptado de (Hernández, 2005)

Representando en forma matricial al desplazamiento y la fuerza, generalizados obtenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}$$

Así la Rigidez será la fuerza generalizada que produce un desplazamiento unitario; de acuerdo a la fuerza generalizada se tienen tantos tipos de rigideces como elementos mecánicos, es decir, rigidez axial, al corte, a la flexión y a la torsión.(Hernández, 2005)

### 2.3 Matriz de rigidez (K) de una estructura

La matriz de rigidez **K**, es una propiedad del sistema estructural, el cual no cambia en función del estado de cargas o de condiciones de contorno al que se someta la estructura; solo se verá afectada si se introduce algún elemento adicional. Cada columna de la matriz de rigidez representa las acciones necesarias para conseguir un desplazamiento unitario en el grado de libertad definido por el índice de la columna a la vez que se quedan fijados a cero el resto de los grados de libertad. Cada fila de la matriz de rigidez es un conjunto

de multiplicadores que operados sobre el vector desplazamiento completo proporcionan el valor de la fuerza correspondiente al grado de libertad definido por el índice de la fila. (Blanco et al., 2012)

Aguiar (2004), expresa que dado un pórtico cualquiera en el cual se define un sistema de coordenadas  $\mathbf{Q} - \mathbf{q}$ , se establece una relación entre el vector de cargas generalizadas  $\mathbf{Q}$  y el vector de desplazamientos generalizados  $\mathbf{q}$ , como se muestra en la siguiente figura.

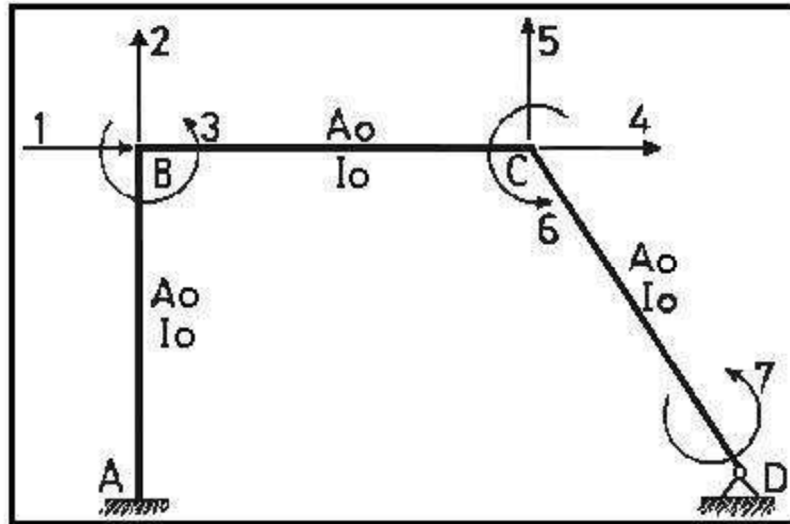


FIGURA 2.3. RELACIÓN ENTRE VECTORES DE CARGAS GENERALIZADAS Y DESPLAZAMIENTOS GENERALIZADOS

Elaborado por: Andrés Salazar  
Fuente: Adaptado de (Aguiar, 2004)

La relación entre  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{q}$ , se consigue por medio de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  con la siguiente expresión:

**Ecuación 2.1.**  $\mathbf{Q} = \mathbf{K} * \mathbf{q}$

Con esta expresión se interpreta que la matriz de rigidez es de orden  $(n \times n)$ , en donde  $n$  es el número de grados de libertad de la estructura. Siendo así, si  $\mathbf{Q}$  es un vector de  $n$  filas y  $\mathbf{q}$  es otro vector de  $n$  elementos, entonces la expresión presentada anteriormente se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_i \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & K_{i2} & \dots & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_i \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Donde un término cualquiera  $Q_i$  es igual a:

**Ecuación 2.2.**  $Q_i = K_{i1} * q_1 + K_{i2} * q_2 + \dots + K_{in} * q_n$

Al examinar esta expresión se observa que  $K_{i1}$ , tomando como ejemplo, es el valor de la carga  $Q_i$ , correspondiente al estado de desplazamiento  $q_1 = 1$  y  $q_i = 0$  siendo  $i \neq 1$ ; es decir,  $K_{i1}$  es el valor de  $Q_i$  en la deformada elemental  $q_1$ . Por lo que en general se tendrá que un elemento cualquiera  $K_{ij}$ , es el valor de la carga generalizada  $Q_i$ , correspondiente a la deformada elemental  $q_j$ .

La matriz de rigidez de una estructura estable, se la caracteriza principalmente por que el valor del determinante es diferente de cero y es positivo, en consecuencia, la matriz de rigidez es regular, los términos de la diagonal de la matriz de rigidez son todos positivos, la matriz generada es cuadrada y la matriz de rigidez es simétrica con respecto a la diagonal.

### 2.3.1 Procedimiento para calcular la matriz de rigidez de la estructura **K**

Existen varios procedimientos de cálculo para la matriz de rigidez de una estructura, sin embargo, el procedimiento más sencillo de realizar es por ensamblaje directo, proceso el cual se utiliza en este trabajo de investigación.

#### 2.3.1.1. Cálculo de la matriz de rigidez por ensamblaje directo

El ensamblaje directo es un procedimiento que se realiza para obtener la matriz de rigidez **K** de la estructura, el cual se obtiene de la ensambladura directa de las matrices de rigidez en coordenadas globales de cada uno de los elementos de la estructura, por



medio de la definición de vectores de colocación **VC**, los cuales están conformados por los grados de libertad de los nudos inicial y final de un elemento. (Aguiar, 2004)

Para facilitar el cálculo se coloca el **VC** encima y a la derecha de la matriz de rigidez del elemento; cuando uno de los componentes de **VC** es cero se tacha la fila o columna a la cual está asociada esa coordenada y cuando es diferente de cero se realiza el ensamblaje (Vilemag, 2016).

Para realizar el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura por ensamblaje directo, se considera la siguiente matriz con la cual se calculará la matriz de rigidez de cada elemento para el ensamblaje como se mencionó anteriormente.

$$k = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & t & b & 0 & -t & b \\ 0 & b & k & 0 & -b & a \\ -r & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -t & -b & 0 & t & -b \\ 0 & b & a & 0 & -b & k \end{bmatrix}$$

Donde:

$$t = \frac{12EI}{L^3} \quad b = \frac{6EI}{L^2} \quad k = \frac{4EI}{L} \quad a = \frac{2EI}{L} \quad r = \frac{EA}{L}$$

## 2.4 Matriz de rigidez lateral o condensación de la matriz de rigidez en escaleras

### 2.4.1 Escaleras

Las escaleras son un conjunto de dos o más escalones que facilitan el traslado de un nivel a otro, considerando sus elementos físicos integrantes como son; sus peldaños los cuales son conformados por huella, contrahuella y ancho de circulación; los pasamanos y los descansos.

Para el dimensionamiento de todo tipo de escalera, se debe tomar en cuenta las referencias normativas, definiciones y requisitos como huella, contrahuella, ancho de circulación, pasamanos y descansos; que se presentan en la norma (NTE INEN 2249, 2016)

## 2.4.2 Matriz de rigidez lateral

Se define matriz de rigidez lateral  $K_L$ , a la matriz de rigidez asociada a las coordenadas laterales de piso. Cuando en el análisis sísmico de pórticos planos se considera un solo grado de libertad por piso, a este modelo se denomina piso rígido y sirve únicamente para el análisis ante la componente horizontal de movimiento del suelo. (Aguiar, 2012)

Una vez tomado en consideración los conceptos estipulados en el apartado visto anteriormente en el cual describe las consideraciones que se debe tomar al momento de dimensionar una escalera, se procede a tener la estructura a calcular como modelos matemáticos, lo cual se aprecia en la figura 2.4 y así obtenida la matriz de rigidez de la estructura, proceder a la condensación estática de la matriz de rigidez de la estructura y obtener la matriz de rigidez lateral.

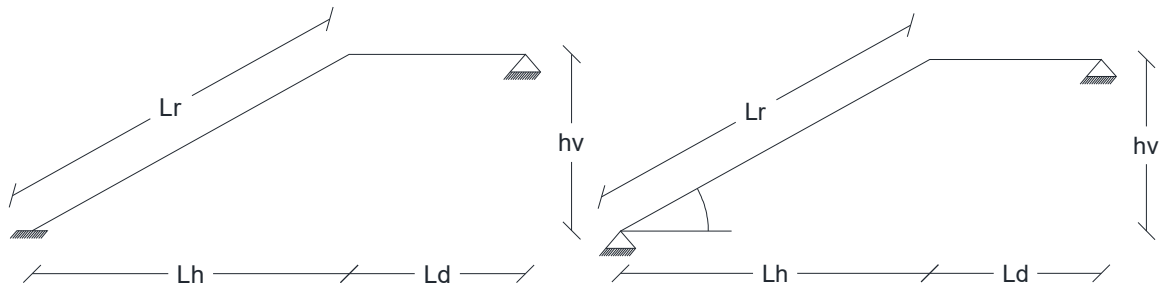


FIGURA 2.4. MODELOS MATEMÁTICOS

Elaborado por: Andrés Salazar

El procedimiento que se denomina condensación de la matriz de rigidez transforma la matriz del pórtico en una matriz más pequeña la que toma por nombre matriz de rigidez lateral, la cual posee el número de términos en filas y columnas según las coordenadas de piso que tenga el pórtico de la estructura, como por ejemplo si la estructura tiene 3 pisos la matriz de rigidez lateral es del orden de 3 x 3, si posee solo 1 piso la matriz sería de 1 x 1. (Monge, 2014)

Para hallar la matriz de rigidez lateral se debe aplicar la expresión expuesta a continuación:

$$K_L = K_{AA} - K_{AB} * K_{BB}^{-1} * K_{BA}$$

En donde  $K_L$  es la matriz de rigidez lateral de la estructura y los demás términos  $K_{AA}$ ,  $K_{AB}$ ,  $K_{BB}$ ,  $K_{BA}$ , son términos sub matriciales obtenidos del fraccionamiento de la matriz de rigidez de la estructura calculada, dicho fraccionamiento se lo representaría de la siguiente manera:

$$K = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix}$$

## 2.5 Configuración estructural

Se entiende por configuración estructural al tipo, disposición, fragmentación, resistencia y geometría de la estructura de la edificación, por la relación de estos parámetros se derivan ciertos problemas de respuesta estructural ante sismos. En el planeamiento de una edificación es necesario tomar en cuenta que una de las mayores causas de daños ha sido por el uso de esquemas de configuración arquitectónico-estructural nocivos, entonces se puede decir de manera general que el alejamiento de formas y esquemas estructurales simple es castigado fuertemente por los sismos. (Otavalo, 2017)

## 2.6 Balance torsional en edificaciones

Cuando hablamos de balance torsional o torsión, nos referimos directamente a la diferencia de distancias que hay entre el centro de masas y el centro de gravedad de la edificación, es decir, que esta situación se aplica en casos donde la torsión significativa podría ocurrir debido a mayores excentricidades en el sistema de fuerzas resistentes laterales, por ejemplo, rigidez excéntrica en planta y falta de simetría de la edificación. (Sánchez et al., 2015)

Cuando se presentan desequilibrios estructurales en una edificación, se pueden generar efectos torsionales, siendo la torsión una de las principales causantes de los daños producidos por los sismos en las edificaciones. La torsión consiste en la acción de dar vueltas a un objeto, en este caso un edificio, por sus dos extremos tanto superior como inferior, rotando cada uno de ellos en sentido contrario; al rotar la base de una edificación

debido a los efectos de un sismo, por inercia los pisos superiores seguirán el movimiento de la base, pero mientras éstos intentan alcanzar su posición relativa en la edificación, la base ya se está regresando con el movimiento del suelo, por lo que se generan en el extremo superior de la edificación rotaciones en el sentido contrario.(Guevara, 1998)

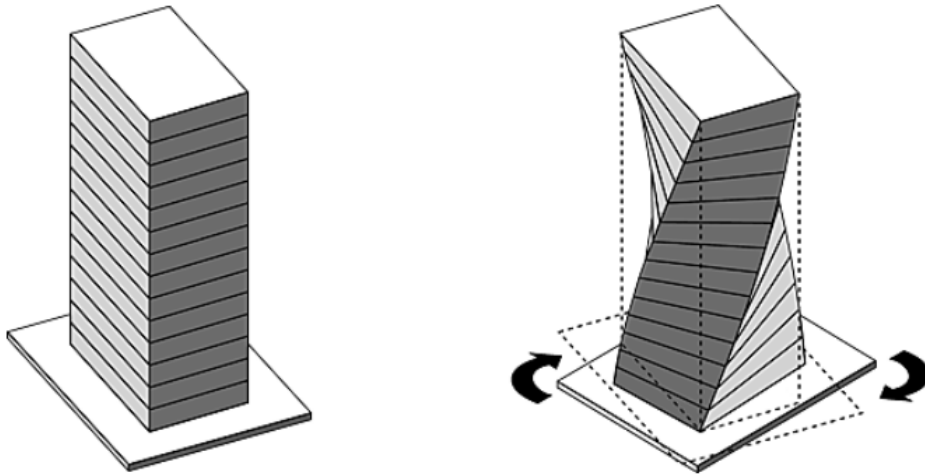


FIGURA 2.5. TORSIÓN DE LA EDIFICACIÓN

Fuente: Adaptado de (Guevara, 1998)

Las torsiones en las edificaciones corresponden a la variabilidad en la proporción de rigideces en la edificación; Para que se conserve en equilibrio la edificación y al aplicar una fuerza horizontal se produzcan únicamente desplazamientos, mas no torsión, se debe generar una coincidencia entre el centro de masas con el centro de rigideces. Si la proporción de los elementos resistentes a las cargas o fuerzas laterales no es simétrica se genera un desplazamiento del centro de rigidez, creando una excentricidad con respecto al centro de masas y la edificación rotará. Se puede considerar cuantitativamente que una excentricidad entre el centro de masas y el centro de rigidez es grande, cuando supera el 10% de la dimensión de la planta analizada; en caso de superarse el 10% se debe realizar correcciones en el planteamiento y diseño estructural de la edificación.

### 2.6.1 Centro de masas

El centro de masas (CM) es el punto en el que se considera que está concentrada la masa de cada piso, y al estar ella posicionada en ese lugar produce el mismo efecto que cada una de las masas del piso actuando en su posición real, es decir, que el centro de

masas es el punto geométrico en donde puede concentrarse toda la masa de un piso de la estructura.(Zúñiga, 2015)

Para calcular el centro de masas se debe dividir la planta en áreas dependiendo de la forma que esta tenga; las ecuaciones para obtener el centro de masas son las siguientes:

$$\text{Ecuación 2.3. } X_{CM} = \frac{\sum \text{Área}_i * X_i}{\sum \text{Área}_i}$$

$$\text{Ecuación 2.4. } Y_{CM} = \frac{\sum \text{Área}_i * Y_i}{\sum \text{Área}_i}$$

Donde:

$X_{CM}$ , es la coordenada de ubicación del centro de masas en el sentido X

$Y_{CM}$ , es la coordenada de ubicación del centro de masas en el sentido Y

$\text{Área}_i$ , es el área de cada una de las figuras que se dividió la planta para facilitar el cálculo.

$X_i$ , es la ubicación del centro de gravedad en el sentido X de cada una de las figuras que se dividió la planta para facilitar el cálculo.

$Y_i$ , es la ubicación del centro de gravedad en el sentido Y de cada una de las figuras que se dividió la planta para facilitar el cálculo.

### 2.6.2. Centro de rigidez

El centro de rigidez  $C_R$ , representa el centro geométrico de las rigideces de los elementos estructurales de un nivel y es el punto del entrepiso, en el cual al aplicar una fuerza cortante el nivel se traslada sin rotar con respecto al nivel inferior. (Velásquez & Fonten, 2015)

Se enfatiza que las cargas sísmicas se aplican en el centro de masas  $C_M$  y que lo ideal debe ser que este coincida o se encuentre lo más cerca posible del  $C_R$  para evitar problemas de torsión en planta.

Para los cálculos del centro de rigidez  $C_R$ , se emplean dos métodos los cuales se tratan del cálculo del centro de rigidez en función de la rigidez lateral de los pórticos de la edificación y el cálculo del centro de rigidez en función de las rigideces  $t$ .

### 2.6.2.1. Centro de rigidez en función de la rigidez lateral

Para realizar el cálculo del centro de rigideces ( $C_R$ ) este es uno de los procesos menos complejos de cálculo, en el cual debemos seguir un procedimiento, el cual es, obtener las matrices de rigidez lateral de todos los pórticos de la edificación, esto se puede realizar empleando los procesos de cálculo que se presenta en el libro de análisis matricial de estructuras del Dr. Roberto Aguiar; como siguiente paso, se debe realizar un equilibrio de fuerzas y momentos en los sentidos tanto en X como en Y, y así obtenemos las coordenadas  $X_{CR}$  y  $Y_{CR}$  de la edificación analizada.

### 2.6.2.2 Centro de rigidez en función de la rigidez "t"

La rigidez "t" es la fuerza necesaria para que un elemento se desplace horizontalmente la unidad y todas las demás coordenadas sean nulas, por lo tanto, el cálculo del centro de rigidez, por medio de la rigidez "t", se refiere a que se calcula la rigidez únicamente de las columnas con la siguiente ecuación:

$$\text{Ecuación 2.5. } t = \frac{12 \cdot E \cdot I}{H^3}$$

Donde:

$t$ , es la rigidez del elemento

$E$ , es el módulo de elasticidad del elemento

$I$ , es la inercia del elemento

$H$ , es la altura del elemento

El proceso de cálculo es semejante al método anteriormente mencionado, ya que se debe calcular la rigidez "t" de cada columna existente en la edificación, y así realizar un equilibrio de fuerzas y momentos tanto en el sentido X como en el sentido Y, y así obtener las coordenadas  $X_{CR}$  y  $Y_{CR}$  de la edificación analizada.

## **CAPITULO III. METODOLOGIA**

### **3.1. Hipótesis**

Es posible incluir las escaleras en el análisis y diseño estructural, para considerar su influencia en el balance torsional de las edificaciones de concreto reforzado,

### **3.2. Identificación de las variables**

#### **3.2.1. Variable independiente**

Rigidez de la escalera.

#### **3.2.2. Variables dependientes**

Balance torsional de la edificación.

### **3.3. Tipo de estudio**

El enfoque de la investigación corresponde al tipo mixto (Cualitativo – Cuantitativo), de tipo descriptivo en base a revisión de los atributos que constituyen las variables de estudio, de campo al realizar la visita de las diferentes edificaciones para la toma de datos, transversal en cuanto a la temporalidad que se determinó para la recolección de información de las estructuras.

### **3.4. Población y muestra**

#### **3.4.1. Población**

El universo de estudio estuvo compuesto por las escaleras correspondientes al centro urbano de la ciudad de Riobamba con un total de 35 edificaciones.

#### **3.4.2. Muestra**

La muestra fue de tipo intencional no probabilística en base a los criterios de selección constituida por 20 escaleras ubicadas en la urbe de la ciudad de Riobamba.

### 3.5. Selección del tipo de escalera

En esta investigación se determinó el tipo más común de escalera utilizada en la ciudad de Riobamba, tomando en consideración los edificios más relevantes, Al menos con 3 pisos o de mayor altura de la ciudad. Se determinó que el tipo más común de escaleras utilizado en la construcción de las edificaciones de la ciudad es la escalera auto portante, el cuál es un sistema formado por dos tramos escalonados en dirección opuesta de cada tramo, con una unión común la cual es una losa plana llamada descanso, la misma que se puede observar en la figura 3.1.

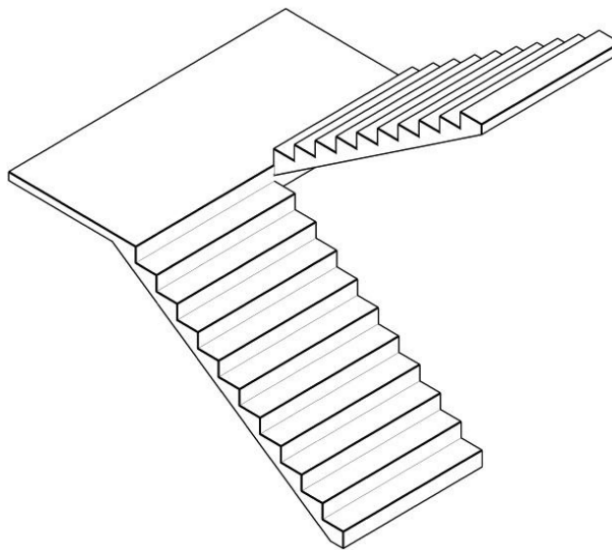


FIGURA 3.1. ESCALERA AUTOPORTANTE

Fuente: Adaptado de (Xoquic, 2016)

Las edificaciones consideradas en esta investigación, son las que se detallan a continuación: Edificio Portal de los Andes, Edificio Torres Hospiesaj, Hotel Zeus, Hotel el Cisne, Edificio Portal San Andrés, Ilustre Municipio de Riobamba, Edificio Milano Plaza, Edificio Janeta, Correos del Ecuador, Unidad Educativa San Felipe Neri, Edificio de Casanova, Colegio Experimental Maldonado, Corte Provincial de Justicia, Edificio Córdova 2, Hotel El Molino, Edificio Vancouver, Edificio Córdova, Edificio Costales, Edificio Boston, Edificio Pino.



### 3.6. Dimensionamiento de la escalera

Se realizó el dimensionamiento de la escalera, tomando en consideración las reglas de seguridad, comodidad y paso para determinar las dimensiones de huella y contrahuella estipulados por (Templer, 1992), y a su vez enfatizando en la norma (NTE INEN 2249, 2016), la cual trata a cerca de las dimensiones mínimas y máximas en escaleras.

Las ecuaciones 3.1, 3.2 y 3.3 son las utilizadas para el dimensionamiento de huella y contrahuella con respecto a las reglas de seguridad, comodidad y paso respectivamente, obteniendo resultados asumiendo una dimensión de contrahuella, mientras que la ecuación 3.4 es la estipulada en la norma (NTE INEN 2249, 2016), en la cual expresa que la dimensión máxima de contrahuella es de 18 cm, así que se asume esta para emplear en la ecuación.

$$h + ch = 46 \text{ cm} \quad \text{Ec. (3.1)}$$

$$h - ch = 12 \text{ cm} \quad \text{Ec. (3.2)}$$

$$2ch + h = 63 \text{ cm} \quad \text{Ec. (3.3)}$$

$$60 \text{ cm} \leq 2ch + h \leq 66 \text{ cm} \quad \text{Ec. (3.4)}$$

### 3.7 Altura equivalente del espesor de la escalera.

Una vez obtenidas las dimensiones de huella y contrahuella se determina el espesor de la escalera, para poder calcular una altura equivalente de la misma y realizar el análisis que involucra este trabajo de investigación, realizando un corte de un peldaño de escalera con su tramo de losa correspondiente, procediendo a dividir la figura obtenida en figuras geométricas simples para calcular sus centroides e inercias y poder aplicar la ecuación 3.5

$$h_{eq} = \sqrt[3]{\frac{I_T * 12}{b}} \quad \text{Ec. (3.5)}$$

### 3.8. Modelos matemáticos

Para los cálculos de la matriz de rigidez de la escalera y la condensación estática de la misma, se tomaron en cuenta dos modelos matemáticos de la estructura.

El primer modelo matemático que se utilizó en esta investigación es la estructura empotrada en el nudo 1 y apoyada con una articulación en el nudo 3 tal como se muestra en la figura 3.2.

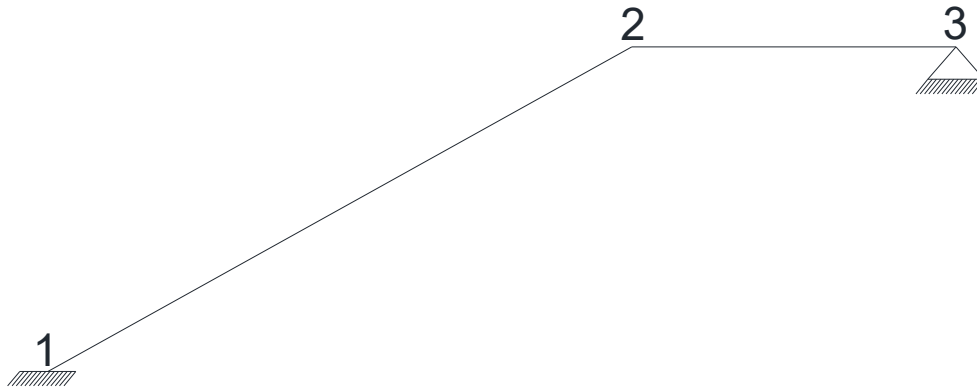


FIGURA 3.2. MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

El segundo modelo matemático que se utilizó en esta investigación es la estructura apoyada con una articulación en el nudo 1 y apoyada con una articulación en el nudo 3, como se muestra en la figura 3.3.

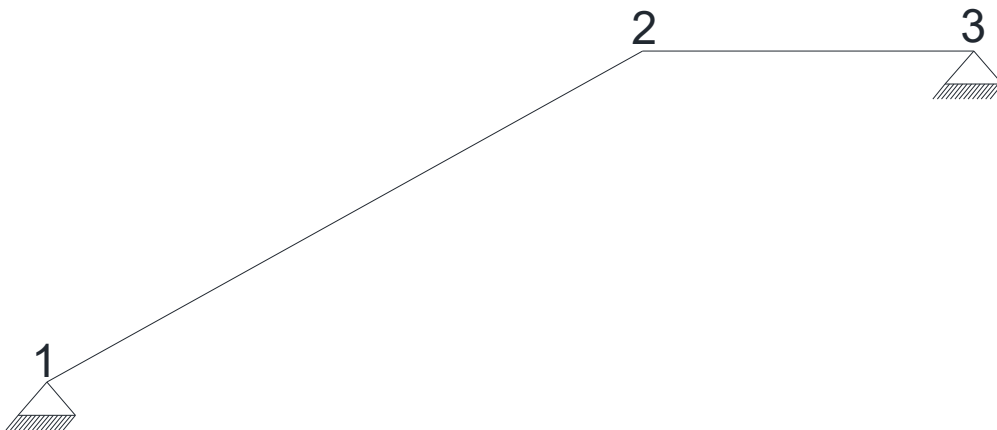


FIGURA 3.3. MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

### 3.9. Cálculo de la matriz de rigidez de los modelos matemáticos

La matriz de rigidez de la estructura por ensamblaje directo, se calcula obteniendo la matriz de rigidez de cada elemento que conforma la estructura en coordenadas locales, por medio de la ecuación 3.6.

$$k_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & t & b & 0 & -t & b \\ 0 & b & k & 0 & -b & a \\ -r & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -t & -b & 0 & t & -b \\ 0 & b & a & 0 & -b & k \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.6)}$$

En donde:

$$t = \frac{12EI}{L^3} \quad b = \frac{6EI}{L^2} \quad k = \frac{4EI}{L} \quad a = \frac{2EI}{L} \quad r = \frac{EA}{L}$$

$E$ , es el módulo de elasticidad del elemento analizado de la estructura.

$I$ , es la inercia del elemento analizado de la estructura.

$L$ , es la longitud del elemento analizado de la estructura.

Para pasar de coordenadas locales a coordenadas globales se debe aplicar la ecuación 3.7, para ello debemos calcular la matriz de rotación  $\bar{T}_{2-3}$ , presentada en la ecuación 3.8 y obtenemos la matriz de rigidez de elemento y proceder al ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura, mediante los vectores de colocación de los grados de libertad de los nudos iniciales y finales de cada elemento.

$$k_3 = T_{2-3}^t * k_2 * T_{2-3} \quad \text{Ec. (3.7)}$$

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (3.8)}$$

### 3.10. Condensación estática de la matriz de rigidez de la estructura.

Para realizar la condensación estática de la matriz de rigidez, se utiliza la ecuación 3.9, la cual es determinada tanto para pórticos ortogonales como para pórticos no ortogonales,

siendo este el caso de la estructura de la escalera en el presente trabajo de investigación, para ello se divide la matriz de rigidez de la estructura en sub matrices como se explicó en el capítulo anterior. Obteniendo de esta manera una expresión con la cual podremos calcular de forma rápida y sencilla la rigidez lateral de la escalera para los dos modelos matemáticos planteados en esta investigación.

$$K_L = K_{AA} - K_{AB} * K_{BB}^{-1} * K_{BA} \quad \text{Ec. (3.9)}$$

### **3.11. Inclusión de la matriz de rigidez lateral de la escalera en el balance torsional de la edificación**

Para incluir la rigidez lateral de la escalera en el balance torsional de la configuración estructural de la edificación, se calcula el centro de masas de la planta de la edificación a dimensionar por medio de las ecuaciones 3.10 y 3.11; para así continuar con dos procedimientos de cálculo los cuales son en función de la rigidez lateral y en función de las rigideces “t” con la ecuación 3.12, para obtener el centro de rigidez de la planta de la edificación dimensionada.

## CAPITULO IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1 Selección del tipo y dimensionamiento de la escalera

Se determinó el tipo de escalera más utilizada en la ciudad de Riobamba, siendo esta la escalera auto portante, la cual se la utilizó para realizar el dimensionamiento de la misma para el análisis que conlleva el presente proyecto de investigación, mismo en el que el dimensionamiento se lo realizó teniendo en primera instancia las dimensiones de la estructura de la rampa, como son, longitud de la rampa de la escalera  $Lr$ , longitud horizontal de la rampa de la escalera  $Lh$ , longitud contemplada del descanso  $Ld$  y la altura de la rampa de la escalera  $hv$ ; se asumieron valores para  $Lh$ ,  $Ld$  y  $hv$ , considerando medidas utilizadas en planos de diseños arquitectónicos y por medidas tomadas en los edificios que se valoraron para el desarrollo de esta investigación.

Teniendo estos datos se procedió a calcular el valor de  $Lr$ , cuyo resultado fue  $3.0886890423\text{ m}$  para facilidades de comprensión todos estos datos se muestran en la tabla 4.1

<b>DIMENSIONES DE LA ESTRUCTURA DE LA ESCALERA</b>			
<b>Lh (m)</b>	<b>Ld (m)</b>	<b>hv (m)</b>	<b>Lr (m)</b>
2.7	1.5	1.5	3.08868904

Tabla 4.1. Dimensiones de escalera

Elaborado por: Andrés Salazar

Con los con los valores asumidos y obtenidos, los cuales se detallaron anteriormente, se derivó al cálculo de los peldaños de la escalera, siguiendo tres reglas fundamentales establecidas por (Templer, 1992), para el dimensionamiento de huella  $h$  y contrahuella  $ch$ , las cuales son regla de seguridad, regla de comodidad y regla de paso. Obteniendo así unas dimensiones óptimas de huella y contrahuella por medio de las respectivas ecuaciones detalladas en el anterior capítulo e interpretándolos en la gráfica de la figura 4.1, donde se establece que la dimensión ideal de huella y contrahuella es donde se intersecan las tres rectas. Sin embargo hay que considerar los parámetros establecidos por la norma ecuatoriana (NTE INEN 2249, 2016), en la cual nos habla de dimensiones máximas y mínimas que deben tener la huella, contrahuella y ancho de escalera.

Siguiendo procedimientos de cálculo de dimensionamiento de escaleras establecidos en el libro de análisis y diseño sísmico de edificios elaborado por (Rochel, 2012), obteniendo las dimensiones a utilizar de huella, el número de peldaños que tendrá la escalera la cual está en función de la altura a salvar **ha** y el espesor de la losa de la rampa de la escalera **hr**; todas las dimensiones obtenidas detalladas anteriormente se exponen en la tabla 4.2 como un resumen de datos a utilizarse en cálculos posteriores. El detalle del cálculo de este dimensionamiento se lo encuentra en el anexo 1.

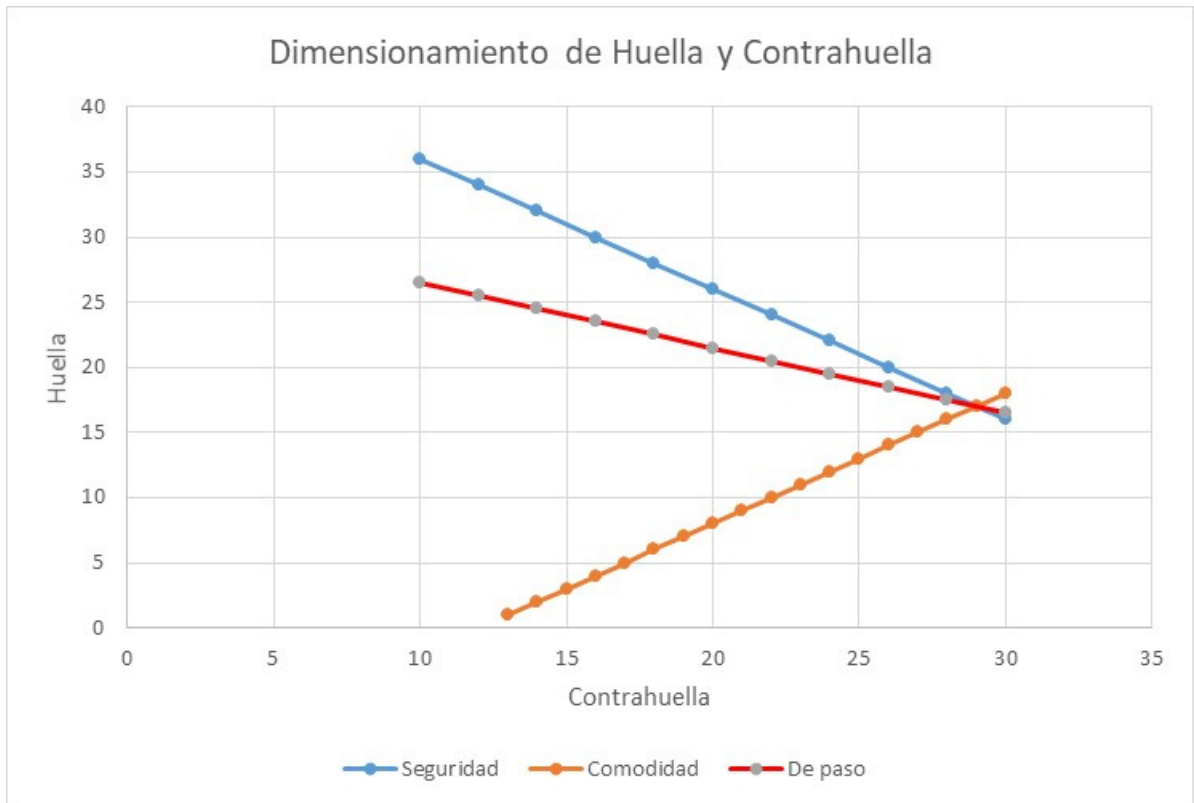


FIGURA 4.1. HUELLA Y CONTRAHUELLA

Elaborado por: Andrés Salazar

DIMENSIONES DE LOS PELDAÑOS Y ESPESOR DE LA RAMPA				
ha (m)	Nro. de peldaños	h (cm)	ch (cm)	hr (cm)
1.50	9.00	30.00	16.67	15.00

Tabla 4.2. Dimensiones de peldaños

Elaborado por: Andrés Salazar

Para poder realizar un análisis más detallado, se obtuvo una altura equivalente del espesor de la escalera  $h_{eq}$ , para lo que se realizó la toma de un tramo de la escalera que comprendía de un peldaño y parte de la rampa, aplicando las ecuaciones y el proceso de cálculo ya explicados en el capítulo anterior se obtuvo el siguiente resultado.

$$h_{eq} = 24.9088845525 \text{ cm}$$

Como se obtuvo un valor con decimales, se eligió el inmediato superior, por lo que la dimensión final de  $h_{eq}$  fue de **25 cm**. Esta altura equivalente se calculó, ya que influye en el cálculo de la inercia de la escalera, la cual es parte fundamental para la obtención de la matriz de rigidez y consecuentemente de la rigidez lateral de la escalera el cálculo detallado de esta sección se encuentra en el Anexo 2.

#### 4.2 Modelos matemáticos y su matriz de rigidez

Se determinaron dos modelos matemáticos, siendo el primero un sistema empotrado-apoyado y el segundo un sistema apoyado-apoyado como se lo muestra en las figuras 4.2 y 4.3 respectivamente.

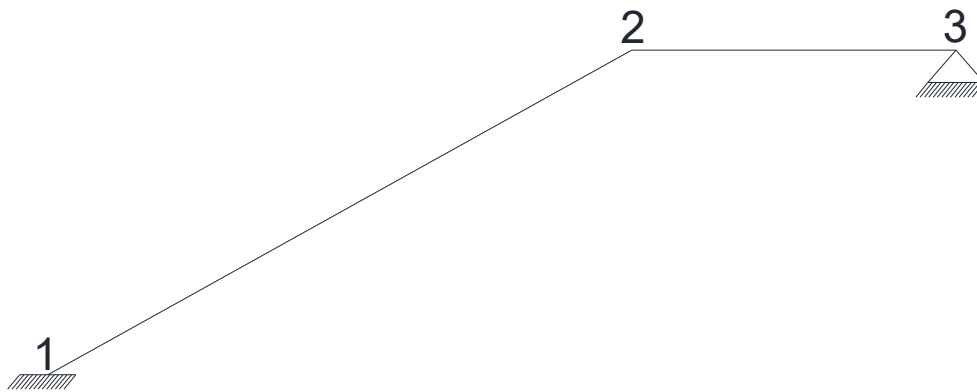


FIGURA 4.2. SISTEMA EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

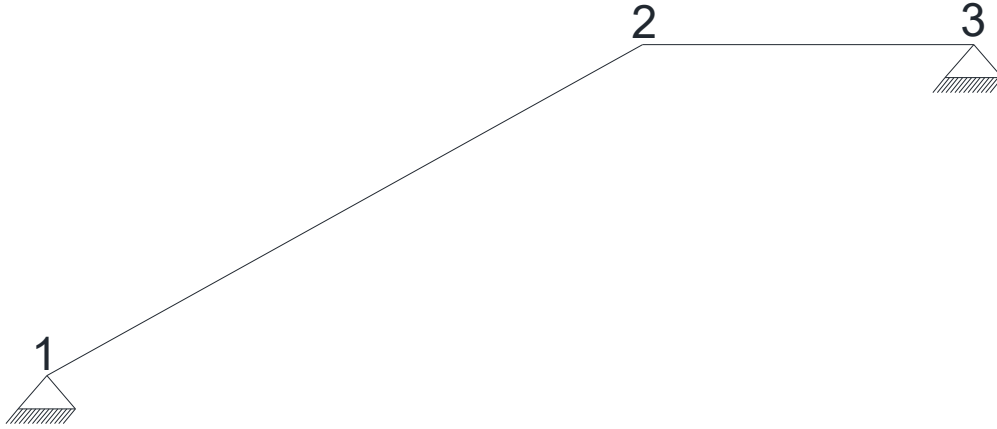


FIGURA 4.3. SISTEMA APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Para obtener la matriz de rigidez de la escalera, se aplicaron dos procesos de cálculo, los cuales fueron ensamblaje directo y por medio de la matriz de compatibilidad A, realizando cálculos alfanuméricos y comprobando con datos numéricos. Los cuales se encuentran a detalle en el anexo 3.

El resultado alfanumérico de la matriz de rigidez de la escalera, para el primer modelo matemático por ensamblaje directo fue:

$$K = \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2 & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & 0 \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & b_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_2 \\ 0 & b_2 & a_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Mientras que el resultado alfanumérico de la matriz de rigidez por medio de la matriz de compatibilidad A, es el presentado a continuación:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1 \cos^2 \theta}{Lr} + \frac{E_2 A_2}{Ld} + \frac{12 E_1 I_1 \sin^2 \theta}{Lr^3} & -\frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & 0 \\ -\frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{E_1 A_1 \sin^2 \theta}{Lr} + \frac{12 E_1 I_1 \cos^2 \theta}{Lr^3} + \frac{12 E_2 I_2}{Ld^3} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} \\ \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{4 E_1 I_1}{Lr} + \frac{4 E_2 I_2}{Ld} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} \\ 0 & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} & \frac{4 E_2 I_2}{Ld} \end{bmatrix}$$



Para el segundo modelo matemático el resultado alfanumérico de la matriz de rigidez de la escalera, por ensamblaje directo fue:

$$K = \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2 & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & b_1 \sin \theta & 0 \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & -b_1 \cos \theta & b_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_1 & a_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & a_1 & k_1 & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Siendo el resultado alfanumérico de la matriz de rigidez por medio de la matriz de compatibilidad A, es el presentado a continuación:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1 \cos^2 \theta}{Lr} + \frac{E_2 A_2}{Ld} + \frac{12 E_1 I_1 \sin^2 \theta}{Lr^3} & -\frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & 0 \\ -\frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{E_1 A_1 \sin^2 \theta}{Lr} + \frac{12 E_1 I_1 \cos^2 \theta}{Lr^3} + \frac{12 E_2 I_2}{Ld^3} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} \\ \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{4 E_1 I_1}{Lr} + \frac{4 E_2 I_2}{Ld} & \frac{2 E_1 I_1}{Lr} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} \\ \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & -\frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{2 E_1 I_1}{Lr} & \frac{4 E_1 I_1}{Lr} & 0 \\ 0 & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} & 0 & \frac{4 E_2 I_2}{Ld} \end{bmatrix}$$

Para comprobar que la matriz de rigidez de la escalera está realizada correctamente, se procedió a reemplazar los valores alfanuméricos por valores numéricos, para realizar una modelación en el software ETABS, al cual se lo realizó como tipo Frame para poder obtener los desplazamientos en cada nudo, esto comparando con un cálculo realizado manualmente para la obtención del vector de cargas generalizadas y posteriormente el vector de desplazamientos generalizados; en las tablas 4.3 y 4.4, se observan los resultados para el primero y segundo modelo matemático respectivamente. Este proceso de cálculo se lo indica muy detalladamente en el anexo 4.

DESPLAZAMIENTOS				
COORDENADA	1 (m)	2 (m)	3 (m)	4 (m)
CÁLCULO MANUAL	0.000006509	-0.00004397	0.00003158	0.00004361
ETABS	0.000007	-0.000048	-0.000039	-0.000045

Tabla 4.3. Desplazamientos Modelo Matemático 1

Elaborado por: Andrés Salazar

DESPLAZAMIENTOS					
COORDENADA	1 (m)	2 (m)	3 (m)	4 (m)	5 (m)
CÁLCULO MANUAL	0.000008235	-0.00005405	0.00006536	-0.0001605	0.0000368
ETABS	0.000009	-0.000059	-0.000078	0.000185	-0.000038

Tabla 4.4. Desplazamientos Modelo Matemático 2

Elaborado por: Andrés Salazar

Comparando los valores obtenidos entre el cálculo manual y los resultados generados por el software ETABS, observamos que hay cierto error, el cual no es muy significativo, ya que su variación es alrededor del 10% de error, lo cual es aceptable y se pudo observar que el cálculo de la matriz de rigidez se encuentra realizada correctamente y proceder a la condensación estática de la matriz de rigidez, por medio de la ecuación 3.9 presentada en el capítulo anterior, siguiendo el proceso de cálculo presentado en el anexo 3.

Se obtuvo las expresiones para calcular la rigidez lateral de la escalera de una manera rápida y sencilla a manera de ecuaciones las cuales se las representan como ecuación 4.1 para el primero modelo matemático y ecuación 4.2 para el segundo modelo matemático las cuales servirán para poder incluir la rigidez lateral de la escalera dentro del dimensionamiento inicial de una configuración estructural, con la finalidad de integrar la escalera en el balance torsional de la edificación.

Ec. (4.1)

$$K_L = [r_1 \cos^2 \theta + t_1 \operatorname{sen}^2 \theta + r_2] - [r_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - t_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \quad b_1 \operatorname{sen} \theta \quad 0] * \\ \begin{bmatrix} r_1 \operatorname{sen}^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & b_2 \\ -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_2 \\ b_2 & a_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - t_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ b_1 \operatorname{sen} \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ec. (4.2)

$$K_L = [r_1 \cos^2 \theta + t_1 \operatorname{sen}^2 \theta + r_2] - [r_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - t_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \quad b_1 \operatorname{sen} \theta \quad b_1 \operatorname{sen} \theta \quad 0] * \\ \begin{bmatrix} r_1 \operatorname{sen}^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & -b_1 \cos \theta & b_2 \\ -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_1 & a_2 \\ -b_1 \cos \theta & a_1 & k_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - t_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ b_1 \operatorname{sen} \theta \\ b_1 \operatorname{sen} \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

En donde los subíndices representan a la numeración de cada elemento de la estructura, y  $\theta$  representa al ángulo formado entre la horizontal y el elemento de la estructura, sabiendo que:

$$t = \frac{12EI}{L^3} \quad b = \frac{6EI}{L^2} \quad k = \frac{4EI}{L} \quad a = \frac{2EI}{L} \quad r = \frac{EA}{L}$$

#### 4.3 Rigidez lateral de la escalera incluida en el balance torsional de la edificación.

Para incluir la matriz de rigidez lateral de la escalera en el balance torsional de la edificación se realizó un esquema de una planta arquitectónica para analizar, el proceso se lo fundamentó obteniendo el centro de masas mediante figuras geométricas y la obtención del centro de rigidez de la planta de la edificación, este se lo calculó a través de dos procedimientos, los cuales fueron en función de la rigidez lateral  $KL$  y en función de la rigidez " $t$ ". Lo cual se lo indica con mayor detalle en el anexo 5.

Al realizar el cálculo del centro de masas de la planta de edificación propuesta, la cual fue de dimensiones 13 x 14.2 m se obtuvo los siguientes valores de  $X_{CM}$  y de  $Y_{CM}$ .

$$X_{CM} = 6.50 \text{ m}$$

$$Y_{CM} = 7.10 \text{ m}$$

Teniendo estos valores del centro de masas de la planta de la edificación, se calculó el centro de rigidez manualmente por los dos métodos antes mencionados, por medio de equilibrio de fuerzas y momentos, los cuales se presentan a continuación:

Cálculo del centro de rigidez en función de la rigidez lateral:

$$X_{CR} = 6.50 \text{ m}$$

$$Y_{CR} = 7.10 \text{ m}$$

Cálculo del centro de rigidez en función de las rigideces " $t$ "

$$X_{CR} = 6.50 \text{ m}$$

$$Y_{CR} = 7.10 \text{ m}$$

Al comparar los resultados obtenidos del centro de rigidez de cualquiera de los dos métodos con el centro de masas, se calculó las excentricidades existentes en la planta de la edificación, incluida la escalera dentro de este análisis, en donde se obtuvo que  $e_x = 0 m$ , y  $e_y = 0 m$

Posteriormente se realizó una modelación de esta planta de edificación propuesta en el software ETABS, donde se incluyó la escalera, modelándola como tipo membrana, lo cual viene a ser más sujeto a la realidad constructiva y es una estructura simple; los resultados obtenidos en el software fueron los constados en la tabla 4.5.

#### **CENTRO DE MASAS Y RIGIDEZ**

<b>XCM (m)</b>	<b>YCM (m)</b>	<b>XCR (m)</b>	<b>YCR (m)</b>
6.459	7.01	6.49	7.369

Tabla 4.5. Resultados de la Modelación en ETABS

Elaborado por: Andrés Salazar

## CONCLUSIONES

Se determinó a través de una muestra intencional no probabilística que el tipo más común de escalera utilizada en la construcción de las edificaciones más relevantes de la ciudad de Riobamba, es la escalera auto portante, la cual es un sistema formado por dos tramos escalonados en dirección opuesta de cada tramo, con una unión común denominada descanso que resulta ser una losa plana.

Se pudo establecer dos modelos matemáticos con diferentes vinculaciones para el tipo de escalera determinado como el más común utilizado en las edificaciones de la ciudad de Riobamba para el análisis de la estructura de la escalera, en donde el primer modelo matemático fue establecido con un sistema empotrado-apoyado y el segundo modelo matemático con un sistema apoyado-apoyado

En base a la aplicación del primer modelo matemático el cual fue desarrollado con un sistema empotrado-apoyado, sometido a dos métodos de cálculo de la matriz de rigidez de la estructura como son por ensamblaje directo y por medio de la matriz de compatibilidad A y posteriormente derivado a la condensación estática de la matriz de rigidez, se obtuvo dos ecuaciones, en las cuales al reemplazar los términos alfanuméricos por valores numéricos se obtuvo el mismo resultado, por lo tanto, se pudo concluir que para facilidades de cálculo y comprensión se debe emplear la ecuación presentada a continuación, debido a que su aplicación resulta menos compleja:

$$K_L = [r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2] - [r_1 \cos \theta \sin \theta \quad -t_1 \cos \theta \sin \theta \quad b_1 \sin \theta \quad 0] * \\ \begin{bmatrix} r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & b_2 \\ -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_2 \\ b_2 & a_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta \\ b_1 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mientras que aplicando el segundo modelo matemático que se desarrolló con un sistema apoyado-apoyado, el cual al igual que el primer modelo matemático fue sometido a dos métodos de cálculo de la matriz de rigidez antes mencionados para luego derivar a la condensación estática de la matriz de rigidez, se determinó otra ecuación empleada al modelo matemático en cuestión, misma que se presenta a continuación:

$$K_L = [r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2] - [r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta \quad b_1 \sin \theta \quad b_1 \sin \theta \quad 0]$$

$$* \begin{bmatrix} r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & -b_1 \cos \theta & b_2 \\ -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_1 & a_2 \\ -b_1 \cos \theta & a_1 & k_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$* \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta \\ b_1 \sin \theta \\ b_1 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se planteó un modelo de planta arquitectónica, la cual fue configurada estructuralmente con cuatro pórticos en sentido X y cuatro pórticos en sentido Y, compuestos por columnas de 30 x 30 cm y vigas de 25 x 30 cm, se consideró un módulo de elasticidad de 2100000 T/m<sup>2</sup> y de elementos axialmente rígidos. A este modelo de planta arquitectónica y configuración estructural se añadió la escalera, misma que estuvo compuesta de elementos totalmente flexibles y de las dimensiones calculadas en el capítulo 3 en el apartado correspondiente a dimensionamiento de la escalera, obteniendo así una planta de dimensiones 13 x 14.20 m con un hueco de escaleras de 3 x 4.20 m. Para realizar la inclusión de la escalera en el análisis del balance torsional, se calculó el centro de masas de la planta de la edificación, teniendo como resultado  $X_{CM} = 6.50 \text{ m}$ , y  $Y_{CM} = 7.10 \text{ m}$ . Para calcular el centro de rigidez se aplicó dos métodos de cálculo los cuales fueron en función de la rigidez lateral de los pórticos y la escalera y en función de la rigidez "t", métodos por los cuales se obtuvo el mismo resultado siendo estos  $X_{CR} = 6.50 \text{ m}$ , y  $Y_{CR} = 7.10 \text{ m}$ , es decir, que no se generó excentricidades en la planta de la edificación. Comparando estos resultados con resultados que se obtuvo mediante la modelación en el software ETABS, los cuales fueron  $X_{CM} = 6.459 \text{ m}$ , y  $Y_{CM} = 7.01 \text{ m}$ , correspondientes al centro de masas y  $X_{CR} = 6.49 \text{ m}$ , y  $Y_{CR} = 7.369 \text{ m}$ .

Se concluye que es posible incluir la rigidez lateral de la escalera dentro del análisis del balance torsional de la edificación para el dimensionamiento inicial de la configuración estructural de una edificación, antes de integrarse al diseño estructural de la edificación, pudiendo así tratar de no tener que realizar demasiadas interacciones en el diseño.

## RECOMENDACIONES

Se recomienda que se efectúen nuevas investigaciones que se centren en determinar que otros tipos de escaleras son mayormente utilizadas en la construcción de las distintas edificaciones que se van creando actualmente en la ciudad de la ciudad de Riobamba.

Es recomendable que se sigan estableciendo más modelos matemáticos que puedan ser aplicados para efectuar un análisis de la estructura de la escalera.

Se sugiere que se efectúen investigaciones futuras que ayuden a la creación de nuevas ecuaciones mediante las cuales se pueda obtener rigidez lateral de la escalera en diferentes modelos matemáticos, además de los modelos matemáticos ya presentados en esta investigación.

Se propone que la ecuación planteada en esta investigación sea empleada para obtener el valor de rigidez lateral de la escalera de forma más rápida y sencilla, debido a que su aplicación facilita el trabajo al momento de desarrollar el cálculo del centro de rigidez, considerando también que ésta puede ser incluida en análisis del balance torsional aproximado de la edificación.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdallha, M. (2017). *Steel-Reinforced Concrete Structures*.
- Aguiar, R. (2004). ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS. In R. Aguiar (Ed.), *ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS* (TERCERA, Vol. 3). <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Aguiar, R. (2012). *Dinámica de estructuras con CEINCI-LAB*. [https://www.researchgate.net/publication/279914782\\_Dinamica\\_de\\_Estructuras\\_con\\_CEINCI-LAB](https://www.researchgate.net/publication/279914782_Dinamica_de_Estructuras_con_CEINCI-LAB)
- Blanco, L., Antonio, C., Jos, H., & Garc, M. (2012). *Análisis estático de estructuras por el método matricial*.
- Guevara, T. (1998). *Recomendaciones para crear diseños arquitectónicos sísmo resistentes a la luz de la nueva Norma Colombiana NSR-98*. September 1998, 32. [https://www.researchgate.net/publication/301567566\\_Recomendaciones\\_para\\_crear\\_disenos\\_arquitectonicos\\_sismo\\_resistentes\\_a\\_la\\_luz\\_de\\_la\\_nueva\\_Norma\\_Colombiana\\_NSR-98?fbclid=IwAR05IXzWVuIHvy5qjVGn5fWxQdrA0hIJQAv-ibkCEegxuNw2PvxqOS805tE](https://www.researchgate.net/publication/301567566_Recomendaciones_para_crear_disenos_arquitectonicos_sismo_resistentes_a_la_luz_de_la_nueva_Norma_Colombiana_NSR-98?fbclid=IwAR05IXzWVuIHvy5qjVGn5fWxQdrA0hIJQAv-ibkCEegxuNw2PvxqOS805tE)
- Hernández, I. E. (2005). *ANÁLISIS ESTRUCTURAL APUNTES GENERALES* (Issue 5). NTE INEN 2249, 14 (2016).
- Monge, J. P. (2014). *Análisis sísmico de una estructura con aisladores FPS de la primera y segunda generación*. 217.
- Nilson, A. H. (1999). Sistemas de Construcción para Edificios de Concreto. In *Diseño de estructuras de concreto*.
- Orta, D. L. (2019). DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO. In *Diseño de estructuras de concreto*. (Vol. 1, Issue 9). <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Otavalo, J. H. (2017). *DETERMINACIÓN DE LOS PRINCIPALES PROBLEMAS DE CONFIGURACIÓN ESTRUCTURAL EN EDIFICACIONES, QUE AUMENTAN LA*



*VULNERABILIDAD SÍSMICA EN EL ECUADOR.*

- Quispe, R. (2010). *Manual Básico De Análisis Y Diseño Estructural con ETABS*.
- Rochel, R. (2012). *Análisis y diseño sísmico de edificios*.
- Sánchez, N. M., Benavides, M. J., & Moreno, R. (2015). Caracterización de las condiciones estructurales de edificaciones residenciales en Bogotá según NSR-10. *Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de Colombia*, 9.
- Velásquez, H., & Fonten, L. (2015). *ESTUDIO COMPARATIVO DE UN EDIFICIO APORTICADO DE CONCRETO ARMADO UTILIZANDO LAS NORMAS SÍSMICAS DE ECUADOR Y VENEZUELA* (Vol. 1, Issue 4).
- Vilema, I. F. (2016). *DETERMINACIÓN DEL NIVEL DE DESEMPEÑO DE ESTRUCTURAS DE EDIFICACIÓN DE CONCRETO REFORZADO EN LA CIUDAD DE RIOBAMBA*. <http://dspace.unach.edu.ec/handle/51000/3066>
- Xoquic, C. (2016). CENTRO DE RIGIDEZ PROVOCADO POR SISTEMAS DE ESCAERA DE CONCRETO ARMADO SOBRE LA ESTRUCTURA EDIFICATORIA DE CONCRETO REFORZADO. In *Emecanica.Ingenieria.Usac.Edu.Gt*.  
<http://emecanica.ingenieria.usac.edu.gt/sitio/wp-content/subidas/6ARTÍCULO-III-INDESA-SIE.pdf>
- Zúñiga, P. (2015). *EL CENTRO DE RIGIDEZ Y EL CENTRO DE MASAS Y SU INCIDENCIA EN EL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL ANTE SOLICITACIONES SÍSMICAS EN UN EDIFICIO TIPO L DE 6 PISOS DE HORMIGÓN ARMADO EN EL CANTÓN AMBATO, PROVINCIA DE TUNGURAHUA*. 1, 327. <https://doi.org/10.16309/j.cnki.issn.1007-1776.2003.03.004>

## ANEXOS

### ANEXO 1

#### Dimensionamiento de la escalera

Empezamos el cálculo con el dimensionamiento de la escalera, tomando en cuenta los datos necesarios establecidos en la figura A.1, la cual se manifiesta a continuación:

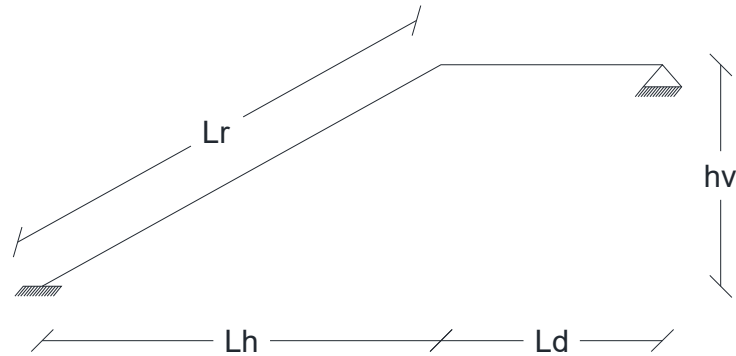


FIGURA A.1. DIMENSIONES DE LA ESTRUCTURA DE LA ESCALERA

Elaborado por: Andrés Salazar

Donde:

$L_r$ , es la longitud de la rampa de la escalera.

$L_h$ , es la longitud horizontal de la rampa de la escalera.

$L_d$ , es la longitud contemplada del descanso.

$h_v$ , es la altura de la rampa de la escalera.

Se dio dimensiones a  $L_h$ ,  $L_d$ , y  $h_v$  con respecto a las medidas que se puede otorgar para la escalera en una edificación en un plano arquitectónico los cuales se detallan a continuación:

$$L_h = 2.70 \text{ m}$$

$$L_d = 1.50 \text{ m}$$

$$h_v = 1.50 \text{ m}$$

Teniendo estas dimensiones, procedemos a calcular  $Lr$  de la siguiente manera:

$$Lr = \sqrt{Lh^2 + hv^2}$$

$$Lr = \sqrt{2.70^2 + 1.50^2}$$

$$Lr = 3.0886890423 \text{ m}$$

Con estos datos obtenidos procedemos al cálculo de los peldaños de la escalera (huella  $h$  y contrahuella  $ch$ ) contrahuella, espesor de la losa de la rampa de la escalera y su altura equivalente.

John A. Templer en 1992 dice que con respecto a la huella y contrahuella en sus dimensiones hay que fijarse 3 reglas fundamentales que deben considerarse en conjunto las cuales son; seguridad, comodidad y de paso.

A continuación, se detalla cada regla con sus respectivas fórmulas para el cálculo donde consideraremos a la huella con la variable “h” y a la contrahuella con la variable “ch”.

Para realizar el cálculo de las ecuaciones se puso valores a la huella  $h$ , según corresponda quedando la contrahuella  $ch$  como la variable de cálculo en cuestión, para después mediante una gráfica obtener sus dimensiones correctas en donde se interceptan las tres curvas.

### Regla de seguridad.

$$h + ch = 46 \text{ cm}$$

<b>h</b>	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
<b>ch</b>	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16

### Regla de la comodidad

$$h - ch = 12 \text{ cm}$$

<b>h</b>	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
<b>ch</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

### Regla del paso

$$2ch + h = 63$$

<b>h</b>	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
<b>ch</b>	26.5	25.5	24.5	23.5	22.5	21.5	20.5	19.5	18.5	17.5	16.5

Tomamos todos estos valores para realizar una gráfica en la cual obtendremos las dimensiones óptimas de huella y contrahuella, la cual se muestra a continuación:

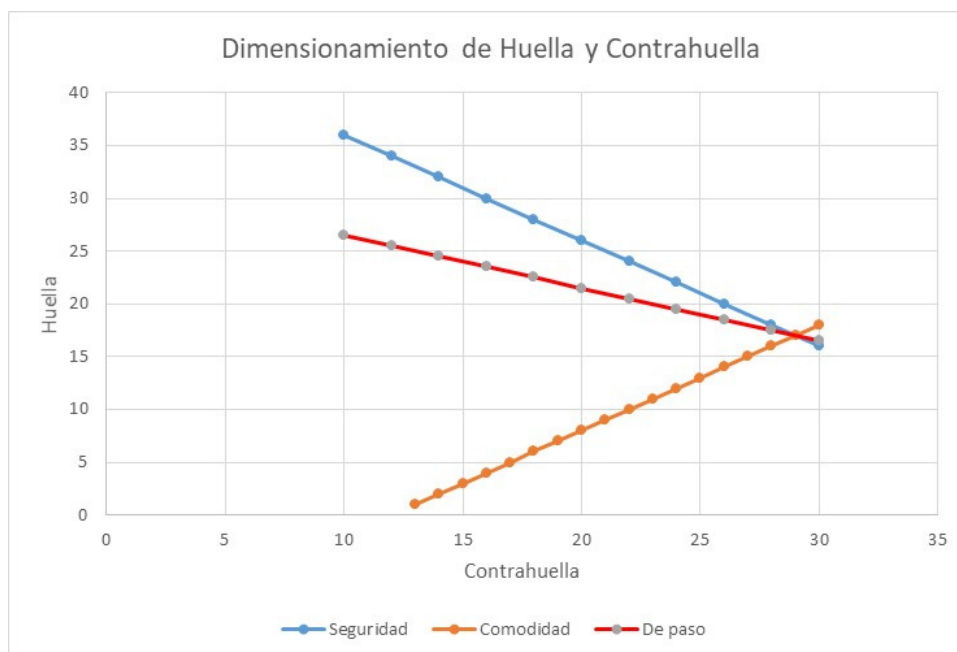


FIGURA A.2. INTERSECCIÓN DE RECTAS PARA HUELLA Y CONTRAHUELLA

Elaborado por: Andrés Salazar

Según el análisis por seguridad, comodidad y paso se tiene que las dimensiones óptimas de huella y contrahuella son 17 y 29 cm respectivamente.

Considerando también la Norma Técnica Ecuatoriana INEN 2249, la cual nos habla acerca de que la dimensión mínima de la huella debe ser de 28 cm y la dimensión máxima de la contrahuella debe ser de 18 cm, y otorgándonos la condición presentada a continuación, procedemos con el cálculo de las dimensiones.

$$60 \text{ cm} \leq 2 \text{ ch} + h \leq 66 \text{ cm}$$

Tomando en cuenta que la altura que debemos salvar (**ha**) es de 1.50 m, empezamos el cálculo de las dimensiones de la escalera, considerando un procedimiento obtenido del libro de Análisis y Diseño Sísmico de Edificios de (Rochel, 2012)

Como primer paso calculamos el número de peldaños que tendrá nuestra escalera con la siguiente fórmula:

$$\text{Nro. de Peldaños} = \frac{ha}{ch}$$

Donde:

*ha*, es la altura a salvar con la escalera.

*ch*, es la dimensión de la contrahuella

Para este paso debemos plantear una dimensión de la contrahuella tomando en cuenta las especificaciones que encontramos en la NTE INEN 2249, la cual será de 17 cm, por lo tanto, procedemos al cálculo:

$$\text{Nro. de Peldaños} = \frac{1.50 \text{ m}}{0.17 \text{ m}}$$

*Nro. de Peldaños* = 8.82 *Lo que nos dá un equivalente a 9 peldaños.*

Una vez obtenido el número de peldaños que vamos a tener en la escalera vamos a obtener la dimensión real de la contrahuella de la siguiente manera:

$$ch = \frac{ha}{\text{Nro. de Peldaños}}$$

$$ch = \frac{150 \text{ cm}}{9 u}$$

$$ch = 16.67 \text{ cm}$$

Teniendo la dimensión de la contrahuella (**ch**), ahora elegimos la dimensión de la huella (**h**), teniendo en considerando la condición que nos otorga la NTE INEN 2249

$$60 \text{ cm} \leq 2 ch + h \leq 66 \text{ cm}$$

Elegimos una dimensión de huella (**h**) de 30 cm y lo aplicamos a la condición.

$$60 \text{ cm} \leq 2(16.67) + 30 \leq 66 \text{ cm}$$

$$60 \text{ cm} \leq 63.34 \text{ cm} \leq 66 \text{ cm}$$

Sabiendo que estamos dentro de la condición, procedemos con al cálculo del espesor de la losa de la rampa de la escalera (**hr**), la cual la obtendremos con la siguiente expresión:

$$hr \geq \frac{Lh}{20}$$

Donde:

*hr*, es el espesor de la losa de la rampa de la escalera.

*Lh*, es la longitud horizontal de la rampa.

De esta manera obtenemos la dimensión del espesor de la losa de la rampa (**hr**) a continuación:

$$hr = \frac{270 \text{ cm}}{20}$$

$$hr = 13.50 \text{ cm}$$

Obteniendo el resultado del cálculo y fundamentando que la expresión nos dice que el espesor de la losa de la rampa (**hr**) debe ser mayor o igual a la longitud horizontal de la rampa (**Lh**) dividido para 20, tomamos un valor de 15 cm para el espesor de la losa de la rampa (**hr**).

Una vez obtenidas todas las dimensiones necesarias para el cálculo pertinente de esta investigación, resumimos los datos obtenidos de las dimensiones con las que emanaremos a los siguientes cálculos.

$$Nro. de Peldaños = 9 u.$$

$$h = 30 \text{ cm}$$

$$ch = 16.67 \text{ cm}$$

$$Lr = 3.0886890423 \text{ m}$$

$$hr = 15 \text{ cm}$$

Concedemos dimensiones también al descanso de la escalera, basándonos en la norma NTE INEN 2249 en donde nos dice que la dimensión mínima del descanso es de 1.20 m al igual que el ancho de paso, por lo tanto, en esta investigación se trabajó con un descanso de dimensiones 1.50 m de largo por 1.50 m de ancho y el espesor de la losa del descanso es el mismo que el de la rampa, para lo cual vamos a calcular una altura equivalente del espesor de la escalera, siendo que esta nos va a servir para el cálculo de la matriz de rigidez de la misma.

## ANEXO 2

### Altura equivalente de la escalera.

Para realizar el cálculo de la altura equivalente  $h_{eq}$ , se realizó un corte de un peldaño de la escalera con su tramo de losa correspondiente de la escalera, como podemos observar en la figura A.3.

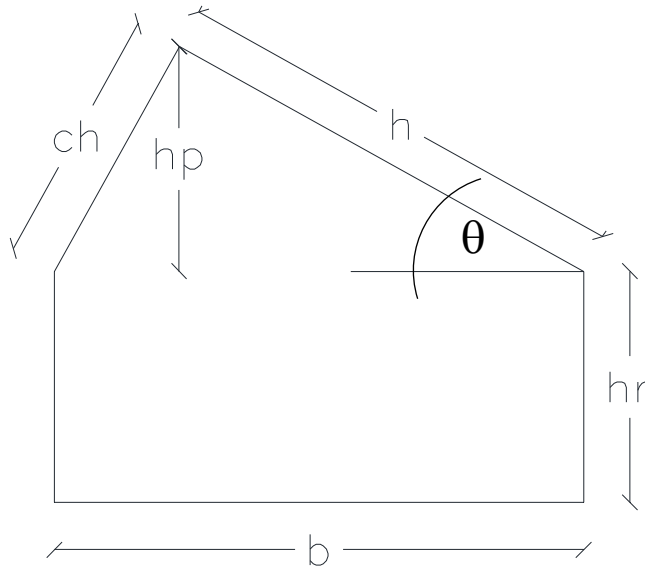


FIGURA A.3. DIMENSIONES DE LOS PELDAÑOS

Elaborado por: Andrés Salazar

Donde:

$b$ , es la base del tramo tomado en cuenta para el cálculo del espesor de la losa.

$hr$ , es el espesor de la losa de la rampa de la escalera.

$ch$ , es la contrahuella del peldaño de la escalera.

$h$ , es la huella del peldaño de la escalera.

$hp$ , es la altura del peldaño de la escalera.

$\theta$ , es el Angulo comprendido entre la horizontal y la inclinación.



Fundamentando que las dimensiones de huella, contrahuella y el espesor de la losa de la rampa de la escalera ya se obtuvo anteriormente, procedemos a calcular los valores de la base del tramo de corte correspondiente, el ángulo comprendido entre la horizontal y la inclinación y la altura del peldaño de la siguiente manera:

$$b = \sqrt{h^2 + ch^2}$$

$$b = \sqrt{30^2 + 16.67^2} \text{ cm}$$

$$b = 34.3203860701 \text{ cm}$$

$$\tan \theta = \frac{ch}{h}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{ch}{h} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{16.67 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} \right)$$

$$\theta = 29.0594686056^\circ$$

$$\sin \theta = \frac{hp}{h}$$

$$\sin(29.0594686056) = \frac{hp}{30 \text{ cm}}$$

$$hp = \sin(29.0594686056^\circ) * 30 \text{ cm}$$

$$hp = 14.5715144048 \text{ cm}$$

Una vez obtenidas estas dimensiones, procedemos a calcular la altura equivalente de la escalera procediendo con los pasos explicados a continuación:

1.- Se divide la figura completa en figuras geométricas simples como se muestra en la figura A.4, para calcular sus centroides  $\bar{Y}$  y su área correspondiente  $A$ , para así obtener el centroide de la figura completa  $\bar{Y}_{CG}$  y su área total  $A_T$

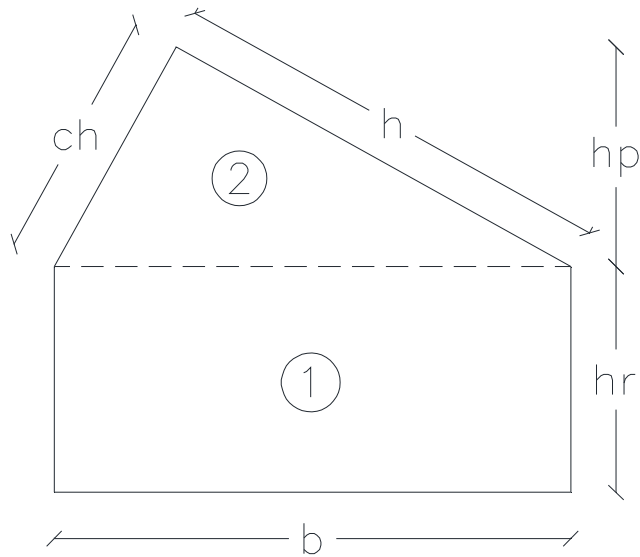


FIGURA A.4. DIVISIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Elaborado por: Andrés Salazar

Entonces para la figura número 1 tenemos que:

$$\bar{Y}_1 = \frac{hr}{2}$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{15 \text{ cm}}{2}$$

$$\bar{Y}_1 = 7.5 \text{ cm}$$

$$A_1 = hr * b$$

$$A_1 = 15 \text{ cm} * 34.3203860701 \text{ cm}$$

$$A_1 = 514.805791052 \text{ cm}^2$$

Para la figura número 2 tenemos lo siguiente:

$$\bar{Y}_2 = \frac{hp}{3}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{14.5715144048 \text{ cm}}{3}$$

$$\bar{Y}_2 = 4.85717146827 \text{ cm}$$

$$A_2 = \frac{b * hp}{2}$$

$$A_2 = \frac{34.3203860701 \text{ cm} * 14.5715144048 \text{ cm}}{2}$$

$$A_2 = 250.05 \text{ cm}^2$$

Con los datos obtenidos calculamos  $\overline{Y}_{CG}$ , de la siguiente manera:

$$\overline{Y}_{CG} = \frac{\sum A * \bar{Y}}{A_T}$$

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_T = 514.805791052 \text{ cm}^2 + 250.05 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 764.855791052 \text{ cm}^2$$

$$\overline{Y}_{CG} = \frac{(514.805791052 \text{ cm}^2 * 7.5 \text{ cm}) + (250.05 \text{ cm}^2 * 4.85717146827 \text{ cm})}{764.855791052 \text{ cm}^2}$$

$$\overline{Y}_{CG} = 11.5398605355 \text{ cm}$$

2.- Calculamos la inercia total de la figura  $I_T$ , para lo cual debemos calcular la inercia de cada figura geométrica simple y aplicar la siguiente ecuación.

$$I_T = \sum (I + A * d^2)$$

Donde:

$I_T$ , es la inercia total de la figura.

$I$ , es la inercia de cada figura geométrica simple.

$A$ , es el área de cada figura geométrica simple.

$d$ , es la distancia entre el  $\bar{Y}$  de cada figura geométrica simple y el  $\overline{Y}_{CG}$

Entonces, procedemos al cálculo:

$$I_1 = \frac{b * hr^3}{12}$$

$$I_1 = \frac{34.3203860701 \text{ cm} * (15 \text{ cm})^3}{12}$$

$$I_1 = 9652.60858225 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{b * hp^3}{12}$$

$$I_2 = \frac{34.3203860701 \text{ cm} * (14.5715144048 \text{ cm})^3}{12}$$

$$I_2 = 8848.81241058 \text{ cm}^4$$

$$A_1 = 514.805791052 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 250.05 \text{ cm}^2$$

$$d_1 = \overline{Y}_{CG} - \overline{Y}_1$$

$$d_1 = 11.5398605355 \text{ cm} - 7.5 \text{ cm}$$

$$d_1 = 4.0398605355 \text{ cm}$$

Para calcular  $d_2$ , debemos sumar el valor correspondiente a  $hr$ , ya que debe ser desde el origen de la figura completa, tal como se lo expresa a continuación:

$$d_2 = hr + \overline{Y}_2 - \overline{Y}_{CG}$$

$$d_2 = 15 \text{ cm} + 4.85717146827 \text{ cm} - 11.5398605355 \text{ cm}$$

$$d_2 = 8.3173109328 \text{ cm}$$

Con estos cálculos realizados procedemos a aplicarlos en la ecuación de  $I_T$ .

$$I_T = (I_1 + (A_1 * d_1^2)) + (I_2 + (A_2 * d_2^2))$$

$$I_T = (9652.60858225 \text{ cm}^4 + (514.805791052 \text{ cm}^2 * (4.0398605355 \text{ cm})^2)) \\ + (8848.81241058 \text{ cm}^4 + (250.05 \text{ cm}^2 * (8.3173109328 \text{ cm})^2))$$

$$I_T = 44201.1692526 \text{ cm}^4$$

3.- Calculamos la altura equivalente ( $h_{eq}$ ) de la escalera con la ecuación presentada a continuación:

$$h_{eq} = \sqrt[3]{\frac{I_T * 12}{b}}$$

$$h_{eq} = \sqrt[3]{\frac{44201.1692526 \text{ cm}^4 * 12}{34.3203860701 \text{ cm}}}$$

$$h_{eq} = 24.9088845525 \text{ cm}$$

Se obtuvo el valor de la altura equivalente de la escalera la cuál es de 24.9088845525 *cm*, pero se asume una altura equivalente de 25 *cm*.

## ANEXO 3

### Matriz de rigidez y condensación estática de la matriz

#### Primer modelo matemático

A continuación, se presenta el primer modelo matemático utilizado con sus respectivos cálculos numéricos y alfanuméricos respectivamente.

Se realizó el cálculo de la matriz de rigidez de la escalera por medio de dos métodos como son ensamblaje directo y por medio de la matriz de compatibilidad **A**.

#### Ensamblaje directo

El siguiente cálculo presentado corresponde al método de análisis de la estructura por ensamblaje directo.

Detalle de matrices a emplear en el cálculo:

Matriz de rigidez de elemento, considerando que en esta investigación se trabaja con elementos totalmente flexibles  $\mathbf{A}_0, I_0$  (se aplica también para elementos inclinados)

$$k_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & t & b & 0 & -t & b \\ 0 & b & k & 0 & -b & a \\ -r & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -t & -b & 0 & t & -b \\ 0 & b & a & 0 & -b & k \end{bmatrix}$$

Donde:

$$t = \frac{12EI}{L^3} \quad b = \frac{6EI}{L^2} \quad k = \frac{4EI}{L} \quad a = \frac{2EI}{L} \quad r = \frac{EA}{L}$$

$E$ , es el módulo de elasticidad del elemento analizado de la estructura.

$I$ , es la inercia del elemento analizado de la estructura.

$L$ , es la longitud del elemento analizado de la estructura.

Matriz de rotación  $\bar{\mathbf{T}}_{2-3}$

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$\theta$ , es el Angulo comprendido entre la superficie y el elemento analizado de la estructura.

Tomando en consideración las figuras A.5, A.6 y A.7, procedemos a los cálculos correspondientes para obtener la matriz de rigidez de la escalera:

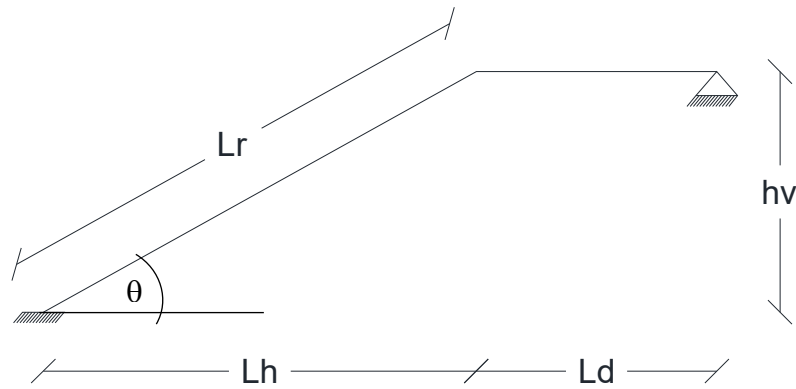


FIGURA A.5. ESQUEMA DE DIMENSIONES DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO, ENSAMBLAJE DIRECTO

Elaborado por: Andrés Salazar

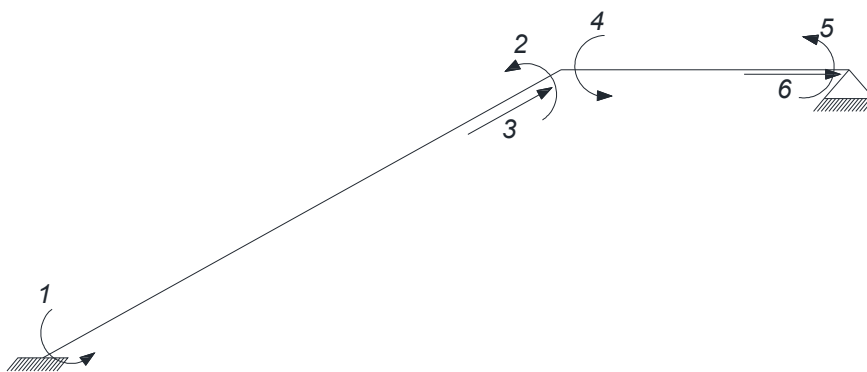


FIGURA A.6. SISTEMA  $\bar{P} - \bar{p}$  MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO, ENSAMBLAJE DIRECTO

Elaborado por: Andrés Salazar

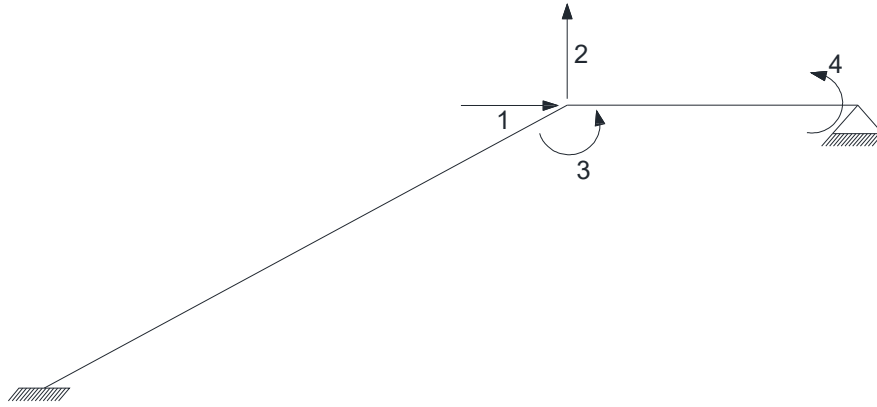


FIGURA A.7. SISTEMA  $\bar{Q} - \bar{p}$  MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO, ENSAMBLAJE DIRECTO

Elaborado por: Andrés Salazar

Se realizó el cálculo correspondiente, considerando que el elemento 1 es inclinado y el elemento 2 horizontal.

### ELEMENTO 1

$$V_C^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

$$T_{2-3}^- = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{Sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & -r_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & b_1 & 0 & -t_1 & b_1 \\ 0 & b_1 & k_1 & 0 & -b_1 & a_1 \\ -r_1 & 0 & 0 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & -t_1 & -b_1 & 0 & t & -b_1 \\ 0 & b_1 & a_1 & 0 & -b_1 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$T_{2-3}^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$k_3 = T_{2-3}^t * k_2 * T_{2-3}$$

Aplicando la ecuación, obtenemos la matriz de rigidez del elemento 1, la cual se presenta a continuación:

$$k_3 = \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & -b_1 \sin \theta & -r_1 \cos^2 \theta - t_1 \sin^2 \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -b_1 \sin \theta \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta & b_1 \cos \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -r_1 \sin^2 \theta - t_1 \cos^2 \theta & b_1 \cos \theta \\ -b_1 \sin \theta & b_1 \cos \theta & k_1 & b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & a_1 \\ -r_1 \cos^2 \theta - t_1 \sin^2 \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta \\ -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -r_1 \sin^2 \theta - t_1 \cos^2 \theta & -b_1 \cos \theta & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta & -b_1 \cos \theta \\ -b_1 \sin \theta & b_1 \cos \theta & a_1 & b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & k_1 \end{bmatrix}$$

A continuación, ubicamos los vectores de colocación para ensamblar la matriz de rigidez de la estructura completa, como se muestra de la siguiente manera:

$$\overline{k_3} = \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & -b_1 \sin \theta & -r_1 \cos^2 \theta - t_1 \sin^2 \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -b_1 \sin \theta & \mathbf{0} \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta & b_1 \cos \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -r_1 \sin^2 \theta - t_1 \cos^2 \theta & b_1 \cos \theta & \mathbf{0} \\ -b_1 \sin \theta & b_1 \cos \theta & k_1 & b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & a_1 & \mathbf{0} \\ -r_1 \cos^2 \theta - t_1 \sin^2 \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & \mathbf{1} \\ -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -r_1 \sin^2 \theta - t_1 \cos^2 \theta & -b_1 \cos \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta & -b_1 \cos \theta & \mathbf{2} \\ -b_1 \sin \theta & b_1 \cos \theta & a_1 & b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & k_1 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

## ELEMENTO 2

$$V_C^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4]$$

Este elemento como es horizontal, es decir, no tiene un Angulo de inclinación, no es necesario utilizar la matriz de rotación  $T_{2-3}$ , por lo cual tenemos lo siguiente:

$$k_3 = \begin{bmatrix} r_2 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & b_2 & 0 & -t_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & k_2 & 0 & -b_2 & a_2 \\ -r_2 & 0 & 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & -t_2 & -b_2 & 0 & t & -b_2 \\ 0 & b_2 & a_2 & 0 & -b_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

A continuación, ubicamos los vectores de colocación para ensamblar la matriz de rigidez de la estructura completa, como se muestra de la siguiente manera:

$$k_3 = \begin{bmatrix} r_2 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & b_2 & 0 & -t_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & k_2 & 0 & -b_2 & a_2 \\ -r_2 & 0 & 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & -t_2 & -b_2 & 0 & t & -b_2 \\ 0 & b_2 & a_2 & 0 & -b_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$

### Ensamblaje de la matriz

Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura completa, según los vectores de colocación ubicados en cada matriz de rigidez de elemento

$$K = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2 & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta + 0 & b_1 \sin \theta + 0 & 0 \\ \hline r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta + 0 & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & b_2 \\ \hline b_1 \sin \theta + 0 & -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_2 \\ \hline 0 & b_2 & a_2 & k_2 \\ \hline \end{array}$$

Obteniendo una matriz de rigidez de la estructura de 4 filas y 4 columnas, la cual se presenta a continuación:

$$K = \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2 & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & 0 \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & b_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_2 \\ 0 & b_2 & a_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

### Método de la matriz de compatibilidad (A)

La matriz de compatibilidad  $A$ , es aquella que transforma los desplazamientos de una estructura en deformaciones, teniendo un orden que será de  $m \times n$ , siendo que  $m$  es el número de filas que es igual a las coordenadas del sistema  $\mathbf{P} - \mathbf{p}$  y  $n$  el número de columnas que es igual a las coordenadas del sistema  $\mathbf{Q} - \mathbf{q}$ , es decir, que cada elemento que conforma la matriz de compatibilidad  $A$ , representa al coeficiente de influencia de las deformaciones, para los desplazamientos. (Aguilar, 2004)

Fundamentando que en esta investigación se utilizó elementos totalmente flexibles  $\mathbf{A}_0, I_0$ , para calcular los elementos que conforman la matriz  $A$ , se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

Para calcular la matriz de rigidez por este método se estipula la ecuación presentada a continuación:

$$K = A^t k A$$

Donde:

$K$ , es la matriz de rigidez de la estructura.

$A$ , es la matriz de compatibilidad.

$A^t$ , es la transposición de la matriz de compatibilidad.

$k$ , es la matriz conformada por las matrices de rigidez accedidas por cada uno de los elementos de la estructura colocados en diagonal.

La forma de la matriz de compatibilidad  $A$  que constituye la ecuación mostrada para esta investigación es:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{bmatrix}$$

La forma de la matriz  $k$  que consta en la ecuación manifestada para esta investigación es:

$$k = \begin{bmatrix} k^{(1)} & 0 \\ 0 & k^{(2)} \end{bmatrix}$$

Sabiendo, que la matriz  $k$  correspondiente para cada elemento que conforma la estructura, por ser para elementos totalmente flexibles se estructuran de la siguiente manera:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Considerando todos estos antecedentes expuestos, procedemos al cálculo correspondiente de la matriz de rigidez  $K$ , por medio de la matriz  $A$ .

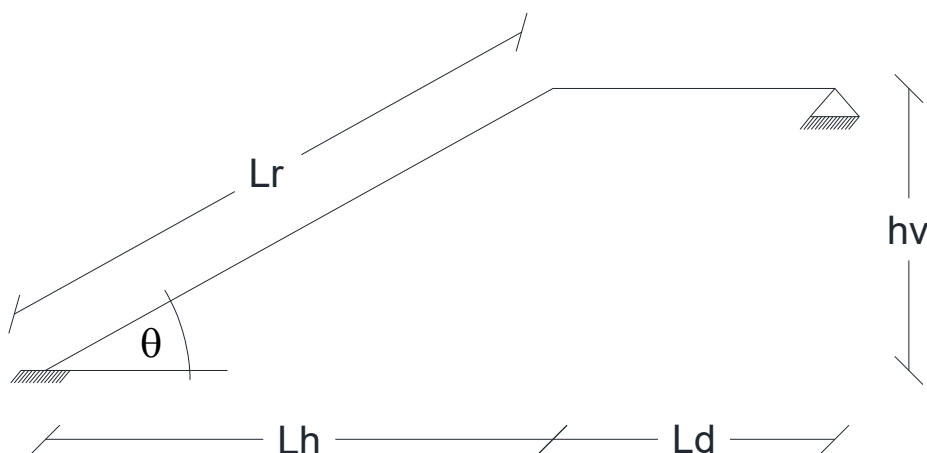


FIGURA A.8. ESQUEMA DE DIMENSIONES DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD  $A$

Elaborado por: Andrés Salazar

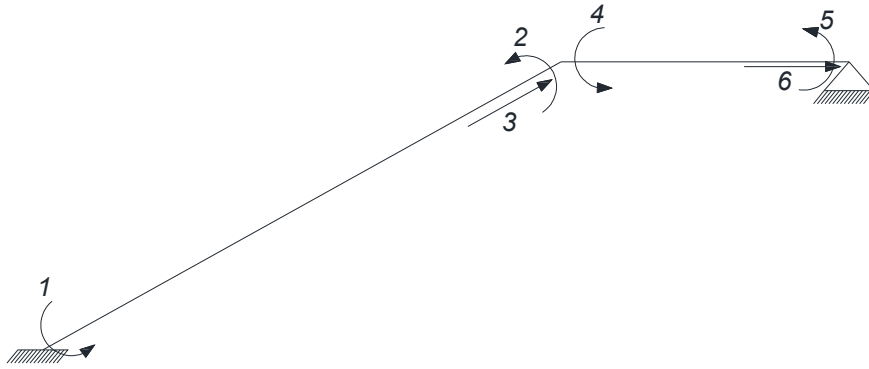


FIGURA A.9. SISTEMA  $\bar{P} - \bar{p}$  MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

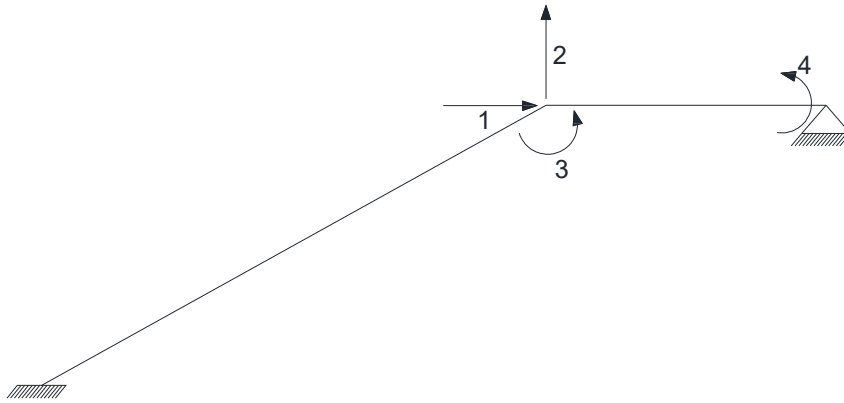


FIGURA A.10. SISTEMA  $\bar{Q} - \bar{q}$  MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

**Primera columna de A**

$$q_1 = 1 \quad \wedge \quad q_i = 0 \quad ; \quad i \neq 1$$

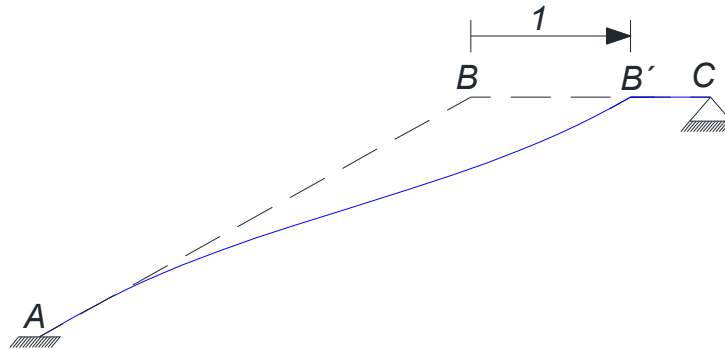


FIGURA A.11. DEFORMADA ELEMENTAL  $q_1$ , MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

$$\mu_2 = \cos\theta \quad ; \quad v_2 = -\text{sen}\theta$$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_1 = -\frac{-\text{sen}\theta - 0}{Lr}$$

$$p_1 = \frac{\text{Sen}\theta}{Lr}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_2 = 0 - \frac{-\text{sen}\theta - 0}{Lr}$$

$$p_2 = \frac{\text{Sen}\theta}{Lr}$$

$$p_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_3 = \cos\theta - 0$$

$$p_3 = \cos\theta$$

$$p_4 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_4 = 0 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_4 = 0$$

$$p_5 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_5 = 0 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_5 = 0$$

$$p_6 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_6 = 0 - 1$$

$$p_6 = -1$$

**Segunda columna de A**

$$q_2 = 1 \quad \wedge \quad q_i = 0 \quad ; \quad i \neq 2$$

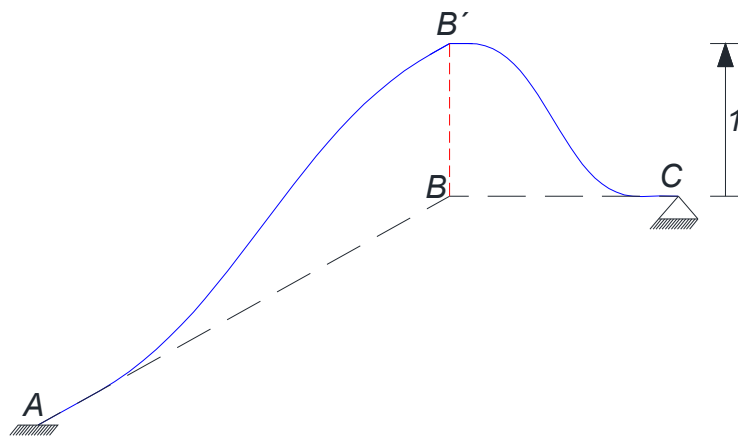


FIGURA A.12. DEFORMADA ELEMENTAL  $q_2$ , MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO. MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

$$\mu_2 = \text{sen}\theta \quad ; \quad v_2 = \text{cos}\theta$$



$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_1 = 0 - \frac{\cos\theta - 0}{Lr}$$

$$p_1 = -\frac{\cos\theta}{Lr}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_2 = 0 - \frac{\cos\theta - 0}{Lr}$$

$$p_2 = -\frac{\cos\theta}{Lr}$$

$$p_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_3 = \rho_3 = \text{sen}\theta - 0$$

$$p_3 = \text{sen}\theta$$

$$p_4 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_4 = 0 - \frac{0 - 1}{Ld}$$

$$p_4 = \frac{1}{Ld}$$

$$p_5 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_5 = 0 - \frac{0 - 1}{Ld}$$

$$p_5 = \frac{1}{Ld}$$

$$p_6 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_6 = 0 - 0$$

$$p_6 = 0$$

### Tercera columna de A

$$q_3 = 1 \wedge q_i = 0 \quad ; \quad i \neq 0$$

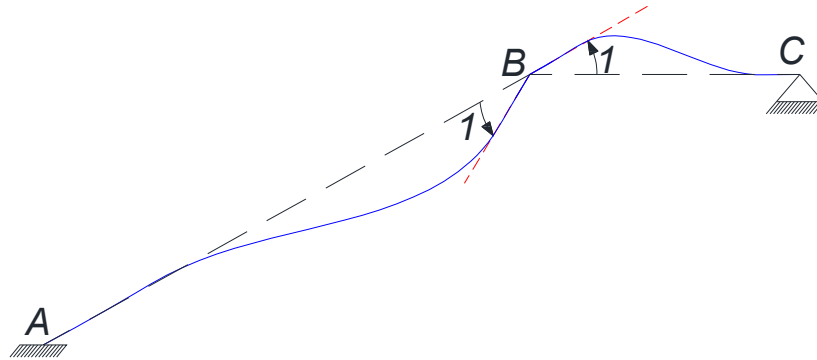


FIGURA A.13. DEFORMADA ELEMENTAL  $q_3$ , MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_1 = 0 - \frac{0 - 0}{Lr}$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_2 = 1 - \frac{0 - 0}{Lr}$$

$$p_2 = 1$$

$$p_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_3 = 0 - 0$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_4 = 1 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_4 = 1$$

$$p_5 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_5 = 0 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_5 = 0$$

$$p_6 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_6 = 0 - 0$$

$$p_6 = 0$$

**Cuarta columna de A**

$$q_4 = 1 \wedge q_i = 0 \quad ; \quad i \neq 0$$

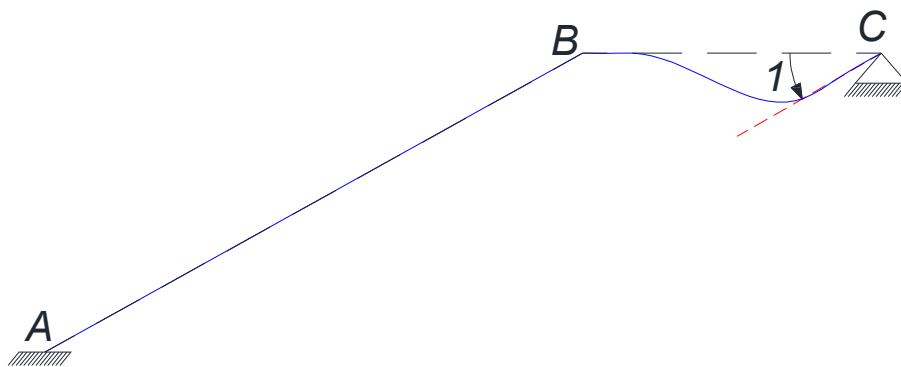


FIGURA A.14. DEFORMADA ELEMENTAL  $q_4$ , MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_1 = 0 - \frac{0 - 0}{Lr}$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_2 = 0 - \frac{0 - 0}{Lr}$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_3 = 0 - 0$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_4 = 0 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_4 = 0$$

$$p_5 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_5 = 1 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_5 = 1$$

$$p_6 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_6 = 0 - 0$$

$$p_6 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}\theta}{Lr} & -\frac{\text{cos}\theta}{Lr} & 0 & 0 \\ \frac{\text{sen}\theta}{Lr} & -\frac{\text{cos}\theta}{Lr} & 1 & 0 \\ \text{cos}\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ld} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ld} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{Lr} & \frac{2EI}{Lr} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{Lr} & \frac{4EI}{Lr} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{Lr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{Ld} & \frac{2EI}{Ld} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{Ld} & \frac{4EI}{Ld} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{Ld} \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}\theta}{Lr} & \frac{\text{sen}\theta}{Lr} & \text{cos}\theta & 0 & 0 & -1 \\ \text{cos}\theta & -\frac{\text{cos}\theta}{Lr} & \text{sen}\theta & \frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidas las matrices que son componentes de la ecuación, se la aplica y se obtiene la matriz de rigidez, la cual se detalla a continuación:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1 \cos^2 \theta}{Lr} + \frac{E_2 A_2}{Ld} + \frac{12 E_1 I_1 \sin^2 \theta}{Lr^3} + \frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & 0 \\ \frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} \\ -\frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} \\ 0 & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} & \frac{4 E_2 I_2}{Ld} \end{bmatrix}$$

### Condensación estática de la matriz de rigidez de la estructura

Ubicamos la colocación de filas y columnas en la matriz de la siguiente manera:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1 \cos^2 \theta}{Lr} + \frac{E_2 A_2}{Ld} + \frac{12 E_1 I_1 \sin^2 \theta}{Lr^3} + \frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & 0 \\ \frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} \\ -\frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} \\ 0 & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} & \frac{4 E_2 I_2}{Ld} \end{bmatrix}$$

Para realizar la condensación estática de la estructura y obtener la matriz de rigidez lateral de la misma, aplicamos la siguiente ecuación:

$$K_L = K_{AA} - K_{AB} * K_{BB}^{-1} * K_{BA}$$

$$K_{AA} = \left[ \frac{E_1 A_1 \cos^2 \theta}{Lr} + \frac{E_2 A_2}{Ld} + \frac{12 E_1 I_1 \sin^2 \theta}{Lr^3} \right]$$

$$K_{AB} = \left[ -\frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} \quad \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} \quad 0 \right]$$

$$K_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1 \sin^2 \theta}{Lr} + \frac{12 E_1 I_1 \cos^2 \theta}{Lr^3} + \frac{12 E_2 I_2}{Ld^3} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} \\ \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{4 E_1 I_1}{Lr} + \frac{4 E_2 I_2}{Ld} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} \\ \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} & \frac{4 E_2 I_2}{Ld} \end{bmatrix}$$

$$K_{BA} = \begin{bmatrix} -\frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} \\ \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos el cálculo de la matriz de rigidez lateral ( $K_L$ ) con la ecuación y obtenemos la matriz de rigidez lateral.

### Condensación estática de la matriz de rigidez de la estructura

Para realizar la condensación estática de la estructura y obtener la matriz de rigidez lateral de la misma, aplicamos la siguiente expresión:

$$K_L = K_{AA} - K_{AB} * K_{BB}^{-1} * K_{BA}$$

Ubicamos la colocación de filas y columnas en la matriz de la siguiente manera:

$$K = \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2 & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & 0 & & \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & b_2 & & \\ & b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta + b_2 & & k_1 + k_2 & a_2 \\ & 0 & b_2 & & a_2 & k_2 \end{array} \right]$$

$$K_{AA} = [r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2]$$

$$K_{AB} = [r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta \quad b_1 \sin \theta \quad 0]$$

$$K_{BB} = \begin{bmatrix} r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & b_2 \\ -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_2 \\ b_2 & a_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$K_{BA} = \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta \\ b_1 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos el cálculo de la matriz de rigidez lateral ( $K_L$ ) con la ecuación presentada anteriormente y obtenemos la matriz de rigidez lateral.

### Segundo modelo matemático

A continuación, se presenta el primer modelo matemático utilizado con sus respectivos cálculos numéricos y alfanuméricos respectivamente.

Se realizó el cálculo de la matriz de rigidez de la escalera por medio de dos métodos como son ensamblaje directo y por medio de la matriz de compatibilidad  $A$ .

### Ensamblaje directo

El siguiente cálculo presentado corresponde al método de análisis de la estructura por ensamblaje directo.

Detalle de matrices a emplear en el cálculo:

Matriz de rigidez de elemento, considerando que en esta investigación se trabaja con elementos totalmente flexibles  $A_0, I_0$  (se aplica también para elementos inclinados)

$$k_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & t & b & 0 & -t & b \\ 0 & b & k & 0 & -b & a \\ -r & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -t & -b & 0 & t & -b \\ 0 & b & a & 0 & -b & k \end{bmatrix}$$

Donde:

$$t = \frac{12EI}{L^3} \quad b = \frac{6EI}{L^2} \quad k = \frac{4EI}{L} \quad a = \frac{2EI}{L} \quad r = \frac{EA}{L}$$



$E$ , es el módulo de elasticidad del elemento analizado de la estructura.

$I$ , es la inercia del elemento analizado de la estructura.

$L$ , es la longitud del elemento analizado de la estructura.

Matriz de rotación  $\bar{T}_{2-3}$

$$T_{2-3} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$\theta$ , es el ángulo comprendido entre la superficie y el elemento analizado de la estructura.

Tomando en consideración las figuras A.15, A.16 y A.17, procedemos a los cálculos correspondientes para calcular la matriz de rigidez de la escalera:

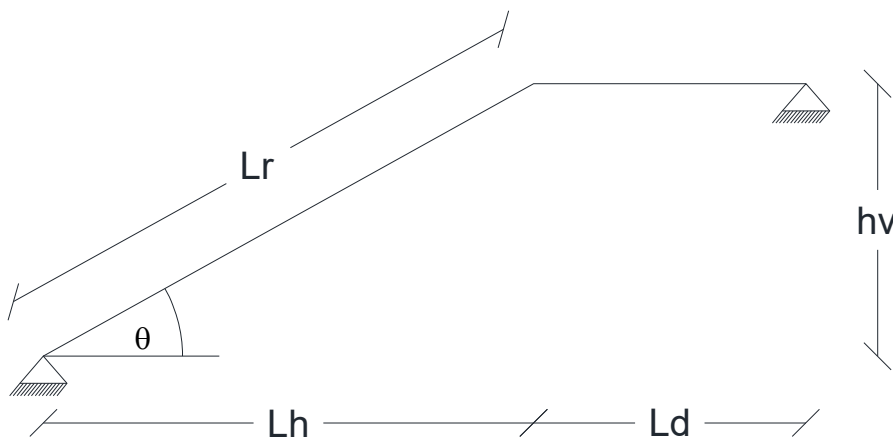


FIGURA A.15. ESQUEMA DE DIMENSIONES DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, ENSAMBLAJE DIRECTO

Elaborado por: Andrés Salazar

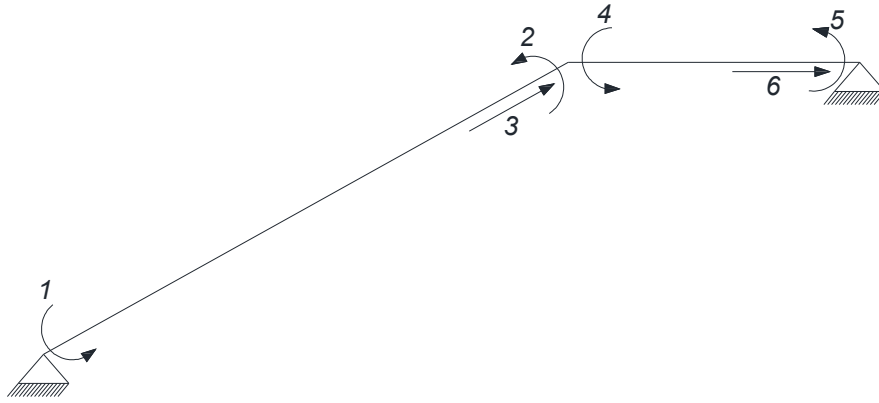


FIGURA A.16. SISTEMA  $\bar{P} - \bar{p}$  MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, ENSAMBLAJE DIRECTO

Elaborado por: Andrés Salazar

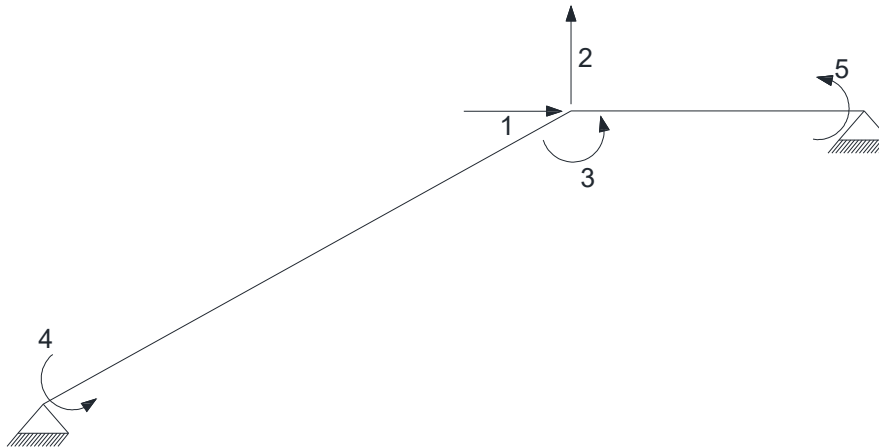


FIGURA A.17. SISTEMA  $\bar{Q} - \bar{p}$  MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, ENSAMBLAJE DIRECTO

Elaborado por: Andrés Salazar

Se realizó el cálculo correspondiente, considerando que el elemento 1 es el elemento inclinado y el elemento 2 el horizontal.

### ELEMENTO 1

$$V_C^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

$$T_{2-3}^- = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{Sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & -r_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & b_1 & 0 & -t_1 & b_1 \\ 0 & b_1 & k_1 & 0 & -b_1 & a_1 \\ -r_1 & 0 & 0 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & -t_1 & -b_1 & 0 & t & -b_1 \\ 0 & b_1 & a_1 & 0 & -b_1 & k_1 \end{bmatrix}$$

$$T_{2-3}^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la expresión  $k_3 = T_{2-3}^t * k_2 * T_{2-3}^-$  obtenemos la matriz de rigidez del elemento 1, la cual se presenta a continuación:

$$k_3 = \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & -b_1 \sin \theta & -r_1 \cos^2 \theta - t_1 \sin^2 \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -b_1 \sin \theta \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta & b_1 \cos \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -r_1 \sin^2 \theta - t_1 \cos^2 \theta & b_1 \cos \theta \\ -b_1 \sin \theta & b_1 \cos \theta & k_1 & b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & a_1 \\ -r_1 \cos^2 \theta - t_1 \sin^2 \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta \\ -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -r_1 \sin^2 \theta - t_1 \cos^2 \theta & -b_1 \cos \theta & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta & -b_1 \cos \theta \\ -b_1 \sin \theta & b_1 \cos \theta & a_1 & b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & k_1 \end{bmatrix}$$

A continuación, ubicamos los vectores de colocación para ensamblar la matriz de rigidez de la estructura completa, como se muestra de la siguiente manera:

$$\overline{k}_3 = \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & -b_1 \sin \theta & -r_1 \cos^2 \theta - t_1 \sin^2 \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -b_1 \sin \theta & \mathbf{0} \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta & b_1 \cos \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -r_1 \sin^2 \theta - t_1 \cos^2 \theta & b_1 \cos \theta & \mathbf{0} \\ -b_1 \sin \theta & b_1 \cos \theta & k_1 & b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & a_1 & \mathbf{4} \\ -r_1 \cos^2 \theta - t_1 \sin^2 \theta & -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & \mathbf{1} \\ -r_1 \cos \theta \sin \theta + t_1 \cos \theta \sin \theta & -r_1 \sin^2 \theta - t_1 \cos^2 \theta & -b_1 \cos \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta & -b_1 \cos \theta & \mathbf{2} \\ -b_1 \sin \theta & b_1 \cos \theta & a_1 & b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & k_1 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

## ELEMENTO 2

$$V_C^{(2)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4]$$

Este elemento como es horizontal, es decir, no tiene un Angulo de inclinación, no es necesario utilizar la matriz de rotación  $T_{2-3}$ , por lo cual tenemos lo siguiente:

$$k_3 = \begin{bmatrix} r_2 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & b_2 & 0 & -t_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & k_2 & 0 & -b_2 & a_2 \\ -r_2 & 0 & 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & -t_2 & -b_2 & 0 & t & -b_2 \\ 0 & b_2 & a_2 & 0 & -b_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

A continuación, ubicamos los vectores de colocación para ensamblar la matriz de rigidez de la estructura completa, como se muestra de la siguiente manera:

$$k_3 = \begin{bmatrix} r_2 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & b_2 & 0 & -t_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & k_2 & 0 & -b_2 & a_2 \\ -r_2 & 0 & 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & -t_2 & -b_2 & 0 & t & -b_2 \\ 0 & b_2 & a_2 & 0 & -b_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{5} \end{matrix}$$

### Ensamblaje de la matriz

Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura completa, según los vectores de colocación ubicados en cada matriz de rigidez de elemento.

$r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2$	$r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta + 0$	$b_1 \sin \theta + 0$	$b_1 \sin \theta + 0$	$b_1 \sin \theta + 0$
$r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta + 0$	$r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2$	$-b_1 \cos \theta + b_2$	$-b_1 \cos \theta + 0$	$b_2$
$b_1 \sin \theta + 0$	$-b_1 \cos \theta + b_2$	$k_1 + k_2$	$a_1$	$a_2$
$b_1 \sin \theta + 0$	$-b_1 \cos \theta + 0$	$a_1$	$k_1$	$0$
$0$	$b_2$	$a_2$	$0$	$k_2$

Obteniendo una matriz de rigidez de la estructura de 5 filas y 5 columnas, la cual se presenta a continuación:

$$K = \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2 & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & b_1 \sin \theta & 0 \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & -b_1 \cos \theta & b_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_1 & a_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & a_1 & k_1 & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

### Condensación estática de la matriz de rigidez de la estructura

Para realizar la condensación estática de la estructura y obtener la matriz de rigidez lateral de la misma, aplicamos la siguiente expresión:

$$K_L = K_{AA} - K_{AB} * K_{BB}^{-1} * K_{BA}$$

Ubicamos la colocación de filas y columnas en la matriz de la siguiente manera:

$$K = \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} \left[ \begin{array}{cc|cccc} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2 & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & b_1 \sin \theta & 0 \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & -b_1 \cos \theta & b_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_1 & a_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & a_1 & k_1 & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & 0 & k_2 \end{array} \right]$$

Obtenemos las siguientes sub matrices para emplear en la expresión mencionada:

$$K_{AA} = [r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2]$$

$$K_{AB} = [r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta \quad b_1 \sin \theta \quad b_1 \sin \theta \quad 0]$$

$$K_{BB} = \begin{bmatrix} r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & -b_1 \cos \theta & b_2 \\ -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_1 & a_2 \\ -b_1 \cos \theta & a_1 & k_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$K_{BA} = \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta \\ b_1 \sin \theta \\ b_1 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos el cálculo de la matriz de rigidez lateral ( $K_L$ ) con la expresión expuesta anteriormente y obtendríamos la matriz de rigidez lateral.

### Método de la matriz de compatibilidad ( $A$ )

La matriz de compatibilidad  $A$ , es aquella que transforma los desplazamientos de una estructura en deformaciones, teniendo un orden que será de  $m \times n$ , siendo que  $m$  es el número de filas que es igual a las coordenadas del sistema  $\mathbf{P} - \mathbf{p}$  y  $n$  el número de columnas que es igual a las coordenadas del sistema  $\mathbf{Q} - \mathbf{q}$ , es decir, que cada elemento que conforma la matriz de compatibilidad  $A$ , representa al coeficiente de influencia de las deformaciones, para los desplazamientos.

Fundamentando que en esta investigación se utilizó elementos totalmente flexibles  $\mathbf{A}_0, I_0$ , para calcular los elementos que conforman la matriz  $A$ , se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$p_3 = u_2 - u_1$$

Para calcular la matriz de rigidez por este método se estipula la ecuación presentada a continuación:

$$K = A^t k A$$

Donde:

$K$ , es la matriz de rigidez de la estructura.

$A$ , es la matriz de compatibilidad.

$A^t$ , es la transposición de la matriz de compatibilidad.

$k$ , es la matriz conformada por las matrices de rigidez accedidas por cada uno de los elementos de la estructura colocados en diagonal.

La forma de la matriz de compatibilidad  $A$  que constituye la ecuación mostrada para esta investigación es:

$$A = \begin{bmatrix} -A^{(1)} & - \\ & A^{(2)} \end{bmatrix}$$

La forma de la matriz  $k$  que consta en la ecuación manifestada para esta investigación es:

$$k = \begin{bmatrix} k^{(1)} & 0 \\ 0 & k^{(2)} \end{bmatrix}$$

Sabiendo, que la matriz  $k$  correspondiente para cada elemento que conforma la estructura, por ser para elementos totalmente flexibles se estructuran de la siguiente manera:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Considerando todos estos antecedentes expuestos, procedemos al cálculo correspondiente de la matriz de rigidez  $K$ , por medio de la matriz  $A$ .

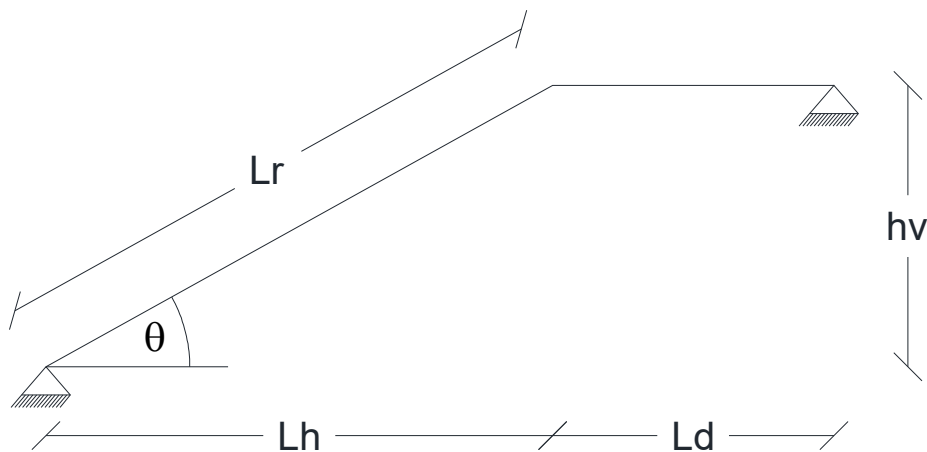


FIGURA A.18. ESQUEMA DE DIMENSIONES DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar



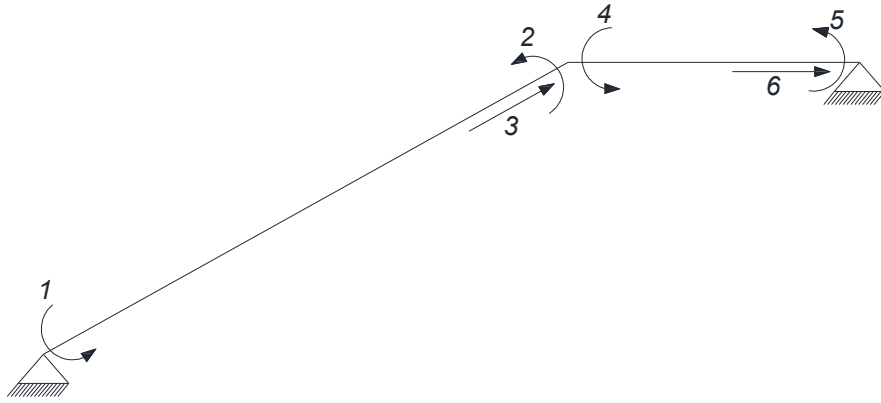


FIGURA A.19. SISTEMA  $\bar{P} - \bar{p}$  MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

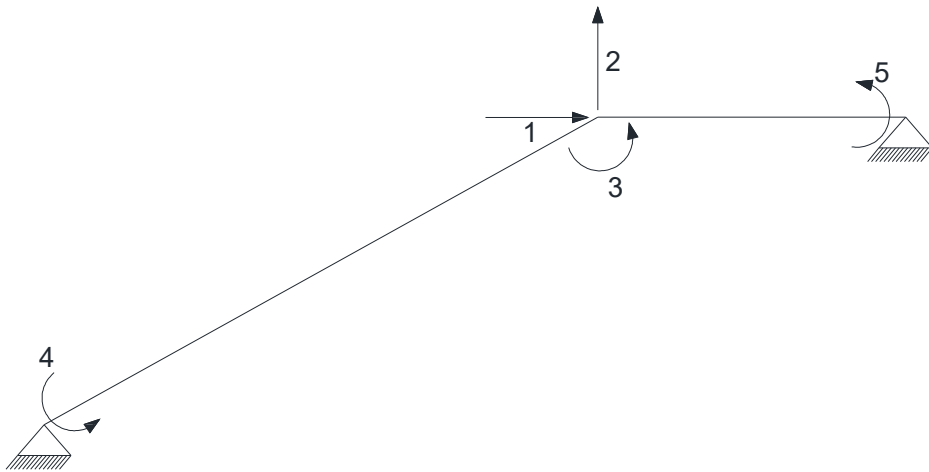


FIGURA A.20. SISTEMA  $\bar{Q} - \bar{q}$  MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD

Elaborado por: Andrés Salazar

**Primera columna de A**

$$q_1 = 1 \wedge q_i = 0 \quad ; \quad i \neq 1$$

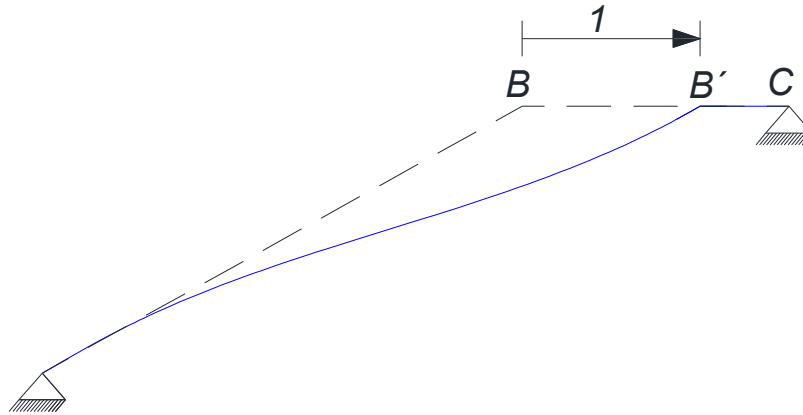


FIGURA A.21. DEFORMADA ELEMENTAL  $q_1$ , MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

$$\mu_2 = \cos\theta \quad ; \quad v_2 = -\text{sen}\theta$$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_1 = -\frac{-\text{sen}\theta - 0}{Lr}$$

$$p_1 = \frac{\text{Sen}\theta}{Lr}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_2 = 0 - \frac{-\text{sen}\theta - 0}{Lr}$$

$$p_2 = \frac{\text{Sen}\theta}{Lr}$$

$$p_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_3 = \cos\theta - 0$$

$$p_3 = \cos\theta$$

$$p_4 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_4 = 0 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_4 = 0$$

$$p_5 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_5 = 0 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_5 = 0$$

$$p_6 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_6 = 0 - 1$$

$$p_6 = -1$$

**Segunda columna de A**

$$q_2 = 1 \wedge q_i = 0 \quad ; \quad i \neq 2$$

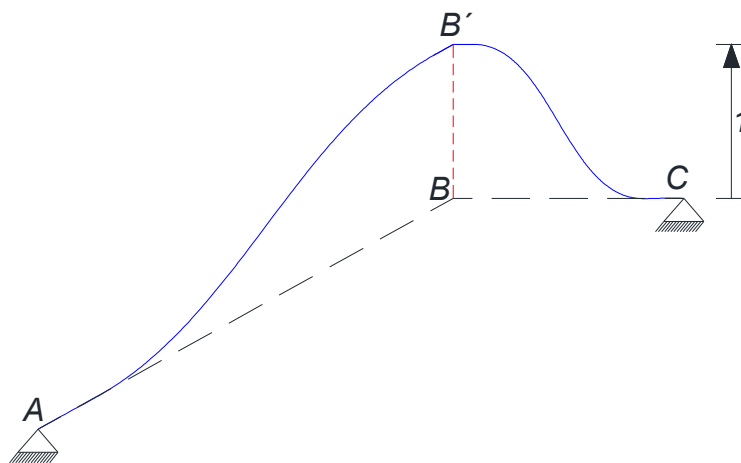


FIGURA A.22. DEFORMADA ELEMENTAL  $q_2$ , MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

$$\mu_2 = \text{sen}\theta \quad ; \quad v_2 = \text{cos}\theta$$

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_1 = 0 - \frac{\text{cos}\theta - 0}{Lr}$$

$$p_1 = -\frac{\text{cos}\theta}{Lr}$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_2 = 0 - \frac{\text{cos}\theta - 0}{Lr}$$

$$p_2 = -\frac{\text{cos}\theta}{Lr}$$

$$p_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_3 = \rho_3 = \text{sen}\theta - 0$$

$$p_3 = \text{sen}\theta$$

$$p_4 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_4 = 0 - \frac{0 - 1}{Ld}$$

$$p_4 = \frac{1}{Ld}$$

$$p_5 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_5 = 0 - \frac{0 - 1}{Ld}$$

$$p_5 = \frac{1}{Ld}$$

$$p_6 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_6 = 0 - 0$$

$$p_6 = 0$$

### Tercera columna de A

$$q_3 = 1 \wedge q_i = 0 \quad ; \quad i \neq 0$$

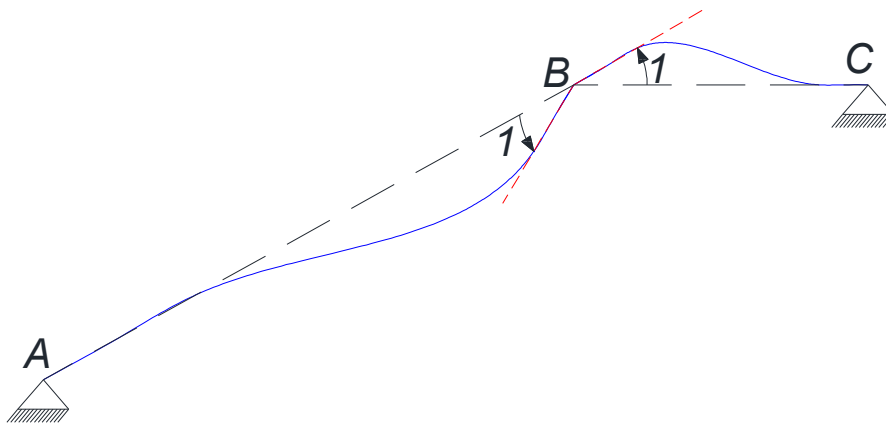


FIGURA A.23. DEFORMADA ELEMENTAL  $q_3$ , MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_1 = 0 - \frac{0 - 0}{Lr}$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_2 = 1 - \frac{0 - 0}{Lr}$$

$$p_2 = 1$$

$$p_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_3 = 0 - 0$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_4 = 1 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_4 = 1$$

$$p_5 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_5 = 0 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_5 = 0$$

$$p_6 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_6 = 0 - 0$$

$$p_6 = 0$$

**Cuarta columna de A**

$$q_4 = 1 \wedge q_i = 0 \quad ; \quad i \neq 4$$

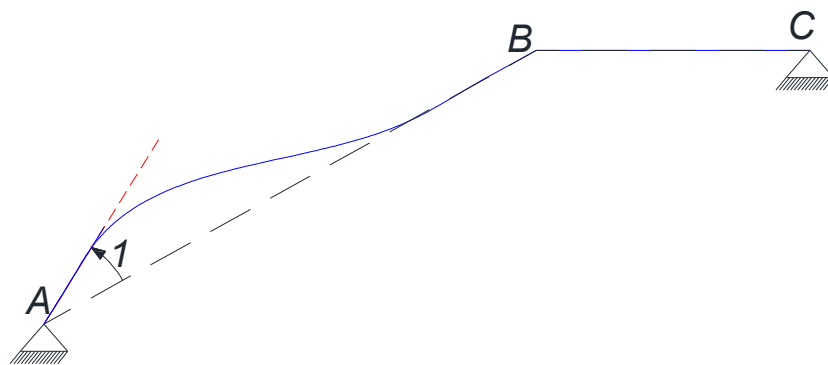


FIGURA A.24. DEFORMADA ELEMENTAL  $q_4$ , MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L_1}$$

$$p_1 = 1 - \frac{0 - 0}{L_1}$$

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L_1}$$

$$p_2 = 0 - \frac{0 - 0}{L_1}$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_3 = 0 - 0$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{L_2}$$

$$p_4 = 0 - \frac{0 - 0}{L_2}$$

$$p_4 = 0$$

$$p_5 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{L_2}$$

$$p_5 = 0 - \frac{0 - 0}{L_2}$$

$$p_5 = 0$$

$$p_6 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_6 = 0 - 0$$

$$p_6 = 0$$

**Quinta columna de A**

$$q_5 = 1 \quad q_i = 0 \quad ; \quad i \neq 0$$

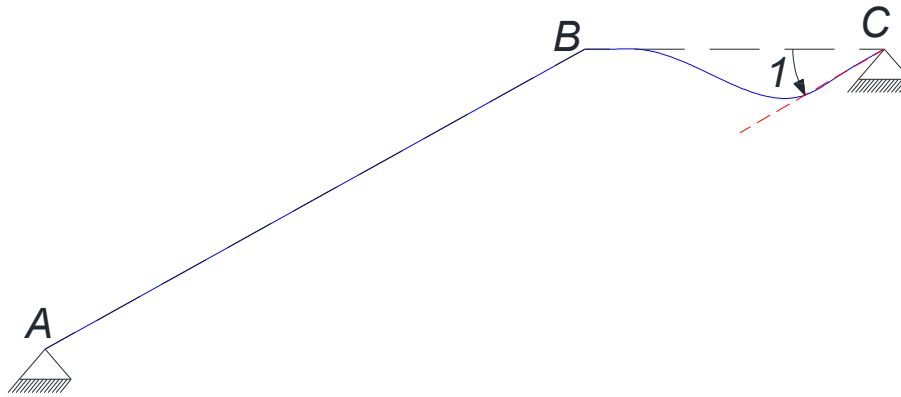


FIGURA A.25. DEFORMADA ELEMENTAL  $q_5$ , MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO, MATRIZ DE COMPATIBILIDAD A

Elaborado por: Andrés Salazar

$$p_1 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_1 = 0 - \frac{0 - 0}{Lr}$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Lr}$$

$$p_2 = 0 - \frac{0 - 0}{Lr}$$

$$p_2 = 0$$

$$p_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_3 = 0 - 0$$

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$



$$p_4 = 0 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_4 = 0$$

$$p_5 = \theta_2 - \frac{v_2 - v_1}{Ld}$$

$$p_5 = 1 - \frac{0 - 0}{Ld}$$

$$p_5 = 1$$

$$p_6 = \mu_2 - \mu_1$$

$$p_6 = 0 - 0$$

$$p_6 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}\theta}{Lr} & -\frac{\text{cos}\theta}{Lr} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\text{sen}\theta}{Lr} & -\frac{\text{cos}\theta}{Lr} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\text{cos}\theta}{Lr} & \frac{\text{sen}\theta}{Lr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ld} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ld} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{Lr} & \frac{2EI}{Lr} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{Lr} & \frac{4EI}{Lr} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{Lr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{Ld} & \frac{2EI}{Ld} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{Ld} & \frac{4EI}{Ld} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{Ld} \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} \frac{\text{sen}\theta}{Lr} & \frac{\text{sen}\theta}{Lr} & \text{cos}\theta & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\text{cos}\theta}{Lr} & -\frac{\text{cos}\theta}{Lr} & \text{sen}\theta & \frac{1}{Ld} & \frac{1}{Ld} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Para realizar la condensación estática de la estructura y obtener la matriz de rigidez lateral de la misma, aplicamos la siguiente expresión:

$$K_L = K_{AA} - K_{AB} * K_{BB}^{-1} * K_{BA}$$

$$K_{AA} = \left[ \frac{E_1 A_1 \cos^2 \theta}{Lr} + \frac{E_2 A_2}{Ld} + \frac{12 E_1 I_1 \sin^2 \theta}{Lr^3} \right]$$

$$K_{AB} = \left[ -\frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} \quad \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} \quad \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} \quad 0 \right]$$

$$K_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1 \sin^2 \theta}{Lr} + \frac{12 E_1 I_1 \cos^2 \theta}{Lr^3} + \frac{12 E_2 I_2}{Ld^3} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & -\frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} \\ \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{4 E_1 I_1}{Lr} + \frac{4 E_2 I_2}{Ld} & \frac{2 E_1 I_1}{Lr} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} \\ -\frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{2 E_1 I_1}{Lr} & \frac{4 E_1 I_1}{Lr} & 0 \\ \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} & 0 & \frac{4 E_2 I_2}{Ld} \end{bmatrix}$$

$$K_{BA} = \begin{bmatrix} -\frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} \\ \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} \\ \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos el cálculo de la matriz de rigidez lateral ( $K_L$ ) con la expresión expuesta anteriormente y obtendríamos la matriz de rigidez lateral.

## Comprobación del primer modelo matemático

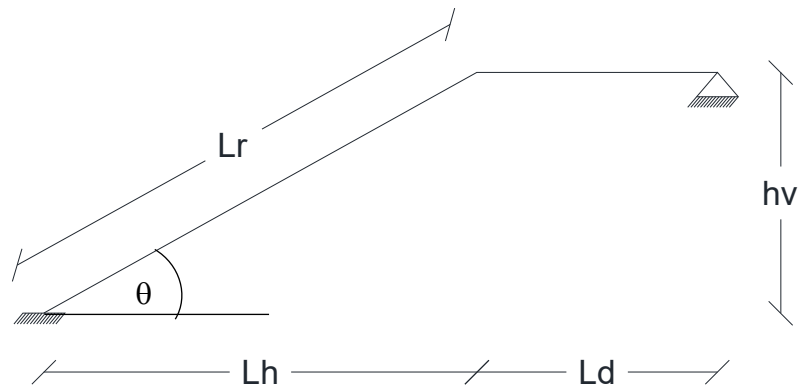


FIGURA A.26. ESQUEMA DE DIMENSIONES DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Conociendo los siguientes datos donde:

$Lr$ , es la longitud de la rampa de la escalera.

$Lh$ , es la longitud horizontal de la rampa de la escalera.

$Ld$ , es la longitud contemplada del descanso.

$hv$ , es la altura de la rampa de la escalera.

$E_1$ , es el módulo de elasticidad del elemento inclinado de la estructura.

$E_2$ , es el módulo de elasticidad del elemento horizontal de la estructura.

$A_1$ , es el área transversal del elemento inclinado de la estructura.

$A_2$ , es el área transversal del elemento horizontal de la estructura.

$I_1$ , es la inercia del elemento inclinado de la estructura.

$I_2$ , es la inercia del elemento inclinado de la estructura.

Adicional a estos tenemos el ancho de paso de la escalera ( $a_p$ ) y la altura equivalente ( $h_{eq}$ ), datos que nos sirven para calcular el área transversal y la inercia de los elementos de la

estructura para utilizarlos dentro de los cálculos respectivos de la matriz de rigidez y por consecuencia la matriz de rigidez lateral de la estructura.

Los datos respectivos son los siguientes:

$$Lr = 3.0886890423 \text{ m}$$

$$Lh = 2.70 \text{ m}$$

$$Ld = 1.50 \text{ m}$$

$$hv = 1.50 \text{ m}$$

$$a_p = 1.50 \text{ m}$$

$$h_{eq} = 25 \text{ cm}$$

$$E_1 = 2'100.000 \frac{T}{m^2}$$

$$E_2 = 2'100.000 \frac{T}{m^2}$$

$$A_1 = a_p * h_{eq}$$

$$A_1 = 1.50 \text{ m} * 0.25 \text{ m}$$

$$A_1 = 0.375 \text{ m}$$

$$A_2 = a_p * h_{eq}$$

$$A_2 = 1.50 \text{ m} * 0.25 \text{ m}$$

$$A_2 = 0.375 \text{ m}$$

$$I_1 = \frac{a_p * h_{eq}^3}{12}$$

$$I_1 = \frac{1.50 \text{ m} * (0.25 \text{ m})^3}{12}$$

$$I_1 = 0.001953125 \text{ m}^4$$

$$I_2 = \frac{a_p * h_{eq}^3}{12}$$

$$I_2 = \frac{1.50 \text{ m} * (0.25 \text{ m})^3}{12}$$

$$I_2 = 0.001953125 \text{ m}^4$$

### Ensamblaje Directo.

Teniendo todos estos datos, procedemos al cálculo de la matriz de rigidez de la estructura por ensamblaje directo haciendo uso de la matriz alfanumérica anteriormente mostrada en este trabajo de investigación.

$$K = \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2 & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & 0 \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & b_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_2 \\ 0 & b_2 & a_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que:

$$t = \frac{12EI}{L^3} \quad b = \frac{6EI}{L^2} \quad k = \frac{4EI}{L} \quad a = \frac{2EI}{L} \quad r = \frac{EA}{L}$$

Y aplicando los datos anteriormente mencionados obtenemos el siguiente resultado:

$$K = \begin{bmatrix} 720223.815565489 & 107529.701945927 & 1252.76404711469 & 0.00000 \\ 107529.701945927 & 75992.4086994459 & 8682.52471519356 & 10937.5 \\ 1252.76404711469 & 8682.52471519356 & 16249.2195597663 & 5468.75 \\ 0.000000000000000 & 10937.50000000000 & 5468.75000000000 & 10937.5 \end{bmatrix}$$

### Matriz de compatibilidad A

Teniendo todos los datos, procedemos al cálculo de la matriz de rigidez de la estructura por medio de la matriz de compatibilidad, haciendo uso de la matriz alfanumérica anteriormente mostrada en este trabajo de investigación.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1 \cos^2 \theta}{Lr} + \frac{E_2 A_2}{Ld} + \frac{12E_1 I_1 \sin^2 \theta}{Lr^3} & -\frac{12E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{6E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & 0 \\ -\frac{12E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{E_1 A_1 \sin^2 \theta}{Lr} + \frac{12E_1 I_1 \cos^2 \theta}{Lr^3} + \frac{12E_2 I_2}{Ld^3} & \frac{6E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{6E_2 I_2}{Ld^2} \\ \frac{6E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & \frac{6E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{4E_1 I_1}{Lr} + \frac{4E_2 I_2}{Ld} & \frac{2E_2 I_2}{Ld} \\ 0 & \frac{6E_2 I_2}{Ld^2} & \frac{2E_2 I_2}{Ld} & \frac{4E_2 I_2}{Ld} \end{bmatrix}$$

Se aplicó los datos numéricos en esta matriz, obteniendo el resultado siguiente:

$$K = \begin{bmatrix} 720223.815565489 & 107529.701945927 & 1252.76404711469 & 0.00000 \\ 107529.701945927 & 75992.4086994459 & 8682.52471519356 & 10937.5 \\ 1252.76404711469 & 8682.52471519356 & 16249.2195597663 & 5468.75 \\ 0.000000000000000 & 10937.50000000000 & 5468.75000000000 & 10937.5 \end{bmatrix}$$

Considerando que el resultado obtenido de la matriz de rigidez de la estructura, tanto por el método de ensamblaje directo como por el método de la matriz de compatibilidad, se procede a la condensación estática de la matriz de rigidez de la estructura, aplicando la siguiente ecuación ya expuesta anteriormente y se obtiene la matriz de rigidez lateral de la escalera.

$$K_L = K_{AA} - K_{AB} * K_{BB}^{-1} * K_{BA}$$

$$K_L = [541253.495810673] T$$

### Comprobación del segundo modelo matemático

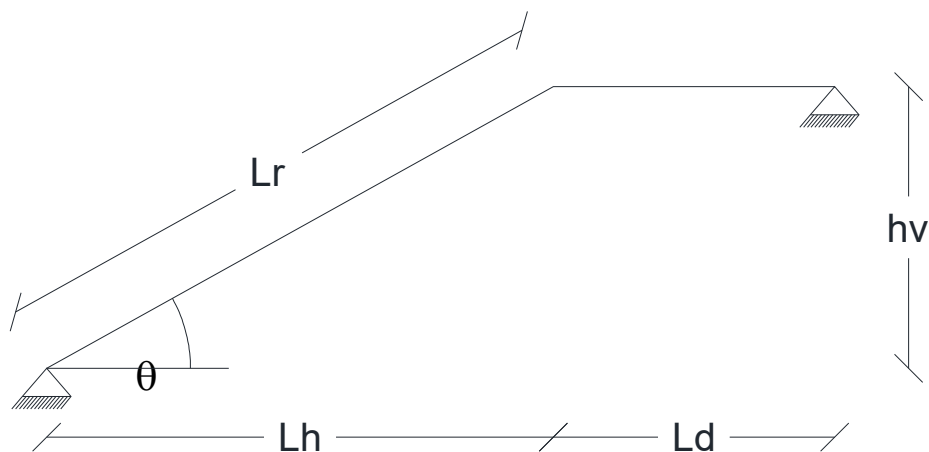


FIGURA A.27. ESQUEMA DE DIMENSIONES DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Conociendo los siguientes datos donde:

$L_r$ , es la longitud de la rampa de la escalera.

$L_h$ , es la longitud horizontal de la rampa de la escalera.

$L_d$ , es la longitud contemplada del descanso.



$h_v$ , es la altura de la rampa de la escalera.

$E_1$ , es el módulo de elasticidad del elemento inclinado de la estructura.

$E_2$ , es el módulo de elasticidad del elemento horizontal de la estructura.

$A_1$ , es el área transversal del elemento inclinado de la estructura.

$A_2$ , es el área transversal del elemento horizontal de la estructura.

$I_1$ , es la inercia del elemento inclinado de la estructura.

$I_2$ , es la inercia del elemento inclinado de la estructura.

Adicional a estos tenemos el ancho de paso de la escalera ( $a_p$ ) y la altura equivalente ( $h_{eq}$ ), datos que nos sirven para calcular el área transversal y la inercia de los elementos de la estructura para utilizarlos dentro de los cálculos respectivos de la matriz de rigidez y por consecuencia la matriz de rigidez lateral de la estructura.

Los datos respectivos son los siguientes:

$$L_r = 3.0886890423 \text{ m}$$

$$L_h = 2.70 \text{ m}$$

$$L_d = 1.50 \text{ m}$$

$$h_v = 1.50 \text{ m}$$

$$a_p = 1.50 \text{ m}$$

$$h_{eq} = 25 \text{ cm}$$

$$E_1 = 2'100.000 \frac{T}{m^2}$$

$$E_2 = 2'100.000 \frac{T}{m^2}$$

$$A_1 = a_p * h_{eq}$$

$$A_1 = 1.50 \text{ m} * 0.25 \text{ m}$$

$$A_1 = 0.375 \text{ m}$$

$$A_2 = a_p * h_{eq}$$

$$A_2 = 1.50 \text{ m} * 0.25 \text{ m}$$

$$A_2 = 0.375 \text{ m}$$

$$I_1 = \frac{a_p * h_{eq}^3}{12}$$

$$I_1 = \frac{1.50 \text{ m} * (0.25 \text{ m})^3}{12}$$

$$I_1 = 0.001953125 \text{ m}^4$$

$$I_2 = \frac{a_p * h_{eq}^3}{12}$$

$$I_2 = \frac{1.50 \text{ m} * (0.25 \text{ m})^3}{12}$$

$$I_2 = 0.001953125 \text{ m}^4$$

### Ensamblaje Directo.

Teniendo todos estos datos, procedemos al cálculo de la matriz de rigidez de la estructura por ensamblaje directo haciendo uso de la matriz alfanumérica anteriormente mostrada en este trabajo de investigación.

$$K = \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta + r_2 & r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & b_1 \sin \theta & b_1 \sin \theta & 0 \\ r_1 \cos \theta \sin \theta - t_1 \cos \theta \sin \theta & r_1 \sin^2 \theta + t_1 \cos^2 \theta + t_2 & -b_1 \cos \theta + b_2 & -b_1 \cos \theta & b_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta + b_2 & k_1 + k_2 & a_1 & a_2 \\ b_1 \sin \theta & -b_1 \cos \theta & a_1 & k_1 & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Considerando que:

$$t = \frac{12EI}{L^3} \quad b = \frac{6EI}{L^2} \quad k = \frac{4EI}{L} \quad a = \frac{2EI}{L} \quad r = \frac{EA}{L}$$

Y aplicando los datos anteriormente mencionados obtenemos el siguiente resultado:

$$K = \begin{bmatrix} 644350.045595471 & 98769.6483586085 & 1033.08445642577 & 1033.08445642577 & 0.00 \\ 98769.6483586085 & 97717.8411973144 & 9697.79865228907 & -1239.70134771093 & 10937.50 \\ 1033.08445642577 & 9697.79865228907 & 15138.7101227981 & 2100.60506139907 & 5468.75 \\ 1033.08445642577 & -1239.70134771093 & 2100.60506139907 & 4201.21012279815 & 0.00 \\ 0.00 & 10937.50 & 5468.75 & 0.00 & 10937.50 \end{bmatrix}$$

### Matriz de compatibilidad A

Teniendo todos los datos, procedemos al cálculo de la matriz de rigidez de la estructura por medio de la matriz de compatibilidad, haciendo uso de la matriz alfanumérica anteriormente mostrada en este trabajo de investigación.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1 \cos^2 \theta}{Lr} + \frac{E_2 A_2}{Ld} + \frac{12 E_1 I_1 \sin^2 \theta}{Lr^3} & -\frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & 0 \\ -\frac{12 E_1 I_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr^3} + \frac{E_1 A_1 \cos \theta \sin \theta}{Lr} & \frac{E_1 A_1 \sin^2 \theta}{Lr} + \frac{12 E_1 I_1 \cos^2 \theta}{Lr^3} + \frac{12 E_2 I_2}{Ld^3} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & -\frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} \\ \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} - \frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{4 E_1 I_1}{Lr} + \frac{4 E_2 I_2}{Ld} & \frac{2 E_1 I_1}{Lr} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} \\ \frac{6 E_1 I_1 \sin \theta}{Lr^2} & -\frac{6 E_1 I_1 \cos \theta}{Lr^2} & \frac{2 E_1 I_1}{Lr} & \frac{4 E_1 I_1}{Lr} & 0 \\ 0 & \frac{6 E_2 I_2}{Ld^2} & \frac{2 E_2 I_2}{Ld} & 0 & \frac{4 E_2 I_2}{Ld} \end{bmatrix}$$

Se aplicó los datos numéricos en esta matriz, obteniendo el resultado siguiente:

$$K = \begin{bmatrix} 644350.045595471 & 98769.6483586085 & 1033.08445642577 & 1033.08445642577 & 0.00 \\ 98769.6483586085 & 97717.8411973144 & 9697.79865228907 & -1239.70134771093 & 10937.50 \\ 1033.08445642577 & 9697.79865228907 & 15138.7101227981 & 2100.60506139907 & 5468.75 \\ 1033.08445642577 & -1239.70134771093 & 2100.60506139907 & 4201.21012279815 & 0.00 \\ 0.00 & 10937.50 & 5468.75 & 0.00 & 10937.50 \end{bmatrix}$$

Considerando que el resultado obtenido de la matriz de rigidez de la estructura, tanto por el método de ensamblaje directo como por el método de la matriz de compatibilidad, se procede a la condensación estática de la matriz de rigidez de la estructura, aplicando la siguiente ecuación ya expuesta anteriormente y se obtiene la matriz de rigidez lateral de la escalera.

$$K_L = K_{AA} - K_{AB} * K_{BB}^{-1} * K_{BA}$$

$$K_L = [528212.183348707] T$$

## ANEXO 4

### Comprobación del primer modelo matemático en el software ETABS

Para poder comprobar que la matriz de rigidez de la estructura esté bien realizada, vamos a calcular el vector de cargas generalizadas, considerando el peso propio de la estructura, tomando en cuenta que el concepto de matriz de rigidez es el conjunto de fuerzas y momentos necesarios que se aplica a la estructura para generar un desplazamiento unitario, para así obtener los desplazamientos de cada nudo de la estructura y mediante una modelación en el software ETABS, demostrar que la matriz de rigidez se calculó de manera correcta y por consiguiente la matriz de rigidez lateral de la estructura es la correcta.

Para esta sección se considera la figura A.26, en la cual interpretamos las dimensiones y una distribución de cargas con la cual se realizarán los cálculos correspondientes.

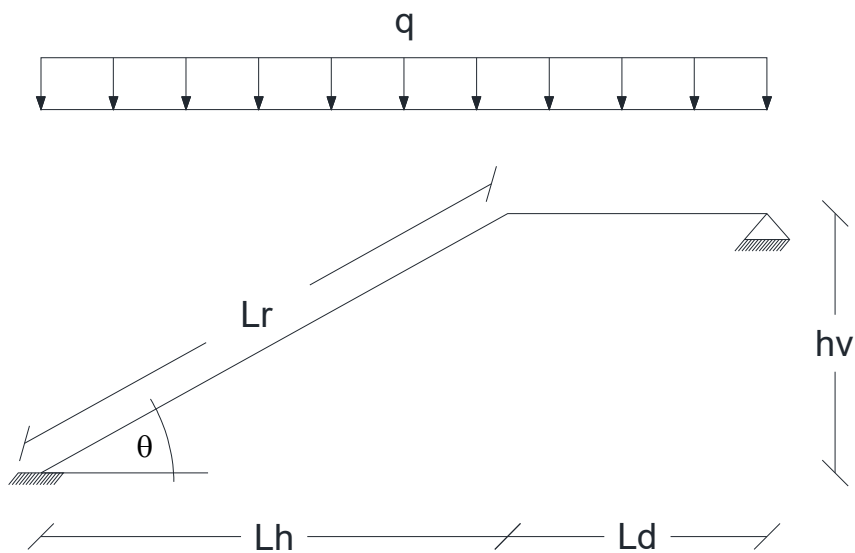


FIGURA A.28. ESQUEMA DE DIMENSIONES Y CARGAS DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

$$q = a_p h_{eq} \delta_{conc}$$

Donde:

$q$ , es la carga distribuida generada por el peso propio de la estructura.

$a_p$ , es el ancho de paso de la escalera.

$h_{eq}$ , es la altura equivalente de la escalera.

$\delta_{conc}$ , es la densidad del concreto.

$$q = 1.50 \text{ m} * 0.25 \text{ m} * 2.4 \frac{T}{m^3}$$

$$q = 0.90 \frac{T}{m}$$

Realizamos el equilibrio de nudos por medio de acciones de empotramiento, como lo muestra la figura A.27.

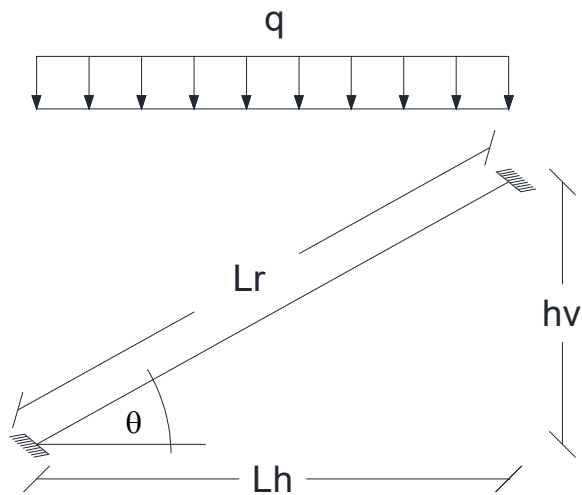


FIGURA A.29. ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO DEL ELEMENTO INCLINADO, DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Teniendo en cuenta que los datos son los siguientes:

$$L_r = 3.0886890423 \text{ m}$$

$$L_h = 2.70 \text{ m}$$

$$h_v = 1.50 \text{ m}$$

$$q = 0.90 \frac{T}{m}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{hv}{Lr}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{1.50 \text{ m}}{3.0886890423 \text{ m}}$$

$$\text{sen}\theta = 0.48564293118$$

$$\text{cos}\theta = \frac{Lh}{Lr}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{2.70 \text{ m}}{3.0886890423 \text{ m}}$$

$$\text{cos}\theta = 0.87415727612$$

Realizamos el equilibrio de nudos descomponiendo la carga por peso propio en coordenadas locales del elemento, como lo muestra la figura A.28.

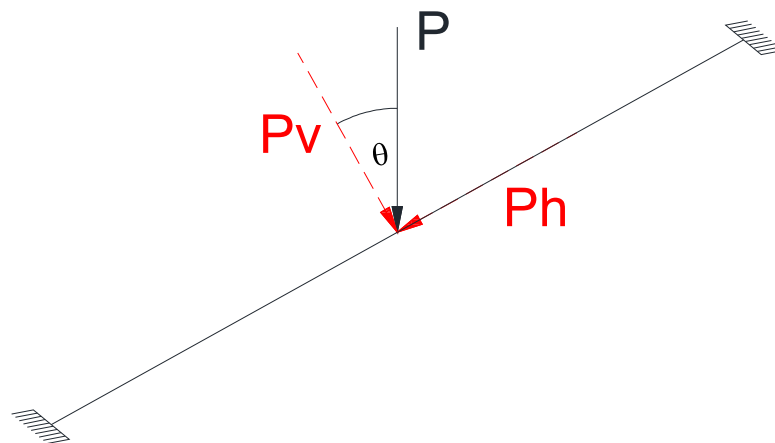


FIGURA A.30. DESCOMPOSICIÓN DE LA CARGA EN COORDENADAS LOCALES DEL ELEMENTO INCLINADO DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

$$P = q * Lh$$

$$P = 0.90 \frac{T}{m} * 2.70 \text{ m}$$

$$P = 2.43 T$$

$$P_v = P * \text{cos}\theta$$

$$P_v = 2.43 T * 0.87415727612$$

$$P_v = 2.12420218097 T$$

$$P_h = P * \text{sen}\theta$$

$$P_h = 2.43 T * 0.48564293118$$

$$P_h = 1.18011232276 T$$

Para graficar estas cargas como distribuidas se debe dividir los resultados para la longitud del elemento inclinado, de la siguiente manera:

$$q_{hi} = \frac{P_h}{Lr}$$

$$q_{hi} = \frac{1.18011232276 T}{3.0886890423 m}$$

$$q_{hi} = 0.38207547170 \frac{T}{m}$$

$$q_{vi} = \frac{P_v}{Lr}$$

$$q_{vi} = \frac{2.12420218097 T}{3.0886890423 m}$$

$$q_{vi} = 0.68773584905 \frac{T}{m}$$

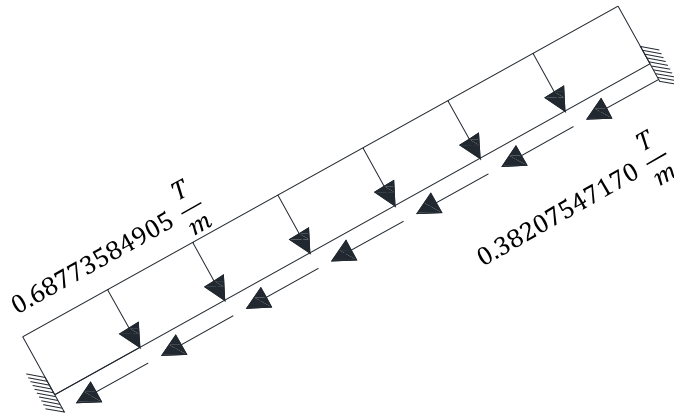


FIGURA A.31. DISTRIBUCIÓN DE CARGAS EN COORDENADAS LOCALES DEL ELEMENTO INCLINADO DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Estableciendo las siguientes expresiones realizamos el equilibrio de nudos en coordenadas locales:

$$M = \frac{q L^2}{12}$$

$$F = \frac{q L}{2}$$

Aplicando estas expresiones tanto para momentos y fuerzas obtenemos los siguientes resultados:

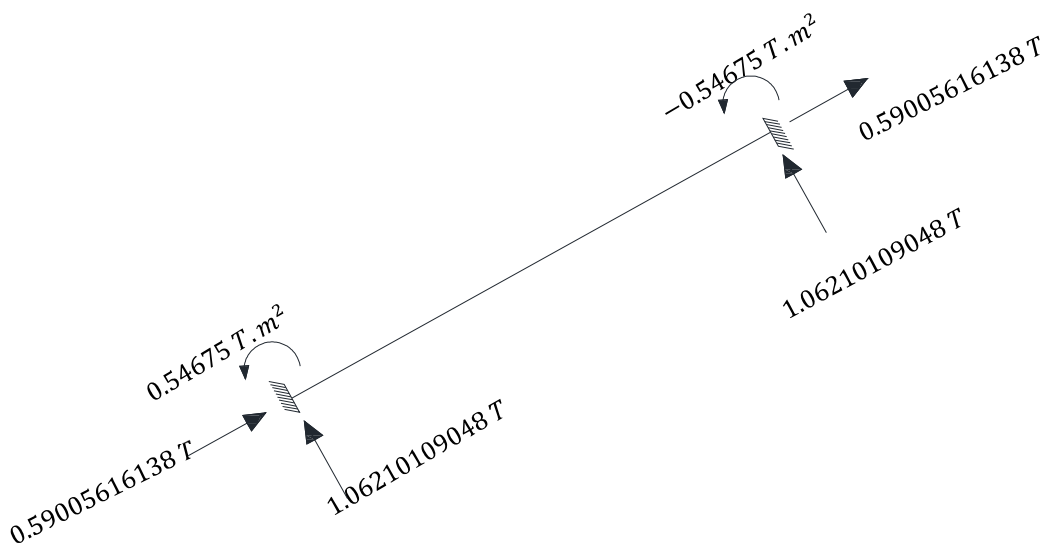


FIGURA A.32. EQUILIBRIO DE NUDOS EN COORDENADAS LOCALES DEL ELEMENTO INCLINADO DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar



Estos resultados los interpretamos en una matriz de cargas como se indica a continuación

$$Q_2 = \begin{bmatrix} N \\ V \\ M \\ N' \\ V' \\ M' \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.5900561613820380 \\ 1.062101090487670 \\ 0.546750 \\ 0.5900561613820380 \\ 1.062101090487670 \\ -0.546750 \end{bmatrix}$$

Se aplica la siguiente ecuación para pasar los resultados de coordenadas locales a globales:

$$Q_3 = -T_{2-3}^t * Q_2$$

$$\text{sen}\theta = 0.48564293118$$

$$\text{cos}\theta = 0.87415727612$$

$$T_{2-3}^t = \begin{bmatrix} \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0000000 \\ -1.2150000 \\ -0.5467500 \\ 0.0000000 \\ -1.2150000 \\ 0.5467500 \end{bmatrix}$$

Seguimos con el elemento horizontal, en este caso por ser un elemento que no tiene inclinación calculamos directamente el equilibrio de nudos por acciones de empotramiento, con las expresiones de momento y fuerza, como se muestra a continuación:

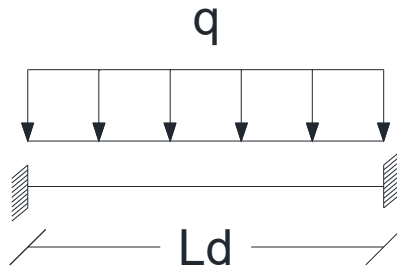


FIGURA A.33. ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO DEL ELEMENTO HORIZONTAL, DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Realizamos el equilibrio de nudos con las ecuaciones, obteniendo el siguiente resultado:

$$M = \frac{q L^2}{12}$$

$$F = \frac{q L}{2}$$

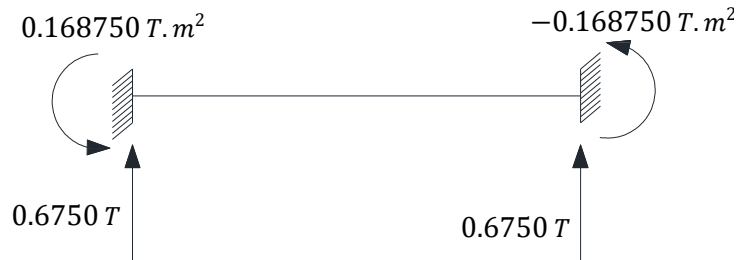


FIGURA A.34. EQUILIBRIO DE NUDOS EN COORDENADAS LOCALES DEL ELEMENTO INCLINADO DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Estos resultados los interpretamos en una matriz de cargas como se indica a continuación:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} N \\ V \\ M \\ N' \\ V' \\ M' \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.6750 \\ 0.168750 \\ 0.0000 \\ 0.6750 \\ -0.168750 \end{bmatrix}$$

Se aplica la siguiente ecuación para pasar a coordenadas globales:

$$Q_3 = -T_{2-3}^t * Q_2$$

$$\text{sen}\theta = 0$$

$$\text{cos}\theta = 1$$

$$T_{2-3}^t = \begin{bmatrix} \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ -0.675000 \\ -0.168750 \\ 0.000000 \\ -0.675000 \\ 0.168750 \end{bmatrix}$$

Colocamos los vectores de colocación correspondientes de cada elemento para obtener el vector de cargas generalizadas  $Q$ , de la estructura:

$$Q_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ -1.215000 \\ -0.546750 \\ 0.000000 \\ -1.215000 \\ 0.546750 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$Q_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ -0.675000 \\ -0.168750 \\ 0.000000 \\ -0.675000 \\ 0.168750 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ -1.890000 \\ 0.378000 \\ 0.168750 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Se obtiene el vector de cargas generalizadas  $Q$  y se aplica la siguiente ecuación, para calcular los desplazamientos:

$$q = K^{-1} * Q$$

Se utiliza la matriz de rigidez de la estructura obtenida anteriormente la cual es:

$$K = \begin{bmatrix} 720223.815565489 & 107529.701945927 & 1252.76404711469 & 0.00000 \\ 107529.701945927 & 75992.4086994459 & 8682.52471519356 & 10937.5 \\ 1252.76404711469 & 8682.52471519356 & 16249.2195597663 & 5468.75 \\ 0.000000000000000 & 10937.50000000000 & 5468.75000000000 & 10937.5 \end{bmatrix}$$

Y tenemos como resultado los desplazamientos y comprobamos finalmente en el software ETABS

$$q = \begin{bmatrix} 0.0000065091017737599 \\ -0.0000439652411123455 \\ 0.0000315775005525071 \\ 0.0000436050622646634 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

### Modelación en el software ETABS.

Se realizó el modelo de la escalera en el software ETABS para comprobar los valores obtenidos con el cálculo realizado manualmente en el apartado anterior.

Para este paso se utilizó conocimiento previo obtenido acerca del software, o también podemos guiarnos en el manual básico de análisis y diseño estructural con ETABS presentado por (Quispe, 2010)

Realizamos el modelo de la escalera como tipo Frame, para así poder obtener los desplazamientos en los nudos de la estructura y poder comparar los resultados emitidos por el software con los calculados manualmente.

Sé obtuvieron los resultados de los desplazamientos, como podemos observar en las figuras A.36 y A.37, desplazamientos los cuales son correspondientes a las coordenadas 1, 2, 3 y 4 de la estructura en base a la figura A.35 en donde se ubican las coordenadas de desplazamiento.

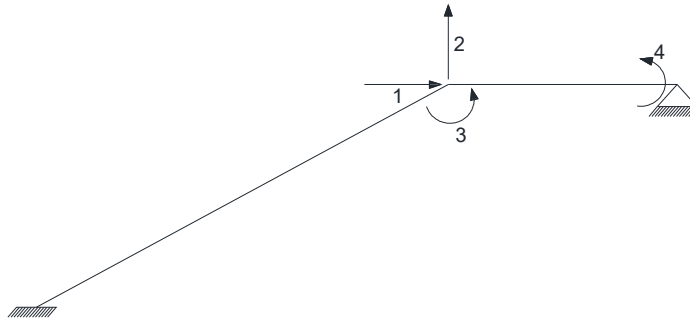


FIGURA A.35. COORDENADAS DE DESPLAZAMIENTO DEL MODELO MATEMÁTICO EMPOTRADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

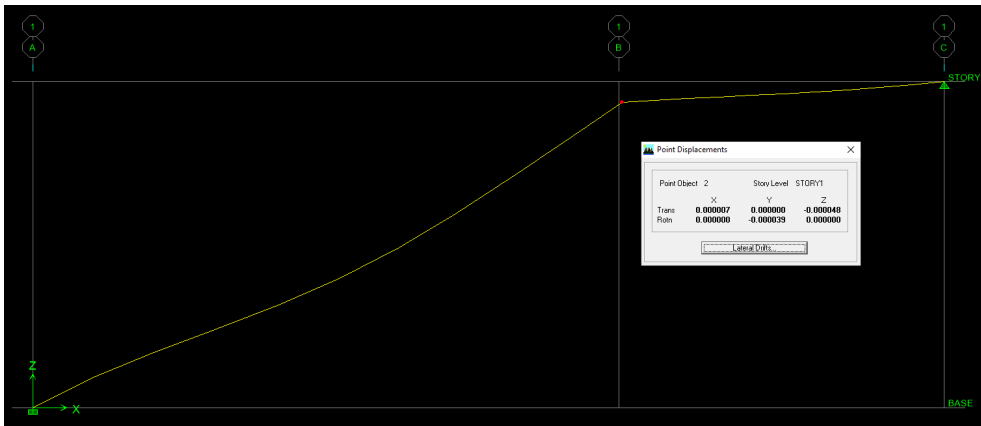


FIGURA A.36. DESPLAZAMIENTOS DE LAS COORDENADAS 1, 2 Y 3

Elaborado por: Andrés Salazar

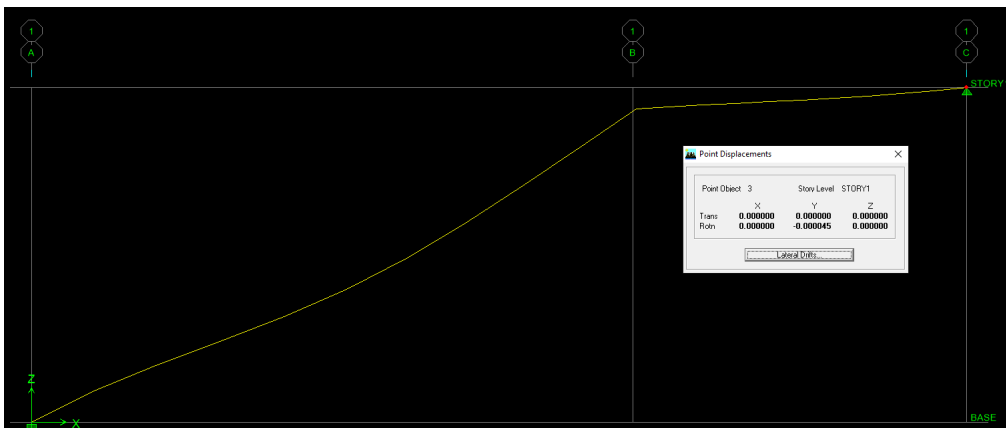


FIGURA A.37. DESPLAZAMIENTO DE LA COORDENADA 4

Elaborado por: Andrés Salazar

Los valores obtenidos de la modelación son los siguientes:

COORDENADA	1	2	3	4
VALOR OBTENIDO (m)	0.000007	-0.000048	-0.000039	-0.000045

### Comprobación del segundo modelo matemático en el software ETABS

Para poder comprobar que la matriz de rigidez de la estructura esté bien realizada, vamos a calcular el vector de cargas generalizadas, considerando el peso propio de la estructura, tomando en cuenta que el concepto de matriz de rigidez es el conjunto de fuerzas y momentos necesarios que se aplica a la estructura para generar un desplazamiento unitario, para así obtener los desplazamientos de cada nudo de la estructura y mediante una modelación en el software ETABS, demostrar que la matriz de rigidez se calculó de manera correcta y por consiguiente la matriz de rigidez lateral de la estructura es la correcta.

Para esta sección se considera la figura A.38, en la cual interpretamos las dimensiones y una distribución de cargas con la cual se realizarán los cálculos correspondientes.

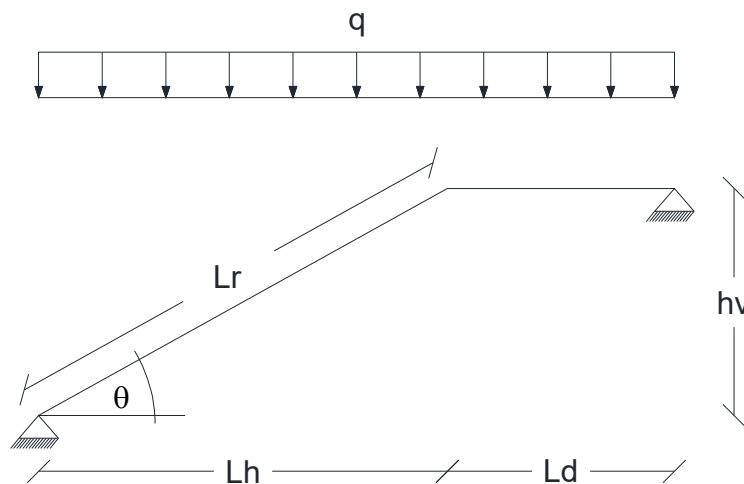


FIGURA A.38. ESQUEMA DE DIMENSIONES Y CARGAS DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

$$q = a_p h_{eq} \delta_{conc}$$

Donde:

$q$ , es la carga distribuida generada por el peso propio de la estructura.

$a_p$ , es el ancho de paso de la escalera.

$h_{eq}$ , es la altura equivalente de la escalera.

$\delta_{conc}$ , es la densidad del concreto.

$$q = 1.50 \text{ m} * 0.25 \text{ m} * 2.4 \frac{T}{m^3}$$

$$q = 0.90 \frac{T}{m}$$

Realizamos el equilibrio de nudos por medio de acciones de empotramiento, como lo muestra la figura A.39.

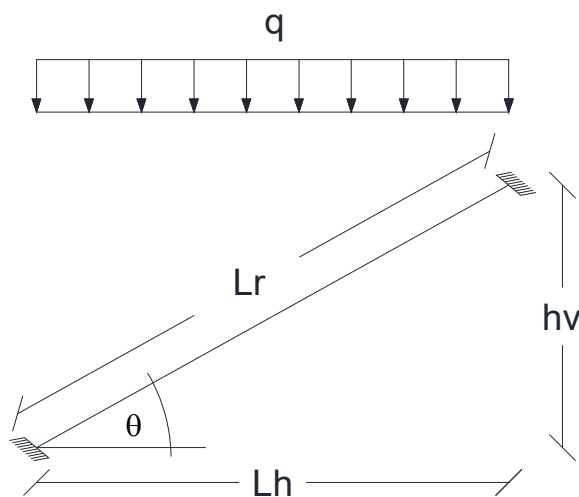


FIGURA A.39. ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO DEL ELEMENTO INCLINADO, DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Teniendo en cuenta que los datos son los siguientes:

$$Lr = 3.0886890423 \text{ m}$$

$$Lh = 2.70 \text{ m}$$

$$hv = 1.50 \text{ m}$$

$$q = 0.90 \frac{T}{m}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{hv}{Lr}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{1.50 \text{ m}}{3.0886890423 \text{ m}}$$

$$\text{sen}\theta = 0.48564293118$$

$$\text{cos}\theta = \frac{Lh}{Lr}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{2.70 \text{ m}}{3.0886890423 \text{ m}}$$

$$\text{cos}\theta = 0.87415727612$$

Realizamos el equilibrio de nudos descomponiendo la carga por peso propio en coordenadas locales del elemento, como lo muestra la figura A.40.

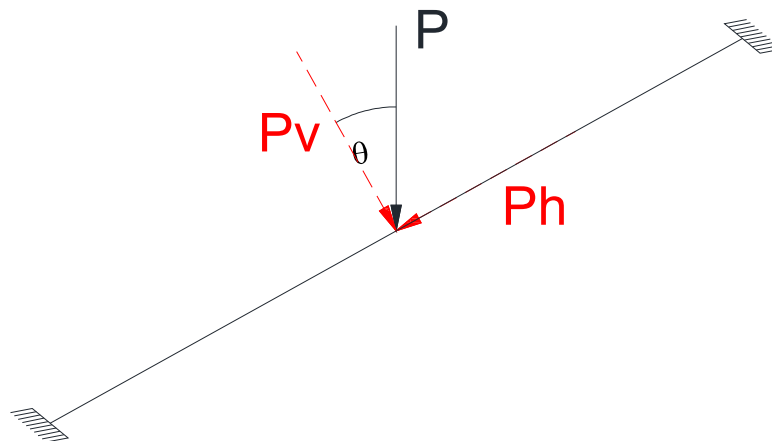


FIGURA A.40. DESCOMPOSICIÓN DE LA CARGA EN COORDENADAS LOCALES DEL ELEMENTO INCLINADO DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

$$P = q * Lh$$

$$P = 0.90 \frac{T}{m} * 2.70 \text{ m}$$



$$P = 2.43 T$$

$$P_v = P * \cos\theta$$

$$P_v = 2.43 T * 0.87415727612$$

$$P_v = 2.12420218097 T$$

$$P_h = P * \sen\theta$$

$$P_h = 2.43 T * 0.48564293118$$

$$P_h = 1.18011232276 T$$

Para graficar estas cargas como distribuidas se debe dividir los resultados para la longitud del elemento inclinado, de la siguiente manera:

$$q_{hi} = \frac{P_h}{Lr}$$

$$q_{hi} = \frac{1.18011232276 T}{3.0886890423 m}$$

$$q_{hi} = 0.38207547170 \frac{T}{m}$$

$$q_{vi} = \frac{P_v}{Lr}$$

$$q_{vi} = \frac{2.12420218097 T}{3.0886890423 m}$$

$$q_{vi} = 0.68773584905 \frac{T}{m}$$

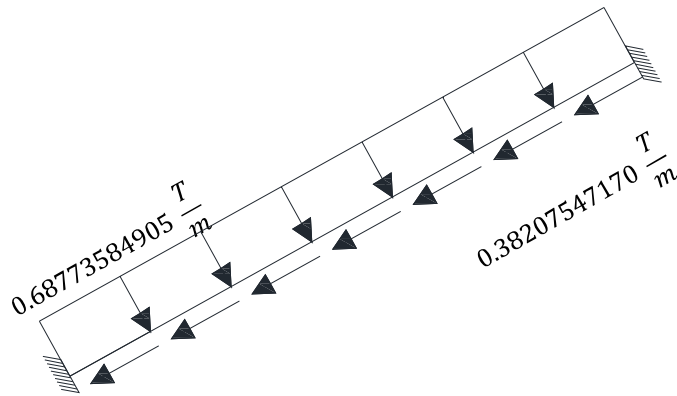


FIGURA A.41. DISTRIBUCIÓN DE CARGAS EN COORDENADAS LOCALES DEL ELEMENTO INCLINADO DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Estableciendo las siguientes expresiones realizamos el equilibrio de nudos en coordenadas locales:

$$M = \frac{q L^2}{12}$$

$$F = \frac{q L}{2}$$

Aplicando estas expresiones tanto para momentos y fuerzas obtenemos los siguientes resultados:

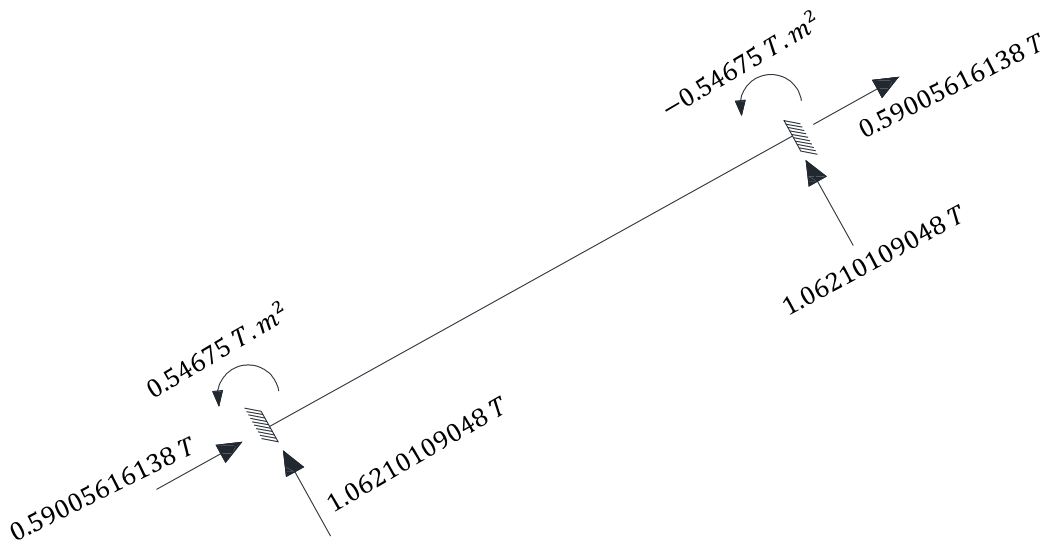


FIGURA A.42. EQUILIBRIO DE NUDOS EN COORDENADAS LOCALES DEL ELEMENTO INCLINADO DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Estos resultados los interpretamos en una matriz de cargas como se indica a continuación:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} N \\ V \\ M \\ N' \\ V' \\ M' \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.5900561613820380 \\ 1.062101090487670 \\ 0.546750 \\ 0.5900561613820380 \\ 1.062101090487670 \\ -0.546750 \end{bmatrix}$$

Se aplica la siguiente ecuación para pasar a coordenadas globales:

$$Q_3 = -T_{2-3}^t * Q_2$$

$$\text{sen}\theta = 0.48564293118$$

$$\text{cos}\theta = 0.87415727612$$

$$T_{2-3}^t = \begin{bmatrix} \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0000000 \\ -1.2150000 \\ -0.5467500 \\ 0.0000000 \\ -1.2150000 \\ 0.5467500 \end{bmatrix}$$

Seguimos con el elemento horizontal, en este caso por ser un elemento que no tiene inclinación calculamos directamente el equilibrio de nudos por acciones de empotramiento, con las expresiones de momento y fuerza, como se muestra a continuación:

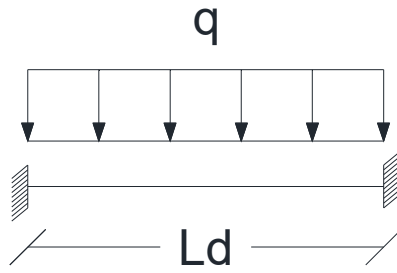


FIGURA A.43. ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO DEL ELEMENTO HORIZONTAL, DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Realizamos el equilibrio de nudos con las ecuaciones, obteniendo el siguiente resultado:

$$M = \frac{q L^2}{12}$$

$$F = \frac{q L}{2}$$

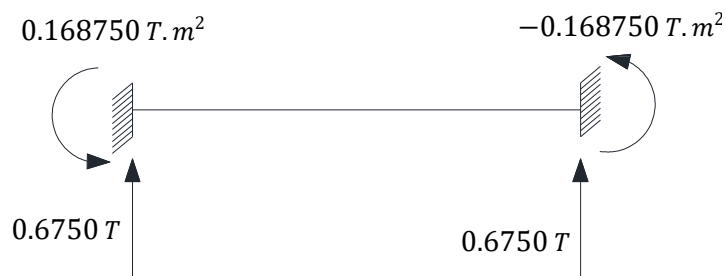


FIGURA A.44. EQUILIBRIO DE NUDOS EN COORDENADAS LOCALES DEL ELEMENTO INCLINADO DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

Estos resultados los interpretamos en una matriz de cargas como se indica a continuación:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} N \\ V \\ M \\ N' \\ V' \\ M' \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.6750 \\ 0.168750 \\ 0.0000 \\ 0.6750 \\ -0.168750 \end{bmatrix}$$

Se aplica la siguiente ecuación para pasar a coordenadas globales:

$$Q_3 = -T_{2-3}^t * Q_2$$

$$\text{sen}\theta = 0$$

$$\text{cos}\theta = 1$$

$$T_{2-3}^t = \begin{bmatrix} \text{cos } \theta & -\text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \text{cos } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cos } \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen } \theta & \text{cos } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ -0.675000 \\ -0.168750 \\ 0.000000 \\ -0.675000 \\ 0.168750 \end{bmatrix}$$

Colocamos los vectores de colocación correspondientes de cada elemento para obtener el vector de cargas generalizadas  $Q$ , de la estructura:

$$Q_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ -1.215000 \\ -0.546750 \\ 0.000000 \\ -1.215000 \\ 0.546750 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$Q_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ -0.675000 \\ -0.168750 \\ 0.000000 \\ -0.675000 \\ 0.168750 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{matrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.000000 \\ -1.890000 \\ 0.378000 \\ -0.546750 \\ 0.168750 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Se obtiene el vector de cargas generalizadas  $Q$  y se aplica la siguiente ecuación, para calcular los desplazamientos:

$$q = K^{-1} * Q$$

Se utiliza la matriz de rigidez de la estructura obtenida anteriormente la cual es:

$$K = \begin{bmatrix} 644350.045595471 & 98769.6483586085 & 1033.08445642577 & 1033.08445642577 & 0.00 \\ 98769.6483586085 & 97717.8411973144 & 9697.79865228907 & -1239.70134771093 & 10937.50 \\ 1033.08445642577 & 9697.79865228907 & 15138.7101227981 & 2100.60506139907 & 5468.75 \\ 1033.08445642577 & -1239.70134771093 & 2100.60506139907 & 4201.21012279815 & 0.00 \\ 0.00 & 10937.50 & 5468.75 & 0.00 & 10937.50 \end{bmatrix}$$

Y tenemos como resultado los desplazamientos y comprobamos finalmente en el software ETABS.

$$q = \begin{bmatrix} 0.000008235238063 \\ -0.000054050395546 \\ 0.000065356044913 \\ -0.000160498986763 \\ 0.000036800944518 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

### Modelación en el software ETABS

Se realizó el modelo de la escalera en el software ETABS para comprobar los valores obtenidos con el cálculo realizado manualmente en el apartado anterior.

Para este paso se utilizó conocimiento previo obtenido acerca del software, o también podemos guiarnos en el manual básico de análisis y diseño estructural con ETABS presentado por (Quispe, 2010)

Realizamos el modelo de la escalera como tipo Frame, para así poder obtener los desplazamientos en los nudos de la estructura y poder comparar los resultados emitidos por el software con los calculados manualmente.

Sé obtuvieron los resultados de los desplazamientos, como podemos observar en los gráficos A.46, A.47 y A.48, desplazamientos los cuales son correspondientes a las

coordenadas 1, 2, 3, 4 y 5 de la estructura en base a la figura A.45, en donde se ubican las coordenadas de desplazamiento.

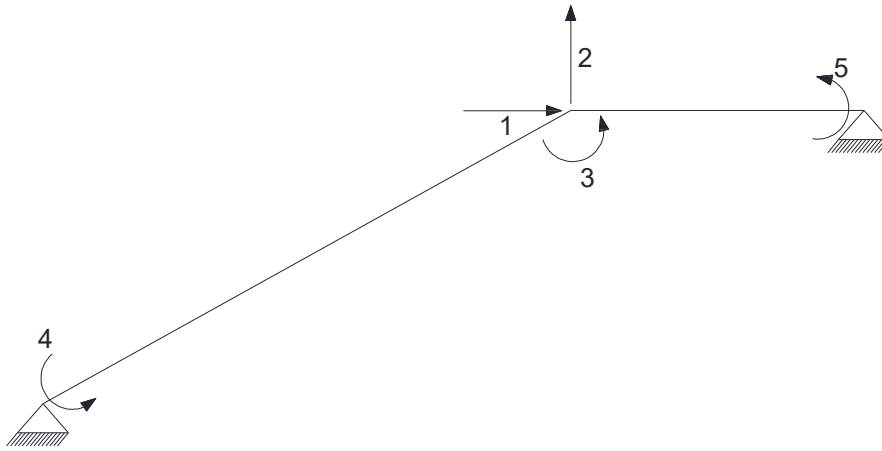


FIGURA A.45. COORDENADAS DE DESPLAZAMIENTO DEL MODELO MATEMÁTICO APOYADO-APOYADO

Elaborado por: Andrés Salazar

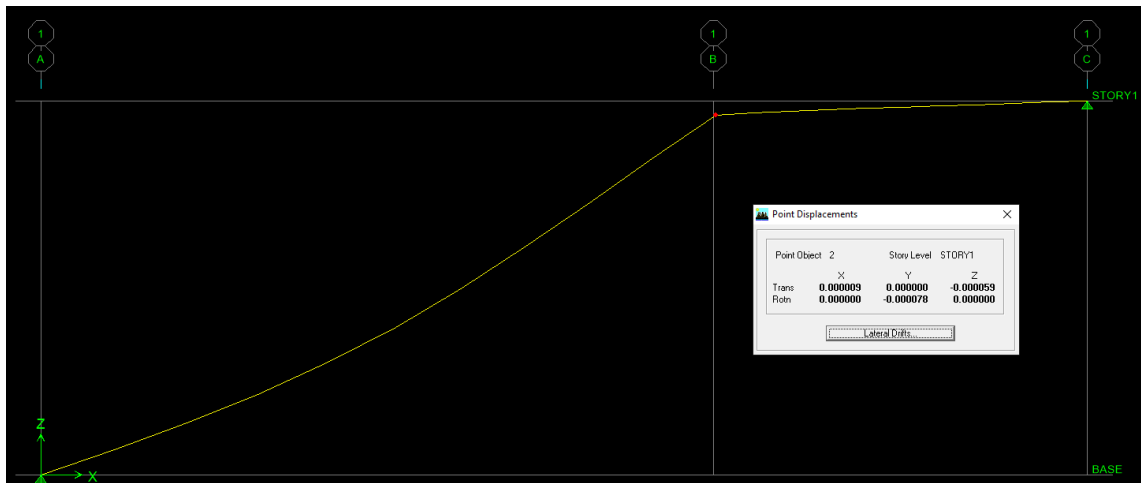


FIGURA A.46. DESPLAZAMIENTOS DE LAS COORDENADAS 1, 2 Y 3

Elaborado por: Andrés Salazar

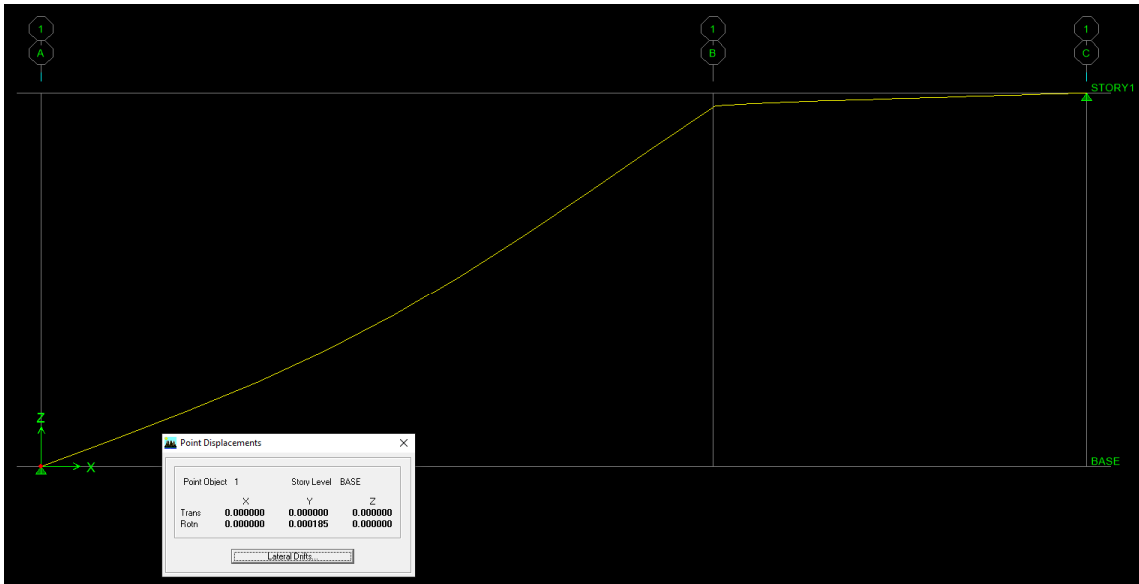


FIGURA A.47. DESPLAZAMIENTO DE LA COORDENADA 4

Elaborado por: Andrés Salazar

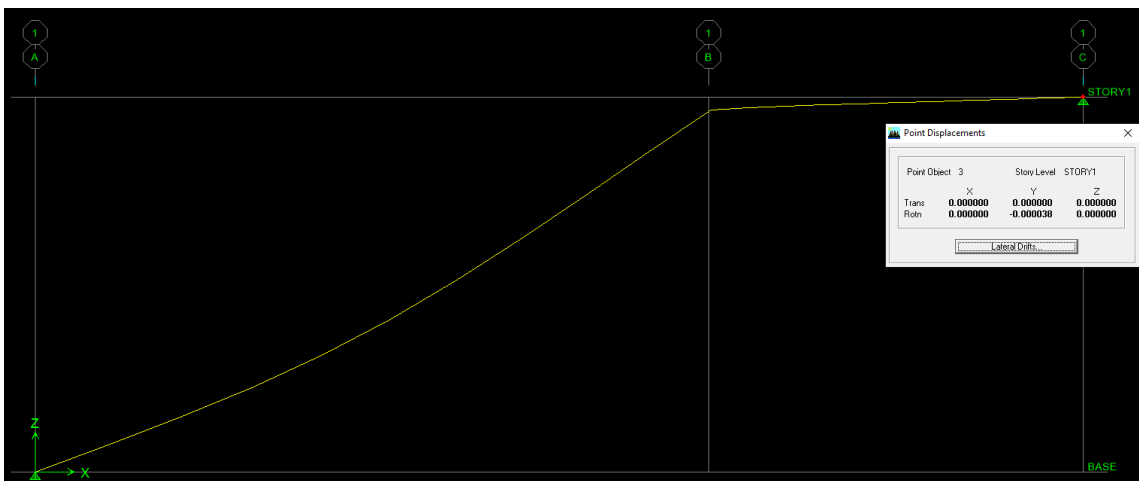


FIGURA A.48. DESPLAZAMIENTO DE LA COORDENADA 5

Elaborado por: Andrés Salazar

Los valores obtenidos de la modelación son los siguientes:

COORDENADA	1	2	3	4	5
VALOR OBTENIDO(m)	0.000009	-0.000059	-0.000078	0.000185	-0.000038



## ANEXO 5

### Inclusión de la matriz de rigidez lateral de la escalera en el balance torsional de la edificación

Se entiende que al hablar de balance torsional, estamos hablando de las excentricidades que existen entre el centro de masas y el centro de rigidez de la edificación, por lo tanto, para este apartado se tiene un modelo de planta el cual muestra la figura A.49, donde contamos con cuatro pórticos en el sentido X y cuatro pórticos en el sentido Y, además de la escalera, para este cálculo se plantea que las columnas son de dimensiones 30x30 cm y las vigas de 25x30 cm, se trabajó con elementos axialmente rígidos, a excepción de la escalera que es considerada totalmente flexible, teniendo una altura de entrepiso de 3 m y un módulo de elasticidad de 2100000 t/m<sup>2</sup>.

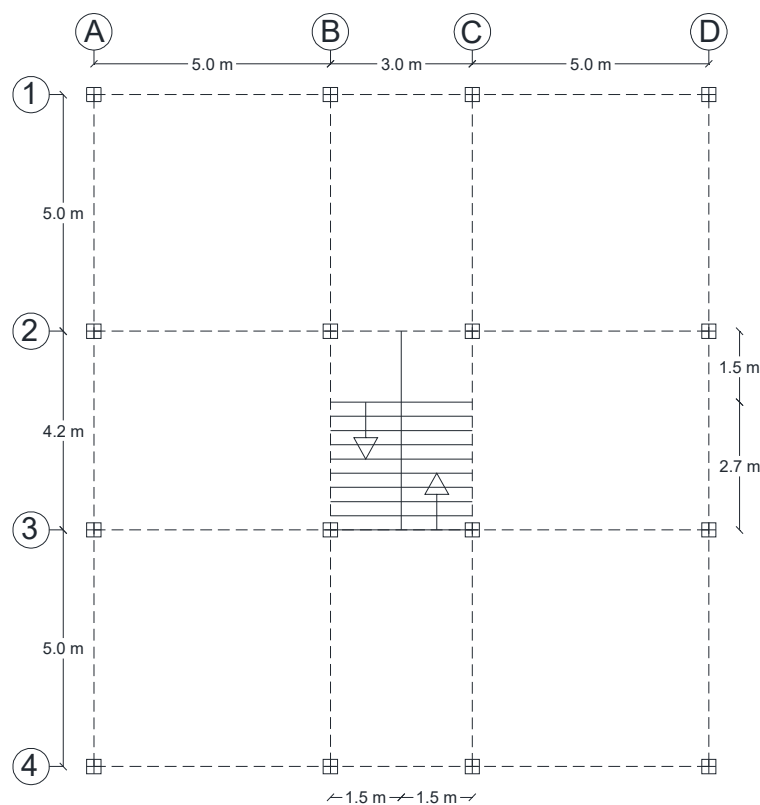


FIGURA A.49. ESQUEMA DE UNA PLANTA PARA EL ANALISIS DEL BALANCE TORSIONAL DE LA EDIFICACIÓN

Elaborado por: Andrés Salazar

## Cálculo del centro de masas

Se calculó el centro de masas con las ecuaciones expuestas anteriormente, las cuales nos ayudan a obtener las coordenadas de ubicación en los sentidos (X, Y) de la edificación.

De acuerdo a la figura A.49, en donde se muestra e esquema a de la planta a ser analizada en este apartado, procedemos a calcular la coordenada  $X_{CM}$ , de la edificación de la siguiente manera.

Tenemos un hueco en la losa el cual pertenece a las escaleras, ese hueco debemos omitirlo para este proceso, es decir, se tomó en consideración toda la medida de la planta, se sacó su área y se incluyó en la ecuación, como se muestra a continuación:

Tenemos un cuadrado de dimensiones 13 x 14.2 m, del cual debemos descontar un hueco de dimensiones 3 x 4.2 m, los cuales se representan en las figuras A.50 y A.51

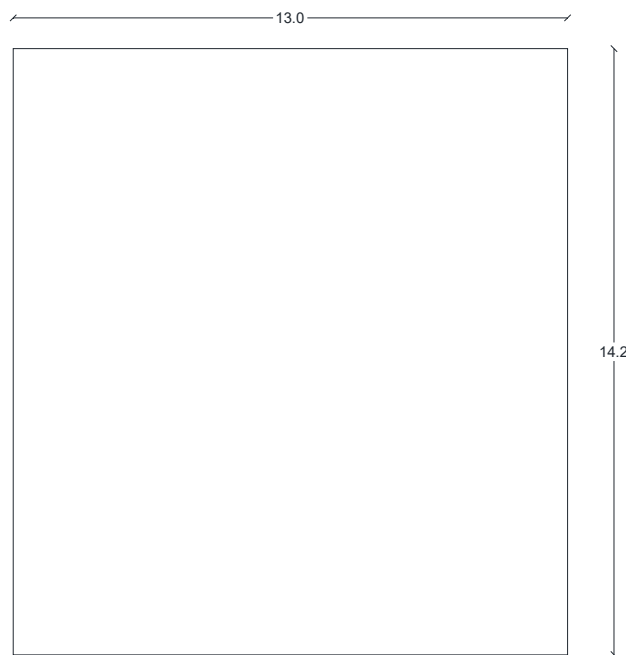


FIGURA A.50. PLANTA CON DIMENSIONES TOTALES

Elaborado por: Andrés Salazar

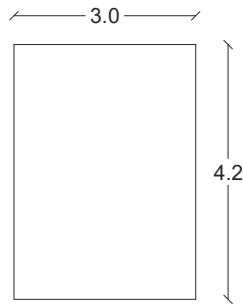


FIGURA A.51. DIMENSIONES DEL HUECO DE LA ESCALERA

Elaborado por: Andrés Salazar

Se toma la referencia como punto 0 en la intersección de los pórticos A y 4, y así poder obtener la distancia al centro de gravedad de cada figura. Para facilitar el cálculo se realizó una tabla de datos, la cual contiene toda la información necesaria para poder obtener las coordenadas del centro de masas de la planta de la edificación, la cual se muestra a continuación.

CENTRO DE MASAS							
FIGURA	X	Y	AREA	Xm	Ym	A*Xm	A*Ym
1	13	14.2	184.6	6.5	7.1	1199.9	1310.66
2	3	4.2	12.6	6.5	7.1	81.9	89.46
			$\Sigma =$ 197.2			$\Sigma =$ 1281.8	1400.12

Al obtener ya estos datos se aplicó las ecuaciones antes mencionadas y se obtuvo las coordenadas  $X_{CM}$  y  $Y_{CM}$

$$X_{CM} = \frac{1281.8}{197.2}$$

$$X_{CM} = 6.50 \text{ m}$$

$$Y_{CM} = \frac{1400.12}{197.2}$$

$$Y_{CM} = 7.10 \text{ m}$$

## Cálculo del centro de rigidez en función de la rigidez lateral

Obtenidos los datos del centro de masas, se aplicó el proceso de cálculo en función de la rigidez lateral para obtener el centro de rigidez de la planta de la edificación analizada de la siguiente manera:

Para este apartado se presenta los valores de la rigidez lateral de cada uno de los pórticos, puesto que no se muestra el cálculo de las matrices de rigidez lateral de los pórticos de la estructura. Para poder entender o analizar el cálculo de los mismos se recomienda revisar el libro de Análisis Matricial de Estructuras del Dr. Roberto Aguiar (Aguiar, 2004)

Pórtico	1	2	3	4
$K_L \left(\frac{T}{m}\right)$	1647.69231	1647.69231	1647.69231	1647.69231

Pórtico	A	B	C	D
$K_L \left(\frac{T}{m}\right)$	1610.88608	1610.88608	1610.88608	1610.88608

El valor de  $K_L$  de la escalera, se lo calculó anteriormente, mediante ensamblaje directo y por medio de la matriz  $A$ , el valor tomado para este proceso de cálculo fue el del primer modelo matemático empotrado-apoyado, siendo este valor el siguiente:

$$K_L = [541253.495810673] \frac{T}{m}$$

Para interpretar y entender de una mejor manera como es la colocación de la rigidez lateral de cada pórtico y de las escaleras para el proceso de obtención de las coordenadas del centro de rigidez se realizó un esquema, el cual se lo muestra en la figura A.52.

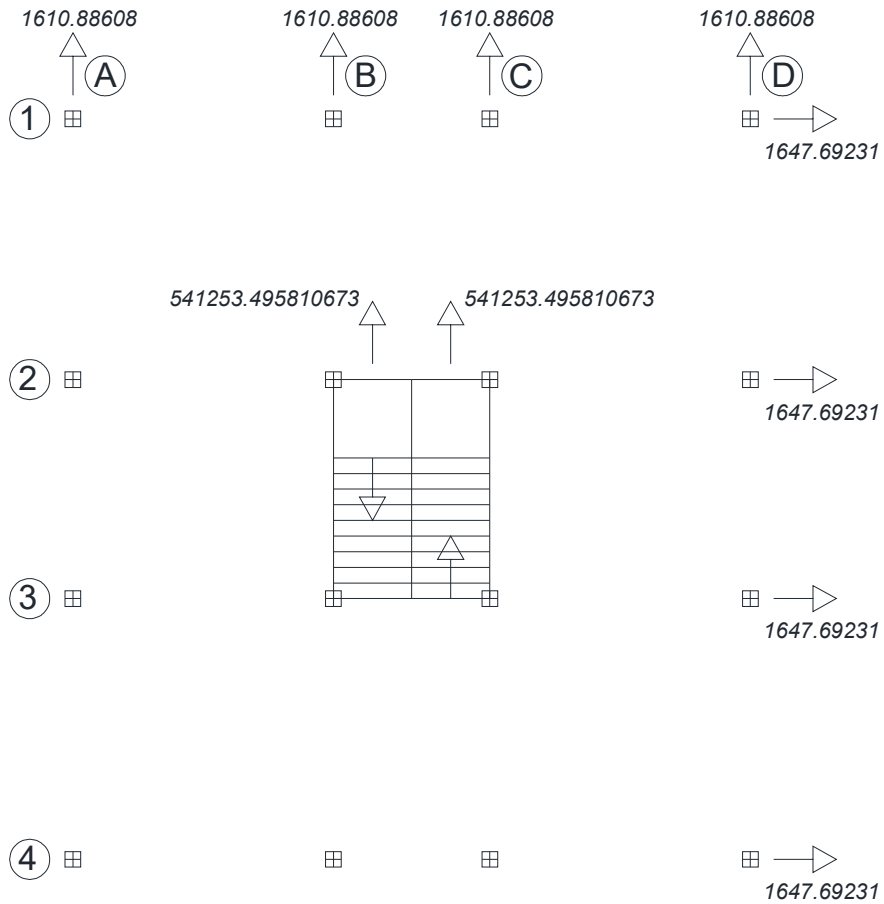


FIGURA A.52. CÁLCULO DE  $X_{CR}$  Y  $Y_{CR}$

Elaborado por: Andrés Salazar

### Equilibrio de fuerzas y momentos para obtener las coordenadas del centro de rigidez

Equilibrio de fuerzas en el sentido X.

$$V_x = 1647.69231 * 4$$

$$V_x = 6590.76 \frac{T}{m}$$

Equilibrio de momentos en el sentido X.

$$(1647.69231 * 5) + (1647.69231 * 9.20) + (1647.69231 * 14.20) = V_x * Y_{CR}$$

$$Y_{CR} = 7.10 m$$

Equilibrio de fuerzas en el sentido Y.

$$V_y = (1610.88608 * 4) + (521253.495810673 * 2)$$

$$V_y = 1048950.53594 \frac{T}{m}$$

Equilibrio de momentos en el sentido Y.

$$(1610.88608 * 5) + (521253.495810673 * 5.75) + (521253.495810673 * 7.25) + (1610.88608 * 8) + (1610.88608 * 13) = V_y * X_{CR}$$

$$X_{CR} = 6.50 \text{ m}$$

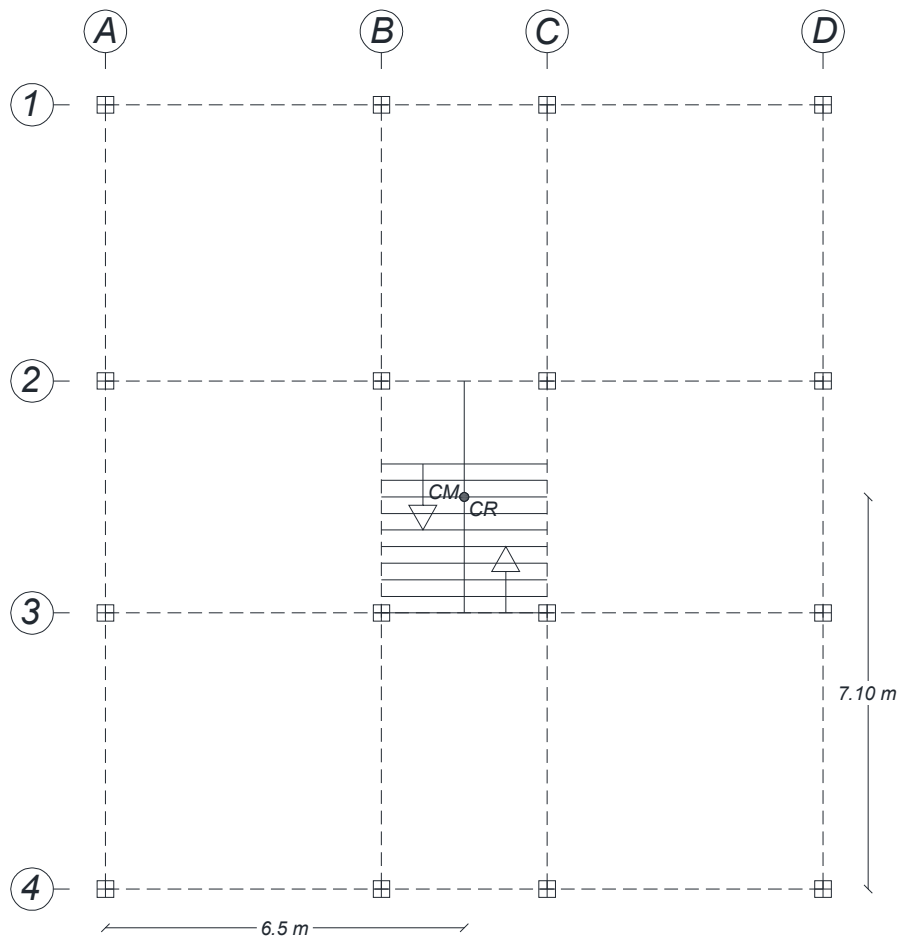


FIGURA A.53. UBICACIÓN DEL CENTRO DE MASAS Y CENTRO DE RIGIDEZ

Elaborado por: Andrés Salazar

## Cálculo de excentricidades

Para obtener la excentricidad existente entre el centro de masas y el centro de rigidez se resta las coordenadas ( $X_{CR}; Y_{CR}$ ) con las coordenadas ( $X_{CM}; Y_{CM}$ ).

$$e_x = X_{CR} - X_{CM}$$

$$e_x = 6.50 \text{ m} - 6.50 \text{ m}$$

$$e_x = 0 \text{ m}$$

$$e_y = Y_{CR} - Y_{CM}$$

$$e_y = 7.10 \text{ m} - 7.10 \text{ m}$$

$$e_y = 0 \text{ m}$$

## Cálculo del centro de rigidez en función de la rigidez "t"

Se calculó el centro de rigidez por medio de las rigideces de cada columna, por medio de la ecuación tal, e incluyendo el resultado de la rigidez lateral de la escalera, para este proceso de cálculo se tiene que las columnas centrales de la planta de la edificación se las denomina  $t_1$  y las columnas de lindero como  $t_2$ , se debe tener en consideración los sentidos de las columnas para calcular los valores de  $t_{1x}$ ,  $t_{2x}$ ,  $t_{1y}$ ,  $t_{2y}$ .

Puesto así y teniendo los datos necesarios para el desarrollo del cálculo como son dimensiones de columnas (30 x 30 cm), módulo de elasticidad (2100000 t/m<sup>2</sup>) y altura de entrepiso o longitud de columna (3 m), procedemos al cálculo de la siguiente manera:

Cálculo de la inercia de las columnas en sentido X como en sentido Y.

$$I_x = \frac{b * h^3}{12}$$

$$I_x = \frac{0.30 * 0.30^3}{12}$$

$$I_x = 0.000675 \text{ m}^4$$

Como las dimensiones de las columnas son las mismas tanto en el sentido X como en el sentido Y, la inercia para el cálculo es la misma, por lo tanto:

$$I_y = 0.000675 \text{ m}^4$$

Teniendo ya la inercias de los elementos, se calcula la rigidez  $t$ , al obtener la misma inercia en los sentidos X, Y se obtiene lo siguiente:

$$t_{1x} = t_{1y}$$

$$t_{2x} = t_{2y}$$

$$t = \frac{12 * E * I}{H^3}$$

$$t = \frac{2100000 * 0.000675}{3^3}$$

$$t = 630 \frac{T}{m}$$

Por lo tanto.

$$t_{1x} = t_{1y} = 630 \frac{T}{m}$$

$$t_{2x} = t_{2y} = 630 \frac{T}{m}$$

Para entender de mejor manera la ubicación de las rigideces en cada columna, se observa las figuras A.54 y A.55, en donde se incluye la rigidez de la escalera también y proceder al equilibrio de fuerzas y momentos.



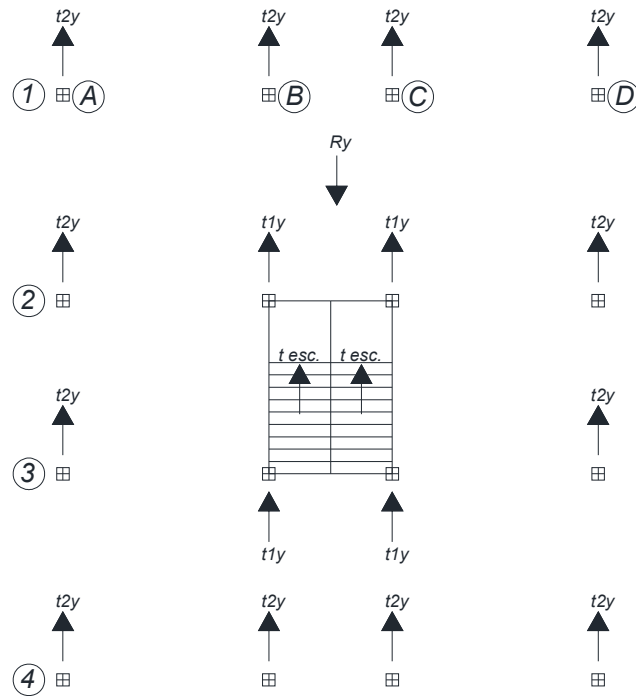


FIGURA A.54. RIGIDECES " $t$ " EN EL SENTIDO Y, INCLUYENDO LA RIGIDEZ DE LA ESCALERA

Elaborado por: Andrés Salazar

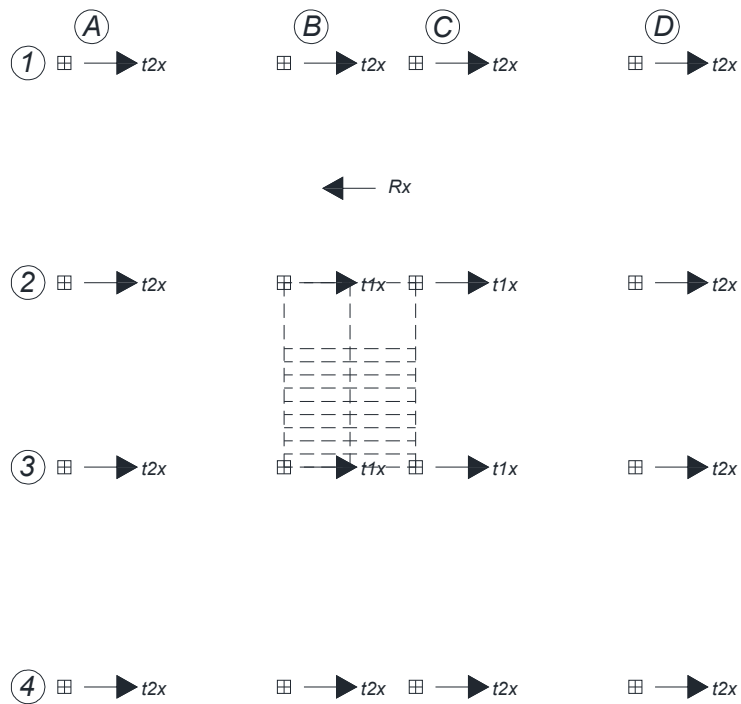


FIGURA A.55. RIGIDECES " $t$ " EN EL SENTIDO X

Elaborado por: Andrés Salazar

## Equilibrio de fuerzas y momentos para obtener las coordenadas del centro de rigidez

Equilibrio de fuerzas en el sentido X.

$$R_x = 12 * t_{2x} + 4 * t_{1x}$$

$$R_x = (12 * 630) + (4 * 630)$$

$$R_x = 10080 \frac{T}{m}$$

Equilibrio de momentos en el sentido X.

$$5 * (2 * t_{2x} + 2 * t_{1x}) + 9.20 * (2 * t_{2x} + 2 * t_{1x}) + 14.20 * (4 * t_{2x}) = R_x * Y_{CR}$$

$$5 * (2 * 630 + 2 * 630) + 9.20 * (2 * 630 + 2 * 630) + 14.20 * (4 * 630) = 10080 * Y_{CR}$$

$$5 * (2520) + 9.20 * (2520) + 14.20 * (2520) = 10080 * Y_{CR}$$

$$5 * (2520) + 9.20 * (2520) + 14.20 * (2520) = 10080 * Y_{CR}$$

$$Y_{CR} = 7.10 \text{ m}$$

Equilibrio de fuerzas en el sentido Y, sabiendo que  $t_{esc} = 521253.495810673 \frac{T}{m}$

$$R_y = 12 * t_{2y} + 4 * t_{1y} + 2 * t_{esc}$$

$$R_y = 12 * 630 + 4 * 630 + 2 * 521253.495810673$$

$$R_y = 1052586.99162 \frac{T}{m}$$

Equilibrio de momentos en el sentido Y.

$$5 * (2 * t_{2y} + 2 * t_{1y}) + 5.75 * t_{esc} + 7.25 * t_{esc} + 8 * (2 * t_{2y} + 2 * t_{1y}) + 13 * (4 * t_{2y}) = R_y * X_{CR}$$

$$5 * (2 * 630 + 2 * 630) + 5.75 * 521253.495810673 + 7.25 * 521253.495810673 + 8 * (2 * 630 + 2 * 630) + 13 * (4 * 630) = 1052586.99162 * X_{CR}$$

$$5 * (2520) + 5.75 * 521253.495810673 + 7.25 * 521253.495810673 + 8 * (2520) + 13 * (2520) = 1052586.99162 * X_{CR}$$

$$X_{CR} = 6.50 \text{ m}$$

## Cálculo de excentricidades

Para obtener la excentricidad existente entre el centro de masas y el centro de rigidez se resta las coordenadas ( $X_{CR}$ ;  $Y_{CR}$ ) con las coordenadas ( $X_{CM}$ ;  $Y_{CM}$ ).

$$e_x = X_{CR} - X_{CM}$$

$$e_x = 6.50 \text{ m} - 6.50 \text{ m}$$

$$e_x = 0 \text{ m}$$

$$e_y = Y_{CR} - Y_{CM}$$

$$e_y = 7.10 \text{ m} - 7.10 \text{ m}$$

$$e_y = 0 \text{ m}$$

**Modelación en el software ETABS de la planta de la edificación para obtener centro de masas y de rigidez.**

Se modeló la planta en ETABS, ingresando el módulo de elasticidad y dimensiones de los elementos de acuerdo a las especificaciones emitidas anteriormente, obteniendo el modelo como se lo muestra en las figuras presentadas a continuación.

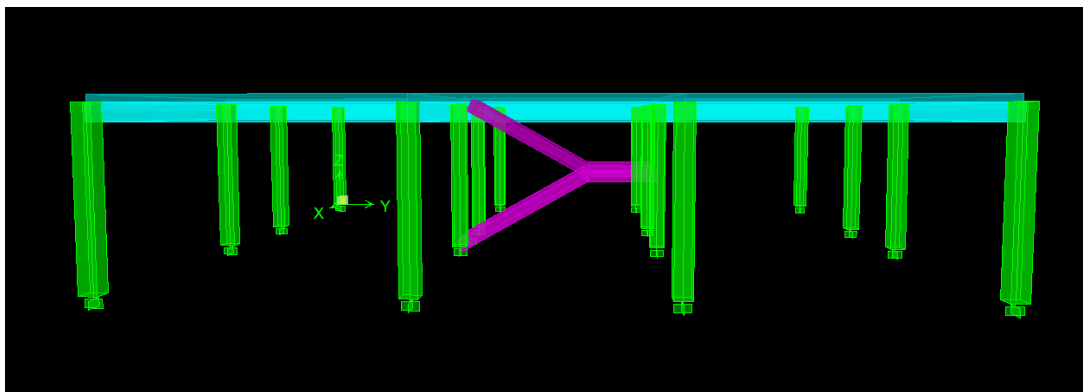


FIGURA A.56. MODELACIÓN PRESENTADA EN ELEVACIÓN

Elaborado por: Andrés Salazar

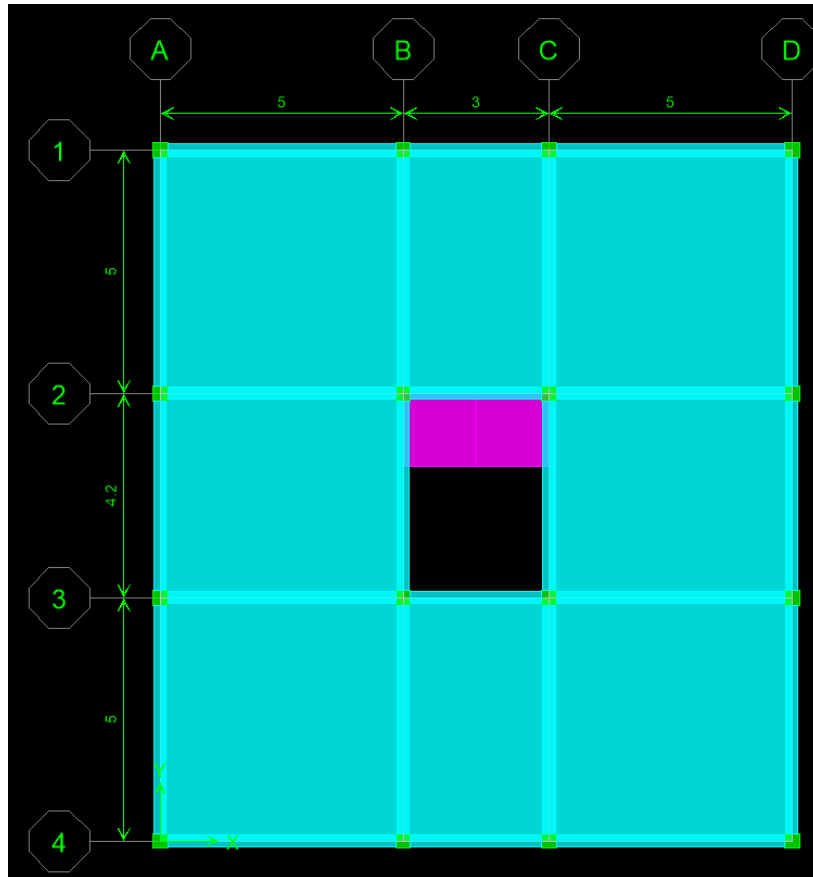


FIGURA A.57. MODELACIÓN PRESENTADA EN PLANTA

Elaborado por: Andrés Salazar

Realizado el modelo con las vigas de 25 x 30 cm, columnas de 30 x 30 cm, una losa de 25 cm de espesor y la escalera de las dimensiones calculadas anteriormente, se procedió a crear un diafragma, para que el software presente la tabla de centro de masas y rigidez, como se observa en las figuras A.56 y A.59.

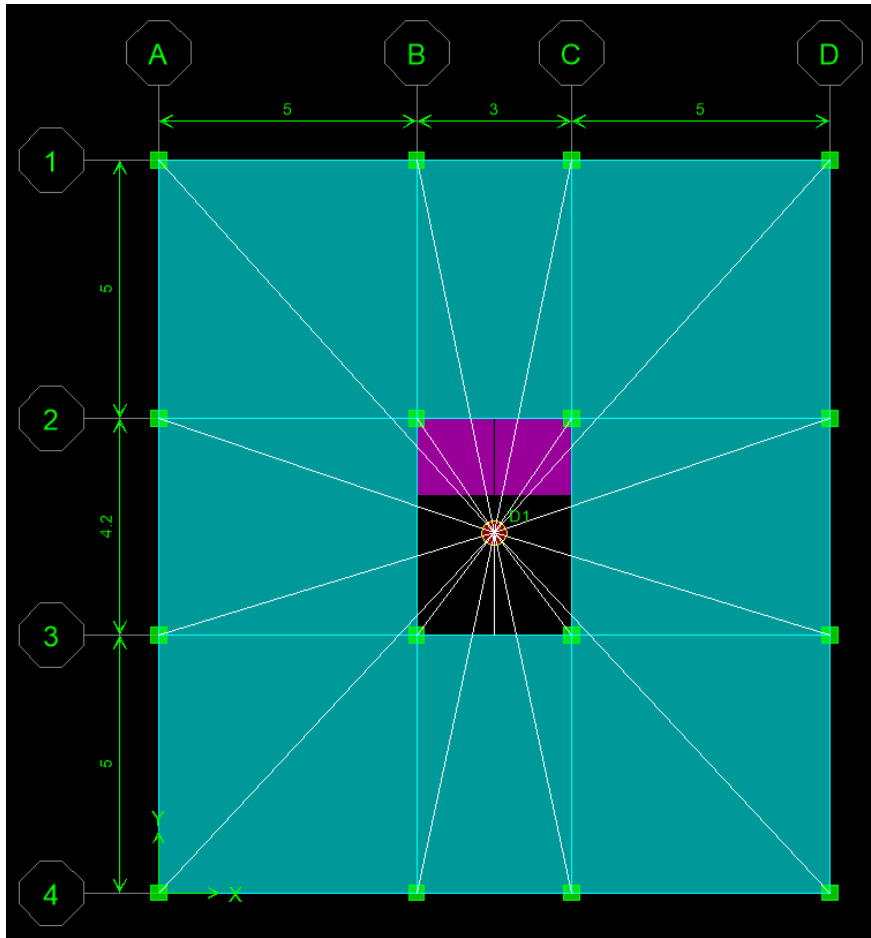


FIGURA A.58. DIAFRAGMA DE LA PLANTA DE LA EDIFICACIÓN

Elaborado por: Andrés Salazar

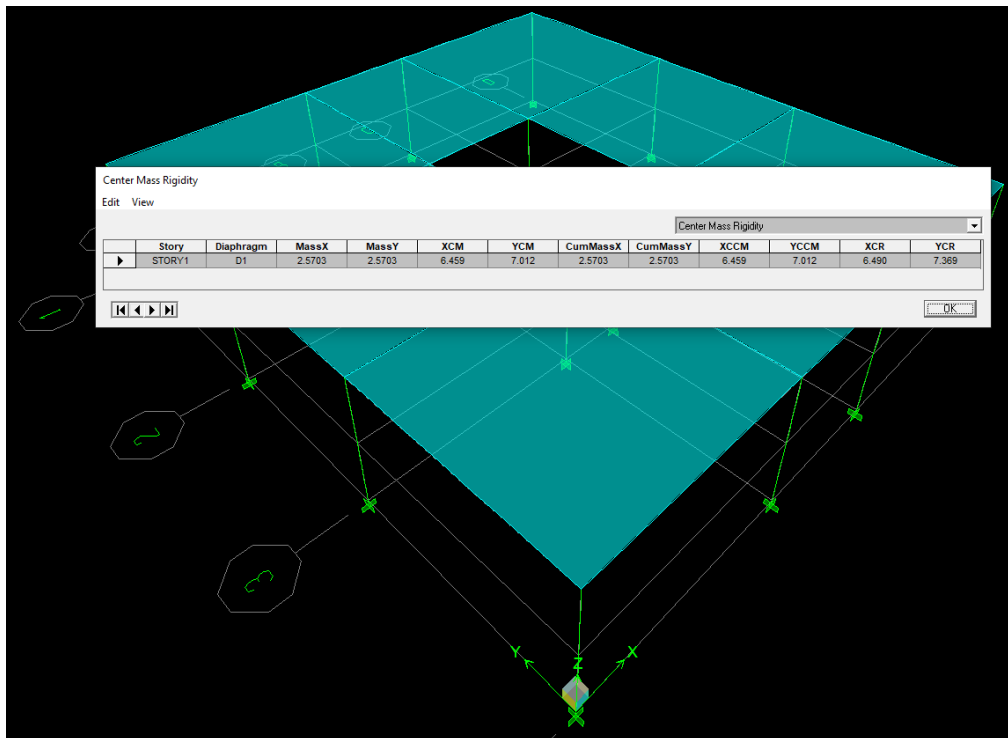


FIGURA A.59. TABLA DE CENTRO DE MASAS Y RIGIDEZ

Elaborado por: Andrés Salazar

Los valores obtenidos de la modelación son los siguientes:

<b>CENTRO DE MASAS Y RIGIDEZ</b>			
<b>XCM (m)</b>	<b>YCM (m)</b>	<b>XCR (m)</b>	<b>YCR (m)</b>
6.459	7.01	6.49	7.369