



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y
TECNOLOGÍAS
CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS

Trabajo presentado como requisito para obtener el título de Licenciado en Ciencias de la Educación, profesor en Ciencias Exactas

TÍTULO DEL PROYECTO

“APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE SISTEMA DE ECUACIONES EN LA ASIGNATURA DE ALGEBRA ELEMENTAL, EN LOS ESTUDIANTES DEL SEGUNDO SEMESTRE DE LA CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS, DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, DURANTE EL PERÍODO MARZO 2016 -JULIO 2016”

Autor:

Chiglan Naula Segundo Javier.

Tutor:

Msc.Daniel Morocho.

AÑO LECTIVO

2017

APROBACIÓN DEL TRIBUNAL DE GRADO

Los miembros del Tribunal Examinador revisan y aprueban el informe de investigación, sobre: “APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE SISTEMA DE ECUACIONES EN LA ASIGNATURA DE ALGEBRA ELEMENTAL, EN LOS ESTUDIANTES DEL SEGUNDO SEMESTRE DE LA CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS, DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, DURANTE EL PERÍODO MARZO 2016 -JULIO 2016”, trabajo de grado para obtener el Título de Licenciado en Ciencias de la Educación. Profesor de Ciencias Exactas, aprobado en nombre de la Universidad Nacional de Chimborazo, por el siguiente jurado examinador, del estudiante Chiglán Naula Segundo Javier.

Para constancia de lo expuesto firman:

Ms. Sandra Tenelanda
PRESIDENTE DEL TRIBUNAL



Firma

Ms. Carlos Aimacaña
VOCAL DEL TRIBUNAL



Firma

Ms. Angélica Urquizo
VOCAL DEL TRIBUNAL



Firma

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo de investigación, previo a la obtención del Título, Licenciado en Ciencias de la Educación, Carrera de Ciencias Exactas, Título “APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE SISTEMA DE ECUACIONES EN LA ASIGNATURA DE ALGEBRA ELEMENTAL, EN LOS ESTUDIANTES DEL SEGUNDO SEMESTRE DE LA CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS, DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, DURANTE EL PERÍODO MARZO 2016 -JULIO 2016”; realizado por el Señor Chiglán Naula Segundo Javier, ha sido revisado y analizado en su totalidad con el asesoramiento permanente del tutor, por lo cual se encuentra apto para su presentación y defensa respectiva.

Es todo cuanto puedo informar en honor a la verdad.

Riobamba, Enero de 2017



MsC. Héctor Morocho Lara.

TUTOR DE TESIS

ACTA DE APROBACIÓN

En mi calidad de Tutor de la tesis del tema: “APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE SISTEMA DE ECUACIONES EN LA ASIGNATURA DE ALGEBRA ELEMENTAL, EN LOS ESTUDIANTES DEL SEGUNDO SEMESTRE DE LA CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS, DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, DURANTE EL PERÍODO MARZO 2016 -JULIO 2016”; realizado por el Señor Chiglán Naula Segundo Javier, para optar por el título de Licenciatura en Ciencias Exactas, considero que reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sustentada públicamente y evaluada por el jurado examinador que se designe.

Riobamba, Enero de 2017



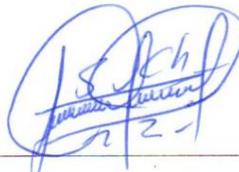
MsC. Héctor Morocho Lara

TUTOR

AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Yo, Chiglán Naula Segundo Javier, expreso mediante la presente, ser responsable de las ideas, doctrinas, resultados y propuesta realizada en la presente investigación realizada sobre: “APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE SISTEMA DE ECUACIONES EN LA ASIGNATURA DE ALGEBRA ELEMENTAL, EN LOS ESTUDIANTES DEL SEGUNDO SEMESTRE DE LA CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS, DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, DURANTE EL PERÍODO MARZO 2016 -JULIO 2016”; el mismo que ha sido realizado bajo la dirección del Msc. Daniel Morocho, en calidad de tutor y los derechos le corresponde a la Carrera de Ciencias, Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías de la Universidad Nacional de Chimborazo.

Riobamba, Enero de 2017



Chiglán Naula Segundo Javier

C: I.0604632034

AUTOR

AGRADECIMIENTO

A Dios por todas las bendiciones recibidas y la guía durante toda mi vida estudiantil.

A la Universidad Nacional de Chimborazo por brindarme la oportunidad de adquirir nuevos conocimientos y formarme como profesional.

Al Msc. Daniel Morocho por la ayuda intelectual y guía técnica recibida para la realización del presente trabajo.

A todos los Docentes y personas quienes me motivaron y apoyaron en esta jornada de trabajo.

CHIGLAN NAULA SEGUNDO JAVIER

DEDICATORIA

Esta tesis se la dedico a Dios quién supo guiarme por el buen camino, darme fuerzas para seguir adelante y no desmayar en los problemas que se presentaban, enseñándome a combatir y enfrentar los obstáculos y adversidades.

A mi Padre, por su apoyo, consejos, comprensión, amor, ayuda en los momentos difíciles. Me ha dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi carácter, mi empeño, mi perseverancia, mi coraje para conseguir mis objetivos.

CHIGLAN NAULA SEGUNDO JAVIER

ÍNDICE GENERAL

Contenido	Pág.
PORTADA	i
APROBACIÓN DEL TRIBUNAL DE GRADO	ii
CERTIFICACIÓN	iii
ACTA DE APROBACIÓN	iv
AUTORÍA DE LA INVESTIGACIÓN	v
AGRADECIMIENTO	vi
DEDICATORIA	vii
ÍNDICE GENERAL	viii
ÍNDICE DE CUADROS	xi
ÍNDICE DE GRÁFICOS	xii
RESUMEN	xiii
SUMMARY	xiv
INTRODUCCIÓN	1

CAPÍTULO I

MARCO REFERENCIAL

1.1.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	2
1.2.	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	4
1.3.	PREGUNTAS DIRECTRICES	4
1.4.	OBJETIVOS	4
1.3.1.	Objetivo General	4
1.3.2.	Objetivos Específicos	5
1.5.	JUSTIFICACIÓN	5

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1.	ANTECEDENTES DE INVESTIGACIONES ANTERIORES	7
2.2.	FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	8
2.2.1.	El Aprendizaje	8

2.2.2.	Proceso de Enseñanza Aprendizaje	11
2.2.3.	Metodología	13
2.2.4.	Resolución de problemas	14
2.2.5.	Metodología de resolución de problemas matemáticos y de aprendizaje	16
2.2.6.	Evaluación de la metodología de Polya	18
2.2.7.	Características de la Metodología de resolución de problemas	19
2.2.8.	Etapas en la metodología de resolución de problemas	20
2.2.9.	Resolución de problemas dentro del área de las matemáticas	24
2.2.10.	El Algebra Elemental	25
2.2.11.	El álgebra para resolver problemas de diferentes tipos	26
2.2.12.	Problemas que requieren algún tipo de generalización	28
2.2.13.	Sistema de Ecuaciones	30
2.2.14.	Método de resolución de ecuaciones paso a paso	31
2.3.	Definición de términos básicos	33
2.4.	Variables	33
		34

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1.	TIPO DE ESTUDIO	35
3.2.	Población y muestra	35
3.3.	Técnicas e instrumentos de recolección de datos	36
3.4.	Técnicas de procedimiento para el análisis de datos	36

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1.	RESULTADO DE LA APLICACIÓN DE LA FICHA DE OBSERVACIÓN	37
------	---	----

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones 47

5.2 Recomendaciones 48

BIBLIOGRAFÍA 49

ANEXOS 50

ÍNDICE DE CUADROS

CUADRO N° 1	Población	35
CUADRO N° 2	Metodologías en la resolución de sistemas de ecuaciones	37
CUADRO N° 3	Identifica las operaciones más comunes	38
CUADRO N° 4	Analiza los problemas a fin de buscar soluciones	39
CUADRO N° 5	Resolución de problemas en clases	40
CUADRO N° 6	Analiza las fórmulas del sistema de ecuaciones	41
CUADRO N° 7	Reconoce la clasificación de las ecuaciones	42
CUADRO N° 8	Identifica la manera para resolver la ecuación	43
CUADRO N° 9	Compara las diferentes formas de resolución	44
CUADRO N° 10	Diferencias existentes entre los sistemas de ecuaciones	45
CUADRO N° 11	Resolución del sistema de ecuaciones y sus procesos	46

ÍNDICE DE GRÁFICOS

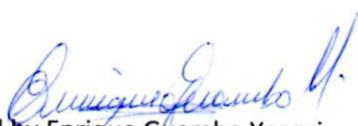
GRÁFICO N° 1	Metodologías en la resolución de sistemas de ecuaciones	37
GRÁFICO N° 2	Identifica las operaciones más comunes	38
GRÁFICO N° 3	Analiza los problemas a fin de buscar soluciones	39
GRÁFICO N° 4	Resolución de problemas en clases	40
GRÁFICO N° 5	Analiza las fórmulas del sistema de ecuaciones	41
GRÁFICO N° 6	Reconoce la clasificación de las ecuaciones	42
GRÁFICO N° 7	Identifica la manera para resolver la ecuación	43
GRÁFICO N° 8	Compara las diferentes formas de resolución	44
GRÁFICO N° 9	Diferencias existentes entre los sistemas de ecuaciones	45
GRÁFICO N° 10	Resolución del sistema de ecuaciones y sus procesos	46

RESUMEN

El presente trabajo de investigación pretende determinar como la aplicación de la metodología de resolución de problemas para la enseñanza y aprendizaje de sistema de ecuaciones en la asignatura de algebra elemental, influye en los estudiantes del Segundo semestre de la carrera de ciencias exactas. Dentro del planteamiento del problema se observó que existe deficiencias en conocimientos básicos sobre matemática y elementos del algebra, para enfrentar la resolución de problemas matemáticos, muy poco desarrollo de habilidades en la resolución de sistema de ecuaciones. Se planteó como objetivo general el aplicar la metodología de resolución de problemas con la finalidad de facilitar la enseñanza y aprendizaje de sistema de ecuaciones en los estudiantes. Se usó el tipo de investigación descriptiva porque permitió obtener los conocimientos del contexto actual sobre la enseñanza del sistema de ecuaciones. La población en estudio fueron 20 estudiantes de segundo semestre, para la recolección de datos se trabajó con la técnica de la observación y la aplicación de pruebas objetivas. Se usó el método inductivo porque permitió realizar el análisis partiendo de los hechos suscitados en la Universidad Nacional de Chimborazo. Se concluye que un alto porcentaje de estudiantes tienen muchas dificultades en trabajar con la metodología de resolución de problemas, en la mayoría de casos se aplica metodologías tradicionales. Se recomienda utilizar la Guía didáctica con el fin de fomentar el aprendizaje de sistema de ecuaciones mediante la metodología desarrollada en la investigación, en forma ordenada secuencial, pedagógica, basada en un sistema práctico, analítico y comparativo.

Abstract

This research aims to determine the application of the methodology of problem resolution for teaching and learning system of equations in elemental algebra subject, influences in the students of second semester in the career of Exact Sciences. Within the problem statement it noted that there are deficiencies in basic knowledge about mathematics and algebra elements to face the resolution of mathematical problems, very little skills development mainly in the resolution system of equations. The general objective of this work is to apply the methodology of problem resolution in order to facilitate the teaching and learning system of equations in second semester students from the school of Exact Sciences. The type of descriptive research was used because it allowed us to obtain knowledge of the current context given in the teaching of the equation system. The study of the population was 20 students of second semester, for data collection worked with the technique of observation and application of objective evidence. In this research the inductive method was used because it allowed the analysis based on the facts raised in the National University of Chimborazo. It concludes that a high percentage of students have difficulty in working with problem resolution methodology, in most cases traditional methodologies are applied. It is recommended to use the teaching guide in order to promote learning system of equations using the methodology developed in the research in sequential and pedagogical order, based on a practical, analytical and comparative system.



Reviewed by Enrique Guambo Yerovi.
Language Center Teacher



INTRODUCCIÓN

En nuestro país existen muchas falencias en todas las áreas del conocimiento según el Ministerio de Educación los resultados del aprendizaje de la matemática son insatisfactorios, tanto de forma como de fondo en los estudiantes de los diferentes niveles de educación. Por ello este trabajo es muy importante debido a que la metodología y técnica de resolución de problemas que se aplica para el aprendizaje de sistema de ecuaciones permite que los estudiantes tomen un rol activo en el proceso de enseñanza aprendizaje. Se presenta este trabajo dividido en algunos capítulos descritos a continuación:

En el Capítulo I, Marco Referencial, contempla los siguientes aspectos: el planteamiento del problema con su respectiva descripción, que es donde se sintetiza las causas y efectos de esta investigación, se encuentra la justificación y sus respectivos objetivos.

En el Capítulo II, Marco Teórico, donde se describen los conceptos y teorías relacionados con las dos variables de estudio.

En el Capítulo III, Marco Metodológico, se consideró la metodología aplicada, en este capítulo donde se determina el tipo de investigación, diseño de la investigación, procedimientos, población, muestra, técnicas e instrumentos para la recolección de datos.

En el Capítulo IV, Análisis e Interpretación de Resultados, se muestra los resultados con sus respectivos cuadros y gráficos estadísticos que son los criterios para la interpretación.

En el Capítulo V, Conclusiones y Recomendaciones, descritas de acuerdo a los datos finales obtenidos.

CAPÍTULO I

1. MARCO REFERENCIAL

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la actualidad a nivel mundial siempre ha existido insuficiencias en la enseñanza de la Matemática, debido a los problemas de aprendizaje, poco o casi nada de interés por aprender, la desmotivación; la desactualización pedagógica tanto educativa y tecnológica, a pesar de los distintos perfeccionamientos y ajustes curriculares que se introducen en la distintas malla curriculares, no se ha podido lograr que los alumnos cambien el rol pasivo que en ocasiones manifiestan en su aprendizaje, presentando dificultades en los distintos niveles educativos, que afectan notablemente al desarrollo de las habilidades necesarias para que el estudiante sea capaz de resolver problemas cotidianos y a su vez fortalecer el pensamiento lógico y creativo. En esta sociedad del tercer milenio o sociedad del conocimiento en la cual vivimos en donde existen constantes cambios se requiere, estudiantes que tengan habilidades y destrezas para resolver problemas, capaces de comprender, modificar y tener iniciativa en la búsqueda de solución de problemas, así como también adaptarse a los cambios científicos-tecnológicos.

En el Ecuador existen muchas falencias en todas las áreas del conocimiento según el Ministerio de Educación los resultados del aprendizaje de la Matemática son insatisfactorios, tanto de forma como de fondo en los estudiantes de los diferentes niveles de educación. A pesar de que los docentes tratan de solucionar esta dificultad, imparten los conocimientos de forma tradicional basados en libros o textos y como es de conocimiento estos textos inician con una explicación de los conceptos, definiciones, propiedades, principios tradicionales, donde se siguen procesos rígidos y algorítmicos, provocando que los estudiantes resuelvan los problemas de forma rutinaria y algorítmica, usando los métodos de forma mecánica y muchas de las ocasiones resuelven problemas cotidianos pero sin darle un sentido lógico a lo que están resolviendo. Provocando que se proponga la resolución de problemas de un sinnúmero de ejercicios del mismo tipo y no permitiendo que el estudiante ejercite y desarrolle la

habilidad de resolver problemas tanto matemáticos como de contexto real. Por lo tanto, es necesario que todas las partes interesadas en la educación como autoridades, estudiantes, profesores, trabajen conjuntamente creando los espacios y metodologías necesarias para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática especialmente a la resolución de problemas.

La preocupación general en el ambiente de la Universidad Nacional de Chimborazo en el Segundo Semestre de la Carrera de Ciencias Exactas radica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Álgebra Elemental en la resolución de problemas que conducen al sistema de ecuaciones, se identificaron dificultades con el planteamiento de ecuaciones y sistema de ecuaciones entre las que mencionamos a continuación: existe deficiencias en conocimientos básicos sobre matemática y elementos del álgebra, para enfrentar la resolución de problemas matemáticos, muy poco desarrollo de habilidades en la resolución de problemas matemáticos que conducen a un sistema de ecuaciones. Esto sucede debido a que se proponen muchos ejercicios repetitivos y no por el contrario de tipo creativo y productivo no se desarrolla correctamente herramientas y destrezas que le permitan la aplicación de ese conocimiento científico para la solución de problemas en la vida real, tales problemas no permiten estimular el aprendizaje de los alumnos. Los estudiantes aprenden parcialmente una serie de reglas a ser memorizadas y trucos a ser ejecutados, que no tienen una coherencia lógica, no relacionan los nuevos conocimientos con el aprendizaje aritmético previo, y no aplican este aprendizaje en otros contextos que no sean solo los escolares. Sumado a esto existe dificultades para desarrollar una comprensión y manipulación del lenguaje de letras para plantearlo de manera simbólica es decir al lenguaje del álgebra.

Todos estos problemas afectan de una u otra forma al desarrollo de destrezas del estudiante en el ámbito del razonamiento, el pensamiento lógico, el pensamiento crítico, la argumentación fundamentada y la resolución de problemas. Esto conlleva a que el presente trabajo de investigación pretenda ser una ayuda y una guía tanto para el profesor como para el estudiante en el proceso de aprendizaje del sistema de ecuaciones. Por ello se va utilizar la metodología de resolución de problemas la cual es fundamental para la comprensión y dominio de sistemas de ecuaciones, se requiere necesariamente

de los estudiantes el desarrollo no sólo de destrezas y habilidades por lo que esta metodología ayuda a la ejecución de un análisis más crítico.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Es posible aplicar la metodología de resolución de problemas para la enseñanza y aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones en la Asignatura de Álgebra Elemental, a fin de tener una guía para los estudiantes del Segundo Semestre de la Carrera de Ciencias Exactas, de la Facultad de Ciencias de la Educación Humanas y Tecnologías, durante el período Marzo 2016- Julio2016?

1.3. PREGUNTAS DIRECTRICES

- ¿Qué tipo de metodologías utiliza el docente en la enseñanza y aprendizaje del sistema de ecuaciones?
- ¿Se está utilizando la metodología de resolución de problemas en el campo práctico de los estudiantes?
- ¿Se implementan actividades con metodología de resolución de problemas para el proceso de enseñanza aprendizaje del sistema de ecuaciones?
- ¿Se evalúan actividades que muestren el proceso de la metodología de resolución de problemas en los sistemas de ecuaciones?

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. Objetivo General

Aplicar la metodología de resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de sistema de ecuaciones en los estudiantes de Segundo Semestre de la Carrera de Ciencias Exactas, de la Facultad de Ciencia de la Educación de la Universidad Nacional de Chimborazo, durante el período Marzo 2016- Julio2016.

1.4.2. Objetivos Específicos

1. Diagnosticar que tipo de metodologías utilizada el docente en la enseñanza y aprendizaje del sistema de ecuaciones
2. Desarrollar las bases teóricas conceptuales de la metodología de resolución de problemas.

3. Elaborar una guía didáctica con estrategias de metodología de resolución de problemas para el proceso de enseñanza aprendizaje del sistema de ecuaciones.
4. Evaluar la guía didáctica con actividades que muestren el proceso de la metodología de resolución de problemas, específicamente en sistemas de ecuaciones, posterior a su aplicación.

1.5. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DEL PROBLEMA

En la actualidad la educación ha evolucionado en busca de la ampliación de conocimiento, para enriquecer la actividad educativa en el aula, mediante la implementación de sistemas educativos más innovadoras, las cuales utilizan nuevos métodos y técnicas para que los estudiantes adquieran un aprendizaje significativo, así de esta manera afrontar los nuevos desafíos que nos presenta cada vez más, tanto para los docentes como para los estudiantes (Lafourcade, 2005).

La metodología y técnica de resolución de problemas que se aplica para el aprendizaje de sistema de ecuaciones permite que los estudiantes tomen un rol activo en el proceso de enseñanza aprendizaje y se encuentren motivados para aprender, logrando así, que desarrollen habilidades y destrezas en cuanto se refiere al pensamiento lógico y creativo, en búsqueda de procesos innovadores para la solución de los problemas tanto universitarios como de la vida real. Además, es indispensable el desarrollo de estas habilidades y el tener bien afianzadas estas destrezas porque nos facilita el acceso a una gran variedad de carreras profesionales y por ende la oportunidad a varios lugares de trabajo, permitiéndonos interactuar con fluidez y eficacia en esta sociedad tan demandante. Por esta razón es muy importante que el docente aplique correctamente las metodologías de resolución de problemas

La importancia de este trabajo constituye una propuesta de acción para resolver un problema práctico y satisfacer una necesidad, ya que su objetivo primordial es proponer el diseño de estrategias orientadas a la aplicación de la metodología de Polya para facilitar la resolución de problemas en el área de sistema de ecuaciones.

Por ello considero importante que la aplicación de la metodología y resolución de problemas del sistema de ecuaciones contribuirá al desarrollo intelectual y permitirá un aprendizaje significativo por lo tanto se hace necesario la ejecución de una

investigación científica en donde se plasme los parámetros y procesos necesarios que nos ayudaran para posteriormente plantear un diseño, elaboración, aplicación y evaluación de una guía didáctica con el objetivo de disminuir la incidencia de este problema en los estudiantes, en temas de estudio de los sistemas de ecuaciones con los estudiantes del segundo semestre.

Los beneficiarios directos de esta investigación serán los estudiantes del segundo semestre de la escuela de ciencias de la educación, carrera de ciencias exactas de la Universidad Nacional de Chimborazo, ya que, mediante la participación activa mediante la guía didáctica, permitirá mejorar la enseñanza – aprendizaje, en el tema de sistema de ecuaciones. Por otro lado, otro de los beneficiarios indirectos sería el investigador y todas aquellas personas que utilicen la guía didáctica como documento de consulta y apoyo en la enseñanza.

Esta investigación es factible por la documentación e información existente y accesible para el investigador, así como la disponibilidad de los recursos económicos que serán financiados por el autor del presente trabajo, a más de esto se debe considerar el apoyo por parte de las autoridades, docentes, quienes facilitarán el tiempo requerido para aplicar las pruebas objetivas y fichas de observación durante la ejecución de la investigación.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIONES ANTERIORES CON RESPECTO DEL PROBLEMA QUE SE INVESTIGA.

Previo a la iniciación del presente trabajo investigativo, se ha realizado consultas en la que se ha encontrado trabajos similares a una de las variables, mismas que se detallan a continuación:

TEMA: “RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES. UNA PROPUESTA PARA EL CUARTO AÑO DE SECUNDARIA DESDE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS”

AUTOR: Figueroa Vera, Rocío Elizabeth. 2012, Puyo.

El objetivo general del trabajo es diseñar una propuesta didáctica para fortalecer en los alumnos las habilidades de resolución de problemas relacionados a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y algunas de las conclusiones obtenidas son:

La creación de problemas cuya solución se obtenga resolviendo un sistema de ecuaciones lineales dado, es una actividad que contribuye a estimular la habilidad de resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones. A pesar de no ser usual, la actividad es asumida con entusiasmo por los estudiantes.

En el marco de los sistemas de ecuaciones lineales, el GeoGebra puede usarse no sólo para visualizar las ecuaciones y para resolver los sistemas, sino para resolver problemas, contextualizados o no; en particular, problemas relacionados con la variación de los parámetros de las ecuaciones del sistema

TEMA: “LAS ECUACIONES LINEALES DESDE SITUACIONES COTIDIANAS”

AUTOR: Arenas Suaza, Viviana Sirley. 2013, Medellín.

La experiencia en las aulas de clase muestra en la temática de ecuaciones lineales un eje transversal con las demás ciencias del conocimiento, es por esto que esta propuesta de trabajo busca apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes del grado noveno en dicha temática, para ello se toma como referente teórico el constructivismo.

Para cumplir el objetivo se inicia con la elaboración de diferentes instrumentos que permitan al educador ver la concepción que tiene el estudiante de los conceptos de variable, igualdad, ecuación y solución de ecuaciones, luego se propone iniciar una transcripción del lenguaje cotidiano al simbolismo matemático donde se evidencie si el estudiante logra identificar la importancia de cada uno de los conceptos a trabajar para finalmente entrar en la solución de la ecuación siendo enfáticos en la viabilidad de la solución. Se propuso el desarrollo de esta propuesta de intervención en el aula, como una estrategia y una herramienta de apoyo para el estudio de la temática de ecuaciones lineales debido a la importancia que tienen este tema en la matemática escolar y teniendo presente que el estudiante debe desarrollar habilidades en la solución de situaciones problemas que se plantean a diario en el estudio de las ciencias exactas. Es por esto, que aplicar estas alternativas didácticas para su aprendizaje, contribuye sin duda alguna a que el estudiante pueda mejorar en la comprensión y actitud hacia la asignatura

2.2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.2.1. El aprendizaje

Se entiende como un medio para adquirir, procesar, comprender y aplicar información, la misma que se genera durante el crecimiento, maduración y desarrollo como personas, requerida para aprender del cuerpo, del psiquismo y de los procesos cognitivos que se dan en el sistema social organizado, sistematizado en ideas, pensamientos y lenguaje. (Figuroa, 2006)

Los procesos del aprendizaje son las actividades que realizan los y las estudiantes para alcanzar los indicadores de logro, que evidencian el nivel de eficiencia y competitividad que tienen para resolver los problemas de la vida cotidiana. Para que una persona

adquiera conocimiento debe aplicar varios procesos de aprendizaje. Entre estos procesos se pueden mencionar los siguientes:

- **Recepción de datos:** Se basa en el reconocimiento del mensaje.
- **Transferencia:** La persona puede responder preguntas y resolver problemas con apoyo de los conocimientos elaborados.
- **Comprensión de la información:** La persona, en base a sus conocimientos previos, sus intereses y habilidades interpreta el mensaje para elaborar nuevos conocimientos.
- **Retención a largo plazo:** La persona recuerda los conocimientos finalmente elaborados, durante determinado tiempo.

2.2.1.1. Tipos de Aprendizaje

Los estudiantes pueden adquirir conocimientos de diferentes formas. No existen formas de aprendizaje totalmente independientes. El aprendizaje se tipifica, de acuerdo con la actitud del interesado en aprender, de la siguiente manera:

- **Receptivo:** El o la estudiante comprende y reproduce el contenido sin experimentar algún descubrimiento.
- **Repetitivo:** El o la estudiante memoriza los contenidos sin comprenderlos o relacionarlos con sus conocimientos previos.
- **Por descubrimiento:** El o la estudiante descubre los conceptos y sus relaciones para adaptarlos a sus conocimientos previos.
- **Significativo:** El o la estudiante relaciona los conocimientos nuevos con los conocimientos previos para aplicarlos a su vida cotidiana.

2.2.1.2. Estrategias de Enseñanza Aprendizaje

La educación sigue siendo la respuesta trascendental para dotar a los estudiantes de los elementos intelectuales para sobrevivir a las transformaciones continuas del universo laboral y la expansión del conocimiento; lo que justifica la necesidad de la planificación y el uso de estrategias pedagógicas que fomenten los aprendizajes reflexivos y una educación integral.

Las estrategias en el ámbito pedagógico presuponen la planificación dinámica de acciones a corto, mediano y largo plazo; susceptibles al cambio, la modificación y la adecuación de sus alcances por la naturaleza pedagógica de los problemas a resolver; poseen un alto grado de generalidad de acuerdo con los objetivos y los principios pedagógicos que se asuman, así como la posibilidad de ser extrapoladas a diversas situaciones; y permiten lograr la racionalidad de tiempo, recursos y esfuerzos (Barriga & Hernández, Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, 1999).

Al establecer diferencias entre estrategias de enseñanza y estrategias de aprendizaje, es preciso tomar en cuenta que el proceso de enseñanza-aprendizaje es síntesis, aunque pueden diferenciarse tomando en cuenta que las estrategias de enseñanza, enfatizan en la planificación, el diseño, la secuenciación, la preparación y ejecución del contenido; mientras que las estrategias de aprendizaje se enfatizan las acciones de los alumnos durante el aprendizaje e influyen en la motivación, la asimilación, la interpretación, la retención y la transferencia de la información (Barriga & Hernandez, 2002)

En un contexto social que provee a los estudiantes todo tipo de información e instrumentos para procesarla, el papel del docente se centrará en ayudar a los estudiantes para que puedan, sepan y quieran aprender. Y en este sentido les proporcionará especialmente: orientación, motivación y recursos didácticos. Los objetivos educativos que pretenden conseguir el profesor y los estudiantes, y los contenidos que se tratarán buscando herramientas esenciales para el aprendizaje: lectura, escritura, expresión oral, operaciones básicas de cálculo, solución de problemas, acceso a la información y búsqueda "inteligente", metacognición y técnicas de aprendizaje, técnicas de trabajo individual y en grupo.

- **Contenidos básicos de aprendizaje:** Conocimientos teóricos y prácticos, exponentes de la cultura contemporánea y necesaria para desarrollar plenamente las propias capacidades, vivir y trabajar con dignidad, participar en la sociedad y mejorar la calidad de vida.
- **Valores y actitudes:** Actitud de escucha y diálogo, atención continuada y esfuerzo, reflexión y toma de decisiones responsable, participación y actuación social, colaboración y solidaridad, autocrítica y autoestima, capacidad creativa ante la incertidumbre, adaptación al cambio y disposición al aprendizaje continuo.

- **El contexto:** En el que se realiza el acto didáctico, según cuál sea el contexto se puede disponer de más o menos medios, habrá determinadas restricciones (tiempo, espacio), etc. El escenario tiene una gran influencia en el aprendizaje y la transferencia.
- Los recursos didácticos pueden contribuir a proporcionar a los estudiantes información, técnicas y motivación que les ayude en sus procesos de aprendizaje, no obstante, su eficacia dependerá en gran medida de la manera en la que el profesor oriente su uso en el marco de la estrategia didáctica que está utilizando. La estrategia didáctica con la que el profesor pretende facilitar los aprendizajes de los estudiantes, integrada por una serie de actividades que contemplan la interacción de los alumnos con determinados contenidos.

2.2.2. Proceso de Enseñanza Aprendizaje

El proceso enseñanza-aprendizaje, es la ciencia que estudia, la educación como un proceso consiente, organizado y dialéctico de apropiación de los contenidos y las formas de conocer, hacer, vivir y ser, construidos en la experiencia socio- histórico, como resultado de la actividad del individuo y su interacción con la sociedad en su conjunto, en el cual se producen cambios que le permiten adaptarse a la realidad, transformarla y crecer como personalidad.

El proceso como sistema integrado constituye un proceso de interacción e intercomunicación de varios sujetos, en el cual el maestro ocupa un lugar de gran importancia como pedagogo que lo organiza y conduce, pero en el que no se logran resultados positivos sin el protagonismo, la actitud y la motivación del alumno, el proceso con todos sus componentes y dimensiones, condiciona las posibilidades de conocer, comprender y formarse como personalidad. Los elementos conceptuales básicos del aprendizaje y la enseñanza, con su estrecha relación, donde el educador debe dirigir los procesos cognitivos, afectivos y volitivos que se deben asimilar conformando las estrategias de enseñanza y aprendizaje (Bermúdez, 2002).

2.2.2.1. Teoría Pedagógica.

Básicamente puede decirse que el constructivismo es el modelo que mantiene que una persona, tanto en los aspectos cognitivos, sociales y afectivos del comportamiento, no es

un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción de estos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, esta construcción se realiza con los esquemas que la persona ya posee (conocimientos previos), o sea con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea.

Esta construcción que se realiza todos los días y en casi todos los contextos de la vida, depende sobre todo de dos aspectos:

- 1.- De la representación inicial que se tiene de la nueva información y,
- 2.- De la actividad externa o interna que se desarrolla al respecto.

Todo aprendizaje constructivo supone una construcción que se realiza a través de un proceso mental que conlleva a la adquisición de un conocimiento nuevo. Pero en este proceso no es solo el nuevo conocimiento que se ha adquirido, sino, sobre todo la posibilidad de construirlo y adquirir una nueva competencia que le permitirá generalizar, es decir, aplicar lo ya conocido a una situación nueva.

El Modelo Constructivista está centrado en la persona, en sus experiencias previas de las que realiza nuevas construcciones mentales, considera que la construcción se produce:

- Cuando el sujeto interactúa con el objeto del conocimiento (Ausubel, 1983).
- Cuando esto lo realiza en interacción con otros (Vygotsky, 1991).
- Cuando es significativo para el sujeto (Ausubel, 1983).

Una estrategia adecuada para llevar a la práctica este modelo es “El método de proyectos”, ya que permite interactuar en situaciones concretas y significativas y estimula el “saber”, el “saber hacer” y el “saber ser”, es decir, lo conceptual, lo procedimental y lo actitudinal. En este Modelo el rol del docente cambia. Es moderador, coordinador, facilitador, mediador y también un participante más. El constructivismo supone también un clima afectivo, armónico, de mutua confianza, ayudando a que los alumnos y alumnas se vinculen positivamente con el conocimiento y por sobre todo con su proceso de adquisición (Sanhueza, 2016).

2.2.3. Metodología

2.2.3.1. Definición de metodología

Definición de Metodología: Ciencia que estudia los métodos del conocimiento, aplicación coherente de un método. Se la considera como el conjunto de métodos utilizados en la investigación científica (Mayer, 1983).

Parte del proceso de investigación o método científico, que sigue a la propedéutica, y permite sistematizar los métodos y las técnicas necesarias para llevarla a cabo. Los métodos elegidos por el investigador facilitan el descubrimiento de conocimientos seguros y confiables que, potencialmente, solucionarán los problemas planteados. La metodología ha obtenido diferentes definiciones o conceptos en diferentes campos y especialidades, aunque estos siempre han mantenido la esencia del concepto principal (Mayer, 1983).

2.2.3.2. Tipos de metodología

- **Metodologías cuantitativas**

Las metodologías cuantitativas permiten a los investigadores evaluar dentro de un contexto más controlado. Estos tipos de estudios tienen una tendencia a "asignar números a los datos" reunidos. Muchos tipos de experimentos diferentes son parte de esta metodología tan grande. Estos estudios incluyen los análisis estadísticos y correlacionales, las encuestas y los experimentos controlados. Los análisis estadísticos y correlacionales consisten en analizar la relación entre múltiples variables. Los estudios de encuestas están conducidos para recolectar información para medir diferentes variables sobre las creencias de los participantes acerca de una variedad de temas (Mayer, 1983).

- **Metodologías cualitativas**

Las metodologías cualitativas difieren enormemente del modelo cuantitativo, ya que buscan obtener información que refleje el contenido y significado de un evento o la perspectiva de un individuo. Las metodologías cualitativas incluyen las entrevistas, la observación, la investigación de campo y los cuestionarios/encuestas. Las entrevistas, que pueden ser estructuradas o sin estructura, son similares a las encuestas, pero son

frecuentemente más intensivas en su búsqueda de detalles. La observación es en forma de participación, mientras el investigador recolecta datos dentro del mundo del sujeto. Otra forma de estudio participativo es el trabajo de campo, donde los investigadores pueden observar en primera fila, tomar notas y después analizar los resultados. Los cuestionarios, como las encuestas, son formularios en blanco que los investigadores le piden a los participantes que completen (Mayer, 1983).

2.2.4. Resolución de problemas

2.2.4.1. Introducción

La resolución de problemas y en especial mediante sistemas de ecuaciones, se puede analizar en un contexto como el proceso complejo para el que desea aplicarla, no hay reglas fijas ni resultados teóricos que garanticen los resultados finales, pero siempre estarán adecuados a la realidad.

Estas metodologías ayudan en cualquier caso a llevar a cabo la resolución de un problema, por ello, debe ser metódico y habituarse a proceder de un modo ordenado siguiendo las fases en el desarrollo de dicha resolución. Se puede decir que la resolución independiente de problemas difíciles ayudará al estudiante mucho más que los aforismos que algunos autores proponen, aunque para un comienzo estos puedan no afectar la resolución final.

Se ha podido observar en investigaciones recientes que el conocimiento conceptual y procedimental para la resolución de problemas se desarrolla paso a paso, el aumento de un tipo de conocimiento soporta el aumento del otro tipo, que a su vez soporta un aumento en el conocimiento primero. Por tanto, se puede decir que este conocimiento conceptual es flexible y no está ligado con un tipo específico de problemas y por consiguiente se puede generalizar.

2.2.4.2. Definición.

García, J. E. (2007) sostiene que:

La metodología de resolución de problemas (RP) tiene la intención de transmitir, de una manera sistemática, los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas. Tal experiencia debe permitir al alumno manipular objetos matemáticos, activar su capacidad mental, ejercitar su creatividad y reflexionar sobre su propio

aprendizaje (metacognición) al tiempo que se prepara para otros problemas con lo que adquiere confianza en sí mismo.

Esta actividad -central en el campo que nos ocupa- remite a trabajar la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos, fundamentalmente en dos direcciones: a partir del contexto deben crearse esquemas, formular y visualizar los problemas, descubrir relaciones y regularidades, hallar semejanzas con otros problemas, y trabajando entonces matemáticamente, hallar soluciones y propuestas que necesariamente deben volverse a proyectar en la realidad para analizar su validez y significado (Mayer, 1983).

Según Ballester (1992) señala: Un problema es un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de la ciencia o la práctica, en lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución. Se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos.

Mayer, R. (1983). Utiliza indistintamente, a lo largo de su estudio, los términos pensamiento, cognición y resolución de problemas y lo hace sobre la base de la siguiente caracterización:

- El pensamiento es cognitivo, pero se infiere de la conducta. Ocurre internamente y debe ser inferido indirectamente.
- El pensamiento es un proceso que implica manipulación de, o establece un conjunto de operaciones sobre, el conocimiento.
- El pensamiento es dirigido y tiene como resultado la “resolución” de problemas o se dirige hacia la solución.

Así, el pensamiento, según Mayer, es lo que sucede cuando una persona resuelve un problema, es decir, produce un comportamiento que mueve al individuo desde un estado inicial a un estado final, o al menos trata de lograr ese cambio, llegando a definir directamente el pensamiento como resolución de problemas (Mayer, 1983).

La resolución de problemas matemáticos ha mantenido un doble lugar en la enseñanza como ámbito privilegiado para el desarrollo del pensamiento con el objetivo de que los

alumnos sean buenos “resolutores de problemas”, esto es, buenos pensadores y como objetivo más concreto, dirigido a que los alumnos sean capaces de resolver problemas.

2.2.5. Metodología de resolución de problemas matemáticos y de aprendizaje.

La metodología de resolución de problemas es un conjunto de procedimientos matemáticos conformado por diversas operaciones y sirve para apoyar los conocimientos teóricos y mejorar su comprensión. Por ello, conviene no únicamente resolver los problemas correctamente. Pero aplicar el método no es suficiente, también hay que presentar los resultados obtenidos de una manera coherente. Evidentemente la resolución de problemas está estrechamente relacionada con la creatividad, que algunos definen precisamente como la habilidad para generar nuevas ideas y solucionar todo tipo de problemas y desafíos.

A partir de los estudios de (Polya G, 1944) se comienzan a desarrollar entonces estrategias para la enseñanza de solución de problemas. Por esta razón estudiosa del tema contextualizan este método para transmitir a sus estudiantes pensamientos eficaces en la resolución de verdaderos problemas de la vida. Cabe señalar que el trabajo de Polya concierne a la matemática elemental y está dirigido a la enseñanza. A pesar de que los estudios de Polya no son sistemáticos ni teóricos, sino más bien a través de observaciones particulares, comentarios sobre estrategias heurísticas y multitud de ejemplos, desde su libro "Cómo resolverlo" se identifica un método general, donde propone reglas lógicas plausibles y generalizadas que guían la solución de problemas. A continuación, proponemos el método de solución general, en cada paso Polya propone una serie de reglas heurísticas bastante sugerentes, pero lo más notorio consiste en que la mayoría de ellas van dirigidas a la segunda fase, de lo que él denominó su “lista”. Por tanto, por vez primera las pesquisas eran dirigidas hacia las fuentes de la inspiración poicareana (Polya, 1987).

2.2.5.1. Comprender el problema

Aquí se debe comprender la parte verbal del problema, se debe releer e identificar las incógnitas y los datos. El alumno debe considerar las principales partes del problema atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada con el problema, se debe dibujar y destacar en ella la incógnita y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente introducir una notación adecuada.

Se hacen preguntas tales como: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, etc.

2.2.5.2. Concebir un plan

De la comprensión del problema a la concepción de un plan el camino puede ser largo y tortuoso; se tiene un plan cuando se sabe, al menos a “grosso modo”, que cálculos, que razonamientos o construcciones se habrá de efectuar para determinar la incógnita, lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirlo a esa idea o solución de ese problema sin imponérsele.

Si el alumno no puede resolver el problema propuesto, se le invita a resolver otro problema similar al propuesto. De hecho, lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan.

2.2.5.3. Ejecución de un plan

El plan proporciona una línea general, se debe asegurar que los detalles encajen bien en esa línea. Al ejecutar su plan de la solución, el alumno comprueba cada uno de los pasos. ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

2.2.5.4. Examinar la solución obtenida

Esta es una visión retrospectiva, en donde el estudiante verifica el resultado, es decir volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla. Un buen profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado, ¿puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

En cada una de estas etapas el docente desempeña un papel importante y fundamental, el será el facilitador, supervisará cada uno de estos pasos y los guiará al alcance de los resultados esperados. Esta es la metodología de resolver problemas con el cual vamos a trabajar, en efecto, si el alumno logra resolver con éxito el problema está desarrollando su habilidad en la resolución de problemas, el docente que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles mayor número de ocasiones de imitación y práctica.

Polya (1987), Elaboró un Breve Diccionario de Heurística, que consiste en una colección de técnicas y notas históricas, ordenadas alfabéticamente y un tanto elaboradas. Aquí analiza en qué consiste la generalización, la analogía, las reglas del descubrimiento, el profesor de matemática tradicional, el razonamiento heurístico, etcétera. Polya, por ejemplo, diferencia “heurística” de “heurística moderna”. En el primer caso se refiere a una ciencia bastante mal definida y que se relaciona con la lógica, la filosofía y la psicología, en la cual se exponen métodos generales de manera poco exhaustiva, en cambio, en el segundo caso se trata de “comprender el método que conduce a la solución del problema, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico, como psicológico.

2.2.6. Evaluación de la metodología de Polya

En el desarrollo de la guía utilizamos estrategias metodológicas, definiciones físicas, geométricas y matemáticas, se aplica de la siguiente manera.

- Lea comprensivamente y con sus compañeros formando grupos discutan los temas leídos, con el fin de compartir sus criterios. Posteriormente con la ayuda del maestro mediante la utilización de las estrategias metodológicas: estudio de casos y lluvia de ideas, permitan que el estudiante defina físicamente el fenómeno estudiado
- El maestro debe previamente enviar a que el alumno investigue lo relacionado con el tema a desarrollar.
- Para proceder a conceptualizar las definiciones geométricas, mediante el gráfico el maestro debe aprovechar los conocimientos que el estudiante posee en relación a los ángulos y triángulos, utilizando la información y comunicación, interpretando la definición y plasmarle en un gráfico, valiéndose de la geometría que es la ciencia que presta más atención a la forma.

La resolución de problema en matemáticas sirve para apoyar los conocimientos teóricos y mejorar su comprensión. Por ello, conviene no únicamente resolver los problemas correctamente, sino aprender el método de trabajo utilizado. Pero aplicar la metodología no es suficiente, también hay que presentar los resultados obtenidos de una manera coherente, debido a que esta información que hay que ofrecer al estudiante el primer día de clase para que pueda desarrollar su capacidad de resolución de problemas de una

manera activa para lo cual hay una serie de pasos que los docentes realizan instintivamente y que generalmente no transmiten a los estudiantes.

A continuación, presentamos una lista de pasos a seguir en la resolución de problemas junto con algunos comentarios que pretenden ayudar a los estudiantes para llegar a la solución. Lo primero que se debe realizar es leer el enunciado, apuntando todos los datos significativos que ofrece el problema posterior al cual se analiza qué es lo que pide el problema apoyándose un esquema o dibujo del mismo, el siguiente paso es situar el problema, determinando la fórmula a utilizar a partir de los datos planteados en el ejercicio y finalmente resolver el problema para lo cual se buscará problemas similares ya resueltos, con la finalidad de encontrar ideas que permitan vislumbrar el camino de la solución.

En algunos casos será necesario, acudir a los docentes, preferentemente en horas de tutorías, una vez obtenida la solución se deberá comprobar que es coherente con las condiciones del enunciado.

2.2.7. Características de la Metodología de resolución de problemas

Desde el campo de la didáctica de las ciencias la pregunta que nos hacemos es: ¿Qué es un problema?, la cual podemos dividirla en otras interrogantes como: ¿Qué es un problema para los estudiantes?. La respuesta parece simple pero no lo es tanto, un problema para los alumnos es cualquier situación cualitativa o cuantitativa que se les plantea dentro del contexto escolar y a la cual tienen que dar una solución.

Para los expertos un problema es una tarea que, de entrada, no tiene solución evidente, y como consecuencia exige investigación.

Otra cuestión relevante que se plantea dentro del marco educativo es que un determinado problema existe en función de la persona que tiene que resolverlo, y en esta línea hay que destacar, por sus implicaciones didácticas, que lo que para los estudiantes es un problema para el profesor es un ejercicio en el sentido de que conoce, a priori, cual es la solución y el camino para llegar a ella.

La siguiente pregunta que se puede formular es: ¿Por qué realizar actividades de resolución de problemas? La respuesta que han dado algunos expertos se apoya en diferentes tipos de argumentos (Martinez, 1990).

2.2.7.1. Educativos

La resolución de problemas constituye un procedimiento activo de aprendizaje donde los alumnos son los protagonistas. Puede resultar una tarea altamente motivadora colaborando eficazmente a modificar las preconcepciones que puedan presentar.

2.2.7.2. Científicos

Los alumnos tienen la ocasión de familiarizarse con el modo en que ‘trabajan los científicos’ haciéndose conscientes de que la finalidad primordial de la Ciencia es precisamente resolver los problemas que el hombre se ha ido planteando en el curso del tiempo. Este tipo de tareas va a favorecer en ellos actitudes científicas como la curiosidad, la perseverancia etc.

2.2.7.3. Ideológicos

Con actividades de resolución de problemas se pretende que los alumnos traspasen los límites de la escuela y se familiaricen con problemas del mundo real. En este sentido los problemas que se plantean en la clase deberían ser relevantes desde un punto de vista tecnológico y social.

2.2.8. Etapas en la metodología de resolución de problemas

Antes de hablar de metodologías de solución de problemas debes tener muy claro el concepto de método, que a lo largo de la historia ha llamado la atención de gran cantidad de filósofos y científicos. El Diccionario Larousse define el término método como "el conjunto de operaciones ordenadas con que se pretende obtener un resultado".

La metodología es la ciencia que aplica este método. Existen muchos tipos de metodologías, como la metodología de investigación, metodología de enseñanza-aprendizaje, etc., así como la metodología de solución de problemas, que aplicamos constantemente en la vida diaria (Martinez, 1990).

La resolución de los problemas consta de cinco etapas que garantizan la llegada correcta a la solución: identificación del problema, planteamiento de alternativas de solución, elección de una alternativa, desarrollo de la solución y evaluación de ésta.

2.2.8.1. Identificación del problema

La identificación del problema es una fase muy importante en la metodología, pues de ella depende el desarrollo ulterior en busca de la solución. Un problema bien delimitado es una gran ayuda para que el proceso general avance bien; un problema mal definido provocará desvíos conceptuales que serán difíciles de remediar posteriormente. En esta etapa es fundamental el análisis de la información inicial con el fin de distinguir los datos pertinentes de los que no lo son, de manera que se pueda elegir la configuración más conveniente respecto a las soluciones posibles. También deben definirse los datos de salida que garanticen la continuidad del proceso para que sea más fácil eliminar las expectativas negativas (Martinez, 1990).

Ejemplo:

Juan compró un ordenador y un televisor por 2000 € y los vendió por 2260 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%?

2.2.8.2. Planteamiento de alternativas de solución

Después de la definición del problema y del análisis de los datos de entrada, el proceso continúa con el análisis de las alternativas de solución. Por lo general, la solución de un problema puede alcanzarse por distintas vías. Es útil tratar de plantear la mayor cantidad de alternativas posibles de solución, pues de esta forma las probabilidades aumentan a favor de encontrar la vía correcta. Se debe destacar que no es conveniente extender demasiado el número de alternativas, pues si el número de éstas es demasiado alto, se presentará una mayor dificultad para elegir la mejor de todas, que es en definitiva el objetivo del proceso (Martinez, 1990).

Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

Llamemos entonces:

$x \rightarrow$ precio del ordenador.

$y \rightarrow$ precio del televisor.

2.2.8.3. Elección de una alternativa

Después de tener todo el repertorio de alternativas, es necesario pasar a otra etapa: la elección de la mejor entre todas las posibilidades. Esta fase es muy importante porque de la elección realizada depende el avance final hasta la solución. La orientación hacia delante supone la irreversibilidad si la decisión es acertada o una "reversibilidad onerosa", pues si la decisión no es acertada, es necesario retroceder, lo que afecta la optimidad del proceso (Canós & Mauri, 2005).

Por lo tanto, es necesario que cada alternativa sea bien analizada para que la toma de decisiones sea bien justificada. Deberás elegir la alternativa que sea la más adecuada para la solución del problema, tomando en cuenta las características del problema y las características que deberá tener la solución, así como los elementos, datos o información con la que cuentas.

En esta segunda fase vamos a efectuar el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$x + \frac{10x}{100} \rightarrow \text{Precio de venta del ordenador.}$$

$$x + \frac{15y}{100} \rightarrow \text{Precio de venta del televisor.}$$

2.2.8.4. Desarrollo de la solución

Después de decidir cuál es la mejor alternativa de todas, se llega a la etapa de la solución. En esta fase, a partir de los datos relacionados con la alternativa seleccionada, se aplican las operaciones necesarias para solucionar el problema. La selección de los procesos también debe ser determinada en función de lo óptimo, es decir, las operaciones deben llegar a la solución por el camino más corto para garantizar la mayor

eficiencia en el funcionamiento. Si la alternativa es la óptima, llevará a la solución deseada que fue prevista en la identificación del problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores:

$$\begin{cases} x + y = 2000 \\ x + \frac{10x}{100} + y + \frac{15y}{100} = 2260 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2000 \\ 11x + 115y = 226000 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} -110x - 110y = -220000 \\ 110x + 115y = 226000 \\ \hline 5y = 6000 \end{array}$$

$$y = 1200$$

$$x + 1200 = 2000 \qquad x = 800$$

800 € \rightarrow precio del ordenador.

1200 € \rightarrow precio del televisor.

2.2.8.5. Evaluación de la solución

Luego de haber desarrollado la solución queda aún una etapa, que es la evaluación. En los procesos industriales a este procedimiento se le llama control de la calidad y consiste en determinar que la solución obtenida es lo que se esperaba conseguir comprobando que el resultado sea correcto. En esta fase se deben retroalimentar los procesos ya realizados y tratar de llevarlos a un grado mayor de optimidad, pues es más

eficiente en la solución de un problema, y llega a su objetivo final con la mayor economía de procedimientos que sea posible (Canós & Mauri, 2005).

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta:

$$x + y = 2000$$

$$800 + 1200 = 2000$$

Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

2.2.9. Resolución de problemas dentro del área de las matemáticas

Durante las últimas décadas han sido muchos los trabajos que, tanto desde una perspectiva teórica como desde una perspectiva experimental, han intentado sacar a la luz los factores que inciden en el aprendizaje de las ciencias. Gran parte de la reciente literatura en didáctica de las ciencias se ha ocupado en la identificación, explicación y mejora de las dificultades de los estudiantes en la comprensión de conceptos científicos. En dicha literatura, se pone en evidencia la barrera que supone el conocimiento previo del alumno, sus preconcepciones, en el proceso de conceptualización científica

La búsqueda de calidad en la enseñanza ha llevado al desarrollo de diferentes estrategias pedagógicas y de investigación en este campo. Los resultados de dichas investigaciones señalan múltiples causas de los diversos niveles de aprendizaje (memorístico, creativo, innovador), relacionados con aspectos que van desde el conocimiento de la disciplina que se enseña hasta la aplicación de diferentes alternativas de enseñanza-aprendizaje, sin dejar de lado otros como concepciones, contextos, actitudes y habilidades, tanto de estudiantes como de docentes. Se ha mencionado que las prácticas educativas deben ir acorde con los tiempos, la tecnología, pero sobre todo que estén centradas en el trabajo de los alumnos, que se transformen en entes activos de su propio aprendizaje y que este aprendizaje sea efectivo, eficiente y eficaz; que él sea capaz con lo aprendido de resolver cualquier problema que se presente.

La gran mayoría de metodologías fueron desarrolladas en diferentes escuelas de casa de educación superior, muchas veces alejadas del quehacer pedagógico, que se cuestionaron la forma en que formaban a sus futuros egresados, por ejemplo, las ABP, la resolución de problemas y otras conocidas como metodologías activas de aprendizaje.

En este contexto es donde los profesores deben identificar las necesidades de adaptación, de conocimientos requeridos y de cómo se aplicarán dichos conocimientos cuando el alumno se ponga en contacto con la realidad. Es aquí donde estas metodologías activas sobran vigencia, pero su aplicación requiere de un elevado grado de implicancia por parte de los alumnos (Canós & Mauri, 2005).

Una de las metodologías activas es la resolución de problemas, y antes de describir en qué consisten y como se aplican se hace necesario dejar en claro algunos conceptos importantes.

2.2.10. El Algebra Elemental

2.2.10.1. Definición

El término álgebra viene del título de la obra del matemático árabe Mahommed ibn Musa al-Kharizmi, que significa Mahommed, hijo de Musa, natural de Kharizm, a-jabr w'al-muqabalah, que significa transposición y eliminación. El término parece adecuado si consideramos que el álgebra es una de las matemáticas que se encarga de resolver las ecuaciones y ello pasa por alguna serie de simplificaciones en base a eliminaciones. Al inicio de la historia del álgebra fue importante la participación de los egipcios y babilónicos, los cuales resolvieron las primeras ecuaciones lineales y algunas cuadráticas (Mayer, 1983).

El álgebra, la mayoría de las veces da la solución mediante símbolos que representa números; esta representación numérica mediante literales o símbolos, además de operaciones que resumen las operaciones aritméticas son debidas a Galois. Teniendo en cuenta los trabajos de investigación en didáctica del álgebra, identificaremos lo que los investigadores consideran una competencia en álgebra elemental, según el dominio de problemas algebraicos que abordaremos.

Esta competencia algebraica supondrá mucho más que la simple manipulación de símbolos; para poder definirla, estructuraremos el saber algebraico alrededor de dos dimensiones principales, naturalmente no independientes:

- **La dimensión útil:** el álgebra es considerada como un útil para resolver problemas que provienen de contextos internos o externos a la matemática.
- **La dimensión objeto:** el álgebra es considerada como un conjunto estructurado de objetos como ser ecuación, incógnitas, función, variable, parámetros, inecuaciones, dotados de propiedades, de modos de tratamientos, de modos de representación permitiendo estos tratamientos: escrituras algebraicas, gráficos, notaciones funcionales.

La historia del desarrollo algebraico confirma esta doble dimensión del álgebra, la imbricación de los desarrollos de “objeto” y “útil” y permite mostrar que “el útil” solamente adquiere y acrecienta su rendimiento al hacer de él mismo un objeto de estudio profundo. La ruptura entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico será considerada como un elemento transversal a estas dos dimensiones (Mayer, 1983).

2.2.11. El álgebra para resolver problemas de diferentes tipos

Se trata de problemas que tienen por objetivo la búsqueda de uno o más números incógnita verificando las relaciones indicadas en un enunciado en lenguaje natural. Es la entrada al álgebra privilegiada en la enseñanza: la resolución algebraica de este tipo de problemas pasa por la escritura de relaciones explicitadas entre datos e incógnitas, es decir el planteo de ecuaciones, y luego la movilización de procedimientos de tratamiento casi automáticos para encontrar la solución). Los problemas que figuran en la mayoría de los libros de texto son ejemplo de esta clase de problemas. Por ejemplo:

“Hace tres años, el triple de la edad de Patricia era exactamente 30. ¿Cuántos años tiene hoy Patricia?”

En relación con esta “entrada” al álgebra, muchos investigadores han señalado numerosas dificultades, algunas de las cuales señalamos a continuación:

Si los problemas de esta clase son compatibles con una resolución aritmética, los alumnos privilegian este tipo de resolución por su familiaridad con este dominio y

entonces se pierde el valor de útil del álgebra, el álgebra se impone más como una necesidad de contrato que como una necesidad de la situación. Poner en evidencia el valor útil del álgebra supone resolver problemas que los alumnos no puedan resolver por medios puramente aritméticos.

Para la entrada en el álgebra se utilizan generalmente este tipo de problemas que involucran una sola incógnita. Si se quiere salvar esta dificultad de pérdida de valor de útil señalada en el ítem anterior, es necesario complejizar los problemas, lo que trae aparejado una compleja estructura y muchos investigadores muestran lo inaccesible del planteo de la ecuación para los debutantes, quienes traducen directamente los enunciados sin preocuparse de los fenómenos de no congruencia semántica.

Cortés, Vergnaud y Kavafian (1990) señalan que en situaciones representables por ecuaciones del tipo $ax+b=cx+d$ la resolución algebraica aparece más operatoria que la resolución aritmética, y precisan a su vez, que estos problemas presentan serias dificultades a los alumnos principiantes, ya que la resolución de este tipo de ecuaciones demanda operar con una cantidad desconocida, siendo esto rechazado por los estudiantes.

Por otra parte, plantean que el álgebra toma una significación más clara en la resolución de problemas con dos incógnitas, aunque ellos mismos señalan que serían problemas complejos para iniciar a los alumnos en el álgebra.

De esta manera, dice Cortes y Vergnaud (1990), enfrentamos una paradoja: el álgebra resulta conceptualmente delicada justamente en el momento en que se torna más operativa que la aritmética. Es importante destacar que no se desprende, de los trabajos señalados, que estos tipos de problemas no deban ser trabajados en la clase; simplemente las investigaciones ponen de relieve las dificultades que acarrea la elección de cierto tipo de problemas para introducir a los alumnos en prácticas algebraicas.

Estas dificultades son tales en el marco de una concepción del aprendizaje y la enseñanza de la matemática como la que sustenta la mayoría de los trabajos señalados y a la cual nosotros suscribimos, concepción que otorga un rol fundamental a construcción del sentido de los conocimientos matemáticos y pueden no serlas en otro marco (Mayer, 1983).

2.2.12. Problemas que requieren algún tipo de generalización

Chevallard ve en el álgebra una generalización de la aritmética, en el sentido de que el álgebra es un útil esencial para acceder a propiedades numéricas (Cutz, 2005).

El lenguaje algebraico permite memorizar la génesis de una expresión numérica para deducir sus propiedades. El álgebra se opone así a la aritmética en la cual una ley de simplificación se impone para finalizar los cálculos. ¿Qué significa esto? Cuando se resuelve un problema aritmético, un cierto cálculo, por ejemplo, 8×5 , termina reducido a un resultado numérico, en este caso 40. Al escribir el resultado, perdemos “el origen” del mismo puesto que 40 podría ser tanto el resultado de 4×10 como de $3 + 37$, etc. En cambio, el álgebra permite “guardar” la génesis de una expresión para analizar sus propiedades. Por ejemplo, pensemos en el siguiente problema:

“Explicar por qué si se eligen dos números cualesquiera que sumen 3000 y se realizan con ellos las siguientes cuentas el resultado que se obtiene es siempre es 21049”

1. Multiplicar los números elegidos
2. Sumar 7 a cada uno de los números elegidos y multiplicar los nuevos números obtenidos.
3. Restar el resultado obtenido en 2 menos el resultado obtenido en 1

Teniendo en cuenta que hay una exigencia de generalización, se puede traducir el enunciado mediante una escritura como la siguiente:

$a \times b$

$$(a+7) \times (b + 7) = axb + 7xa+7xb + 49 = axb + 7(a+b)+ 49$$

$$7(a+b) + 49 = 7 \times 3000 + 49.$$

Este último punto pone en “evidencia” que, en este tipo de escritura, no se pierde la génesis de las diferentes operaciones realizadas. Asimismo, la “operatoria algebraica” está “al servicio” de la explicación de un cierto resultado general, y no como una práctica rutinaria sin sentido. Creemos que es importante que, en los primeros aprendizajes, estos aspectos operatorios estén “al servicio” de la resolución de algún tipo de problemas (Mayer, 1983).

Vemos, así como el álgebra es un útil privilegiado para probar propiedades de los números. El lenguaje algebraico permite formular problemas o propiedades generales y luego resolverlos sistemáticamente. Si bien este tipo de problemas tienen un interés matemático relevante, varios investigadores muestran las dificultades de los alumnos en utilizar el simbolismo algebraico para expresar propiedades generales y como medio de prueba.

Por ejemplo, ¿cómo resuelven los alumnos un problema como el siguiente?:

“Un chico multiplica un número por 5, le suma 12. Luego sustrae el número inicial y divide el resultado por 4. Dice que el resultado obtenido supera en 3 unidades al número inicial. Y piensa que esto pasará cualquiera que sea el número inicial. ¿Tiene razón?”

Muy pocos alumnos llegan a la expresión $(5x + 12 - x) : 4$ y luego, después de un cálculo, a $x+3$.

Algunos llegan, pero no a través de un cálculo algebraico.

Muchos formulan algebraicamente tales problemas, pero no utilizan el álgebra para concluir, volviendo sobre el cuadro numérico a través de una prueba pragmática (probando con ejemplos).

La aparición de dificultades no significa, como hemos señalado en el ítem anterior, que este tipo de problemas deban estar fuera de la enseñanza, sino que la implementación de los mismos presenta dificultades que el docente deberá conocer y que futuras investigaciones deberán abordar. Por el momento, creemos que el desarrollo de un tipo de práctica algebraica que contemple diferentes funciones del álgebra, aún con las dificultades que suelen aparecer, puede permitir un mejor acercamiento del alumno a este “mundo” hasta ahora desprovisto de sentido (Cutz, 2005).

Podemos incluir en este rubro, en tanto problemas de generalización, los problemas ligados a la construcción de fórmulas. En estos problemas los alumnos deberán explorar regularidades, encontrar estructuras, generalizar procedimientos.

Por ejemplo:

Encontrar una fórmula que permita calcular rápidamente la suma de 10 números consecutivos cualesquiera, sin necesidad de tener que hacer las 9 sumas

Los alumnos deben comprender que deben buscar una fórmula que le sirva para cualquier secuencia de 10 números consecutivos, como ser 34; 35; 36; ...43 o 1872; 1873; 1881, etc. En este caso se trata de la búsqueda de un procedimiento económico de cálculo que involucra el análisis de una estructura y la identificación de regularidades:

$$34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 = 34 + 34 + 1 + 34 + 2 + \dots + 34 + 9 \\ = 34 \times 10 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9$$

Para cualquier suma del tipo $a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a + 9)$, la fórmula $10 \times a + 45$ permite calcular el resultado.

Otras preguntas podrían derivarse: ¿qué se modifica en la fórmula si en lugar de 10 números consecutivos se consideran 20? ¿Y si se consideran n números consecutivos? (Cutz, 2005).

2.2.13. Sistema de Ecuaciones

Es un conjunto de ecuaciones para las que vamos a buscar una solución común.

Los sistemas los vamos a clasificar en lineales y no lineales. Los sistemas de ecuaciones lineales son aquellos en los que todas las ecuaciones son de primer grado y se llaman así porque su representación gráfica es una línea recta (Cutz, 2005).

Vamos a explicar el concepto de solución de un sistema. Para ello vamos a utilizar un sistema lineal con dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{array} \right\}$$

La pareja de valores $(x, y) = (1, 0)$ no es solución del sistema al sustituir dichos valores en el sistema las igualdades aritméticas que resultan son falsas. (Las ecuaciones no quedan satisfechas).

$$2 \cdot 1 + 0 \neq 5 \text{ y } 1 + 0 \neq 3$$

La pareja de valores (2,1) sí que es solución del sistema porque “satisface” todas las ecuaciones

$$2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ y } 2 + 1 = 3$$

2.2.14. Método de resolución de ecuaciones paso a paso

Se muestra a continuación un ejemplo secuencial del método:

En una empresa trabajan 60 personas. Usan gafas el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 11. ¿Cuántos hombres y mujeres hay en la empresa? (Cutz, 2005).

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema. Llamemos entonces:

$x \rightarrow$ número de hombres.

$y \rightarrow$ número de mujeres.

II. Plantear el problema

En esta segunda fase vamos a efectuar el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado:

$\frac{16x}{100} \rightarrow$ Hombres con gafas.

$\frac{20y}{100} \rightarrow$ Mujeres con gafas.

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 16x + 20y = 1100 \end{cases}$$

$$x = 60 - y$$

$$16(60 - y) + 20y = 1100$$

$$960 - 16y + 20y = 1100$$

$$4y = 140$$

$$y = 35$$

$$x + 35 = 60$$

$$y = 25$$

35 → Número de hombres.

25 → Número de mujeres.

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta:

$$x + y = 60$$

$$35 + 25 = 60$$

Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

La resolución e interpretación de los sistemas de ecuaciones lineales son consideradas el problema central del álgebra lineal (Silva, 2009). Por un lado, son de carácter aplicativo; esto es, los sistemas de ecuaciones lineales son el modelo matemático para muchos problemas o fenómenos reales en distintas áreas de conocimiento (Física, Biología, Química, Economía, etc.) (Cutz, 2005).

Por el otro, son sumamente importantes para el desarrollo e interpretación de muchos conceptos importantes en álgebra lineal; como matriz, determinante, inversa de una matriz, rango, independencia lineal, cambio de bases, etc. En este apartado, daremos una breve descripción de la importancia de la resolución de los sistemas de ecuaciones

lineales en la teoría de matrices y transformación lineal. Con el objetivo de mostrar que su resolución no sólo es el problema central del álgebra lineal, sino el corazón mismo del álgebra lineal.

Se tiene especial interés a través de las actividades, que el alumno logre hallar el conjunto solución, aún sin conocer hasta el momento, cuál era el método que estaba utilizando debiendo ser el docente quién lo condujera a ello, para discutir luego, cuál o cuáles serían las técnicas más convenientes para la resolución de los sistemas de ecuaciones, si se podría utilizar siempre un solo método para encontrar las soluciones, cuestión ésta sobre la que no se reflexiona en la enseñanza tradicional y se presentan los métodos independientes como si no existiera la posibilidad de trabajarlas en forma combinada (Cutz, 2005).

2.3. DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

Analogía. - Comparar o relacionar dos o más seres u objetos a través de la razón; señalando características generales y particulares comunes que permiten justificar la existencia de una propiedad en uno,

Cognitivos. - La cognición es la facultad de un ser vivo para procesar información a partir de la percepción, el conocimiento adquirido y características subjetivas que permiten valorar la información.

Conjetura. - Afirmación de un resultado, sin ofrecer suficiente evidencia que la demuestre o la refute. Una conjetura se crea a partir de observaciones.

Dialéctico.- Parte de la filosofía que se ocupa del razonamiento y de las leyes de éste, las formas y las maneras de expresarse.

Ecuación lineal. - Ecuación de primer grado, es decir, ecuación en la que la o las incógnitas aparecen elevadas a la potencia 1. Por ejemplo, $2(x-3) + 2x=x-1$, es una ecuación de grado uno, o de primer grado, o “lineal”.

Equivalencia. - Propiedad que presentan dos cantidades de tener el mismo valor. Entonces, decimos que dos cantidades son equivalentes si son iguales.

Heurístico. - Esta capacidad es una característica inherente a los seres humanos, ya que a través de esta los individuos podemos descubrir cosas, inventar otras tantas, resolver problemas mediante la creatividad o el pensamiento lateral, entre otras alternativas.

Metacognición.- Manera de aprender a razonar sobre el propio razonamiento, aplicación del pensamiento al acto de pensar, aprender a aprender, es mejorar las actividades y las tareas intelectuales que uno lleva a cabo usando la reflexión para orientarlas y asegurarse una buena ejecución.

Miembro de una ecuación. - Cada una de las dos expresiones que quedan a un lado y otro del signo igual “=” de una ecuación. El de la izquierda recibe el nombre de “primer miembro” y el de la derecha, segundo miembro.

Postulado. - Proposición que se acepta como verdadera, por no existir algún principio del que se pueda deducir

Términos semejantes. - Son los términos que contienen la misma letra o grupo de letras en una expresión algebraica.

2.4. VARIABLES

2.4.1 INDEPENDIENTE

Metodología de resolución de problemas.

2.4.2 DEPENDIENTE

Enseñanza-Aprendizaje del sistema de ecuaciones

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño de investigación es No experimental, debido a que no se manipularon las variables de estudio.

3.1. TIPO DE ESTUDIO

3.1.1. Descriptiva

Se usó este tipo de investigación porque permitió obtener los conocimientos del contexto actual que se da en la enseñanza del sistema de ecuaciones a estudiantes de segundo semestre y se pudo describir este fenómeno.

3.1.2. Investigación de campo

Permitió analizar el problema encontrado en el lugar de los hechos, es decir, en la Universidad Nacional de Chimborazo.

3.1.3. Investigación documental

Esta investigación es documental ya que permitió recabar información secundaria para ampliar el conocimiento del problema en estudio, en este trabajo se recolectó información de textos, tesis, folletos, internet etc.

3.2. POBLACIÓN Y MUESTRA

3.2.1. POBLACIÓN.

A continuación, se describe la población:

Cuadro N°1. La población

Descripción	Frecuencia	Porcentaje
Estudiantes	20	100
Total:	20	100%

Fuente: Registro de asistencia de los alumnos de Secretaria de Ciencias Exactas.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier

3.3. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS.

3.3.1. TÉCNICAS

Para la recolección de datos se trabajó con la técnica de:

3.3.1.1. La observación

Esta técnica permitió obtener la información del comportamiento de un fenómeno tal como este ocurre. En el caso de esta investigación la observación será realizada durante la aplicación de la metodología de resolución de problemas en el aprendizaje de Sistema de ecuaciones.

3.3.2. INSTRUMENTOS

Los instrumentos aplicados fueron los siguientes:

3.3.2.1. Ficha de observación

Este instrumento fue aplicado a los estudiantes fin de tener información sobre el problema de investigación, teniendo datos muy veraces de fuentes de primera mano.

3.4. TÉCNICAS DE PROCEDIMIENTO PARA EL ANÁLISIS DE DATOS

Para el procesamiento de la información se realizaron cuadros y gráficos estadísticos, mediante programas como Microsoft Word y Excel.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LA FICHA DE OBSERVACIÓN APLICADA A LOS ESTUDIANTES DEL SEGUNDO SEMESTRE DE LA CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS DE LA UNACH

Indicador N°1.- El docente aplica diversas metodologías en la resolución de sistemas de ecuaciones

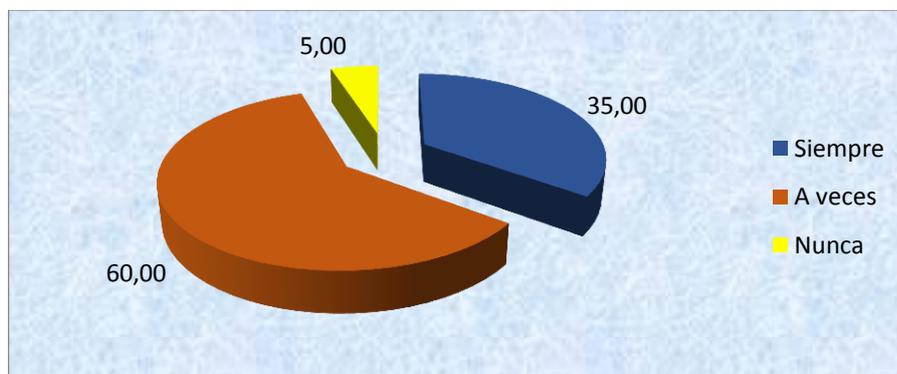
Cuadro N°2. Metodologías en la resolución de sistemas de ecuaciones

OPCIONES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	7	35,00
A veces	12	60,00
Nunca	1	5,00
TOTAL	20	100

Fuente: Ficha de observación.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

Gráfico N° 1. Metodologías en la resolución de sistemas de ecuaciones



Fuente: Cuadro N° 2.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

a) ANÁLISIS:

De los 20 estudiantes observados se obtuvo que el 35% siempre, el 60% a veces y el 5% nunca, en cuanto si el docente aplica diversas metodologías en la resolución de ecuaciones

b) INTERPRETACIÓN:

En su mayoría se tiene la necesidad de la aplicación de diversas metodologías para resolver sistemas de ecuaciones, pues en muchos casos se usa la metodología tradicional.

Indicador N°2.- Identifica las operaciones más comunes de sistema de ecuaciones

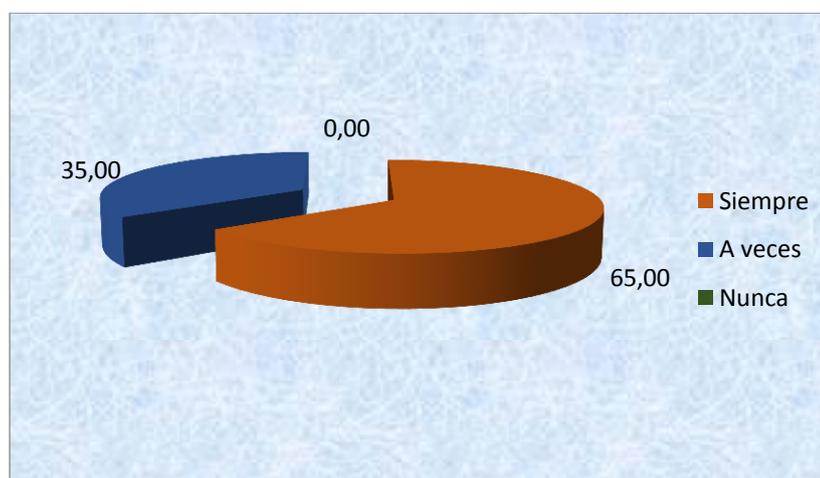
Cuadro N°3. Identifica las operaciones más comunes

OPCIONES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	13	65,00
A veces	7	35,00
Nunca	0	0,00
TOTAL	20	100

Fuente: Ficha de observación.

Elaborado por: Chiglán Naula Segundo Javier.

Gráfico N° 2. Identifica las operaciones más comunes



Fuente: Cuadro N° 3.

Elaborado por: Chiglán Naula Segundo Javier.

a) ANÁLISIS:

De los 20 estudiantes observados se obtuvo que el 65% siempre, el 35% a veces y el 0% nunca, en cuanto si el estudiante identifica las operaciones más comunes de sistema de ecuaciones.

b) INTERPRETACIÓN:

Se ve evidente que los estudiantes en su mayoría identifican las operaciones más comunes de sistema de ecuaciones, pero existe deficiencias en la forma de resolverlos.

Indicador N°3.- Analiza los problemas a fin de buscar soluciones

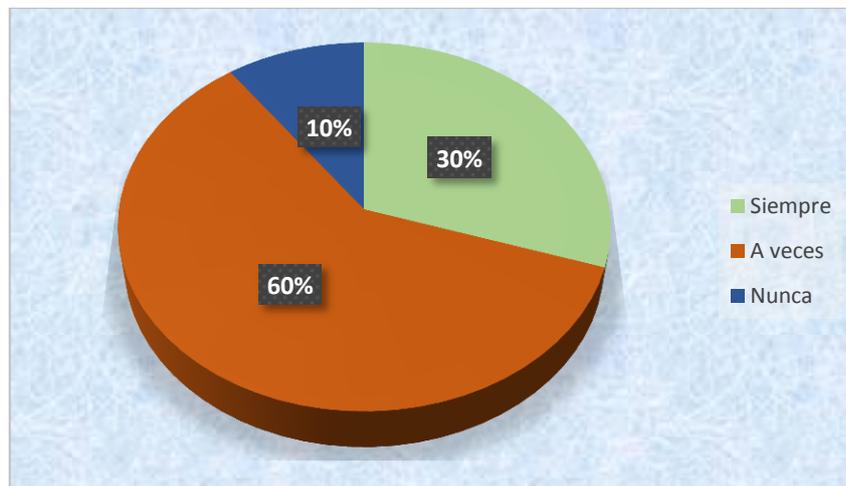
Cuadro N°4. Analiza los problemas a fin de buscar soluciones

OPCIONES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	6	30,00
A veces	12	60,00
Nunca	2	10,00
TOTAL	20	100,00

Fuente: Ficha de observación.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

Gráfico N° 3. Analiza los problemas a fin de buscar soluciones



Fuente: Cuadro N° 4.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

a) ANÁLISIS:

De los 20 estudiantes observados se obtuvo que el 30% siempre, el 60% a veces y el 10% nunca, en cuanto si el estudiante identifica las operaciones más comunes de sistema de ecuaciones.

b) INTERPRETACIÓN:

Por lo tanto, se observa que los estudiantes no analizan en forma eficaz para resolver los problemas

Indicador N°4.- Trabaja con la metodología en la resolución de problemas en clases

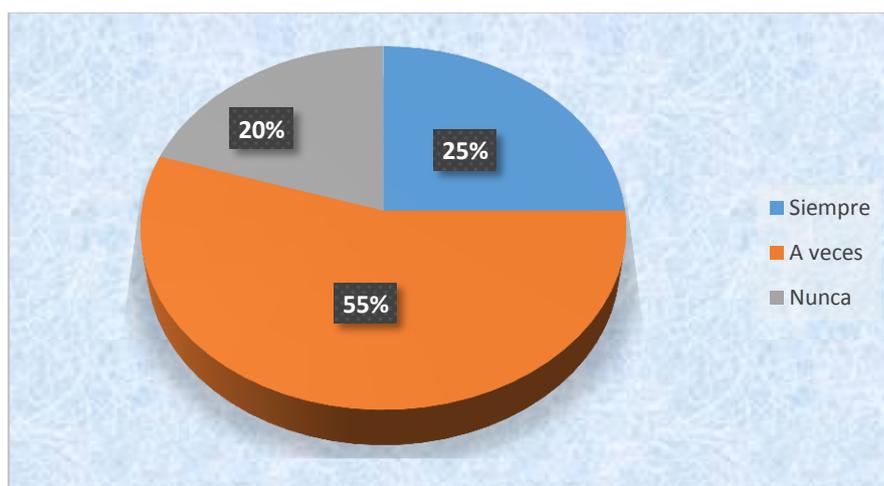
Cuadro N°5. Resolución de problemas en clases

OPCIONES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	5	25,0
A veces	11	55,0
Nunca	4	20,0
TOTAL	20	100

Fuente: Ficha de observación.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

Gráfico N° 4. Resolución de problemas en clases



Fuente: Cuadro N° 5.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

a) ANÁLISIS:

De los 20 estudiantes observados se obtuvo que el 25% siempre, el 55% a veces y el 20% nunca, en cuanto si el estudiante trabaja con la metodología en la resolución de problemas en clases

b) INTERPRETACIÓN:

Se evidencia que los estudiantes tienen dificultades en trabajar con la metodología de resolución de problemas.

Indicador N°5.- Analiza las fórmulas del sistema de ecuaciones

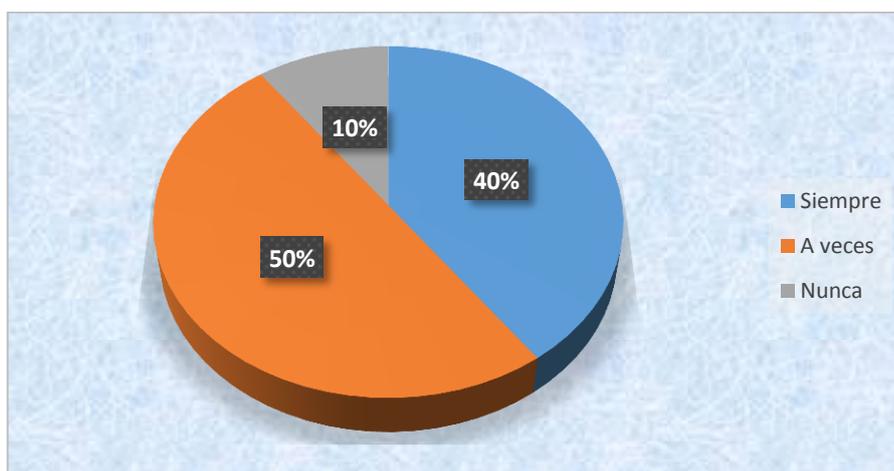
Cuadro N°6. Analiza las fórmulas del sistema de ecuaciones

OPCIONES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	8	40,0
A veces	10	50,0
Nunca	2	10,0
TOTAL	20	100

Fuente: Ficha de observación.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

Gráfico N° 5. Analiza las fórmulas del sistema de ecuaciones



Fuente: Cuadro N° 6.

Elaborado por: Chiglán Naula Segundo Javier.

a) ANÁLISIS:

De los estudiantes observados se obtuvo que el 40% siempre, el 50% a veces y el 10% nunca, en cuanto si el estudiante analiza las fórmulas del sistema de ecuaciones.

b) INTERPRETACIÓN:

No se están potenciando directa e indirectamente la capacidad de análisis y síntesis necesaria para analizar las fórmulas dentro del sistema de ecuaciones.

Indicador N°6.- Reconoce la clasificación de las ecuaciones

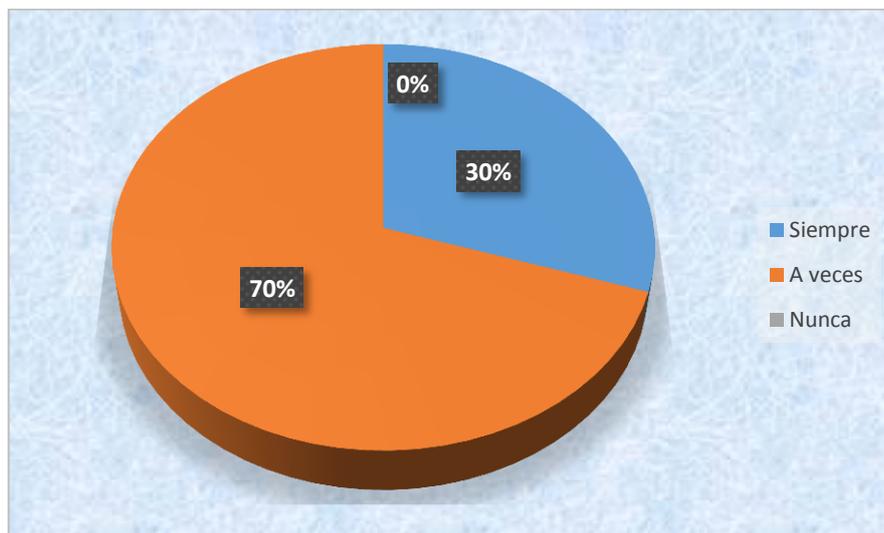
Cuadro N° 7. Reconoce la clasificación de las ecuaciones

OPCIONES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	6	30,0
A veces	14	70,0
Nunca	0	0,0
TOTAL	20	100

Fuente: Ficha de observación.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

Gráfico N° 6. Reconoce la clasificación de las ecuaciones



Fuente: Cuadro N° 7.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

a) ANÁLISIS:

De los estudiantes observados se obtuvo que el 30% siempre, el 70% a veces y el 0% nunca, en cuanto sí reconoce la clasificación de las ecuaciones.

b) INTERPRETACIÓN:

El reconocer la clasificación de las ecuaciones es caracterizado por un conocimiento previo mediante la preparación y la realización de ejercicios.

Indicador N°7.- Identifica la manera para resolver la ecuación

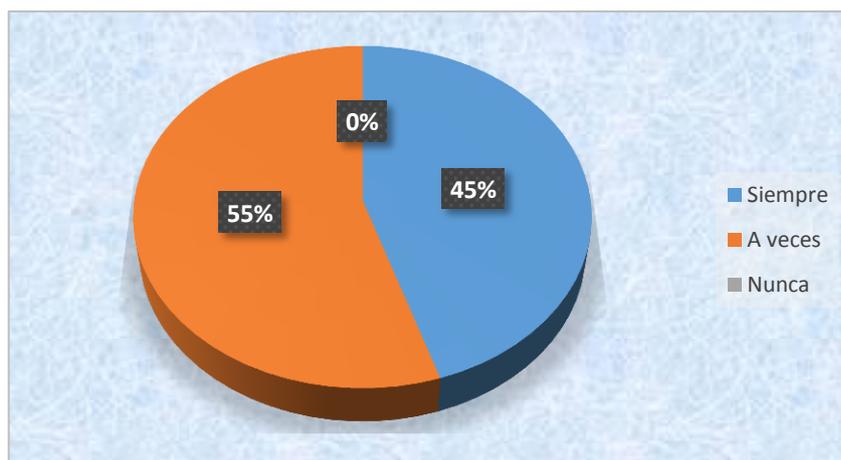
Cuadro N°8. Identifica la manera para resolver la ecuación

OPCIONES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	9	45,0
A veces	11	55,0
Nunca	0	0,0
TOTAL	20	100

Fuente: Ficha de observación.

Elaborado por: Chiglán Naula Segundo Javier.

Gráfico N° 7. Identifica la manera para resolver la ecuación



Fuente: Cuadro N° 8.

Elaborado por: Chiglán Naula Segundo Javier.

a) ANÁLISIS:

De los estudiantes observados se obtuvo que el 45% siempre, el 55% a veces y el 0% nunca, en cuanto si el estudiante identifica la manera para resolver la ecuación

b) INTERPRETACIÓN:

Los estudiantes en su mayoría no identifican la manera para resolver la ecuación, principalmente aplicando la metodología de resolución de problemas.

Indicador N°8.-Compara las diferentes formas de resolución del sistema de ecuaciones

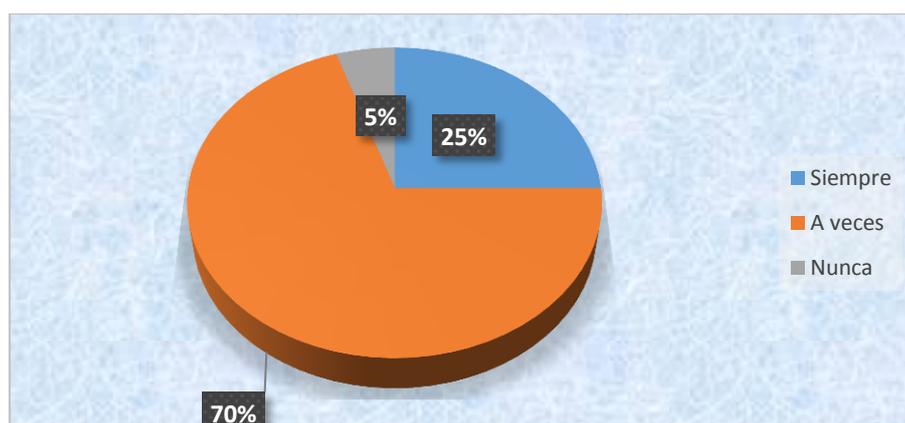
Cuadro N°9. Compara las diferentes formas de resolución

OPCIONES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	5	25,0
A veces	14	70,0
Nunca	1	5,0
TOTAL	20	100

Fuente: Ficha de observación.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

Gráfico N° 8. Compara las diferentes formas de resolución



Fuente: Cuadro N° 9.

Elaborado por: Chiglán Naula Segundo Javier.

a) ANÁLISIS:

De los estudiantes observados se obtuvo que el 25% siempre, el 70% a veces y el 5% nunca, en cuanto si compara las diferentes formas de resolución del sistema de ecuaciones

b) INTERPRETACIÓN:

Los estudiantes en su mayoría no comparan diversas formas de resolución del sistema de ecuaciones, solamente se mantiene con una forma de realizar, y muchas veces sin un análisis.

Indicador N°9.- Señala las diferencias existentes entre los sistemas de ecuaciones

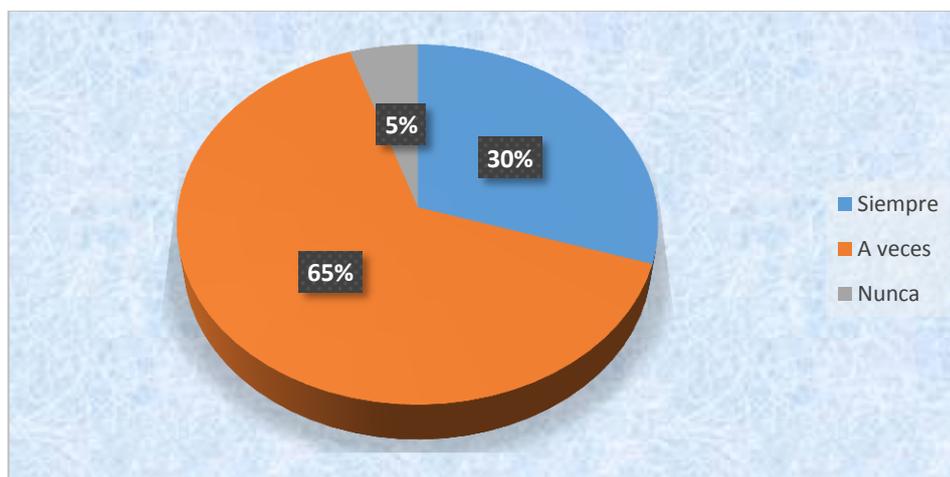
Cuadro N°10. Diferencias existentes entre los sistemas de ecuaciones

OPCIONES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	6	30,0
A veces	13	65,0
Nunca	1	5,0
TOTAL	20	100

Fuente: Ficha de observación.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

Gráfico N° 9. Diferencias existentes entre los sistemas de ecuaciones



Fuente: Cuadro N° 10.

Elaborado por: Chiglán Naula Segundo Javier.

a) ANÁLISIS:

De los estudiantes observados se obtuvo que el 30% siempre, el 65% a veces y el 5% nunca, en cuanto a señalar las diferencias existentes entre los sistemas de ecuaciones.

b) INTERPRETACIÓN:

Los estudiantes en su mayoría no señalan las diferencias existentes entre los sistemas de ecuaciones, pues existe una deficiencia en estos conocimientos.

Indicador N°10.- Analiza en la resolución del sistema de ecuaciones sus procesos

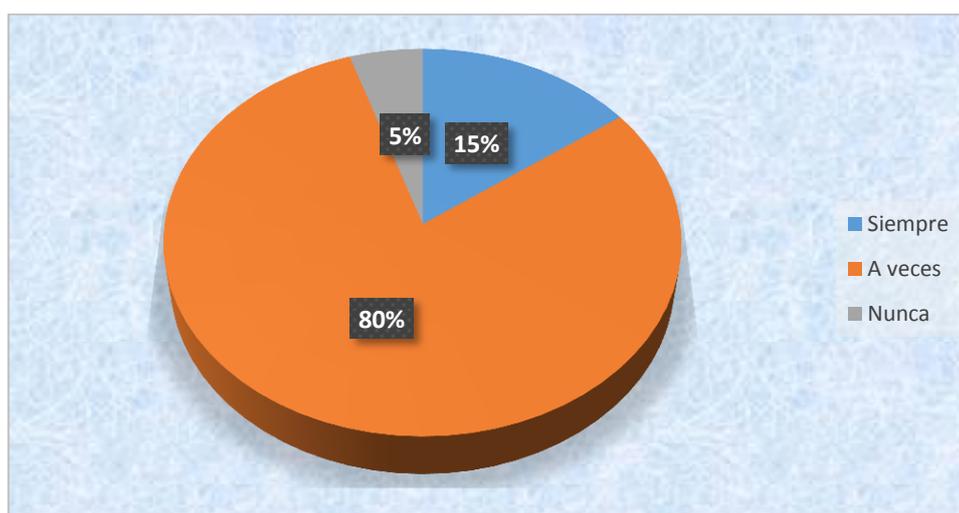
Cuadro N° 11. Resolución del sistema de ecuaciones y sus procesos

OPCIONES	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Siempre	3	15,00
A veces	16	80,00
Nunca	1	5,00
TOTAL	20	100

Fuente: Ficha de observación.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

Gráfico N° 10. Analiza en la resolución del sistema de ecuaciones sus procesos



Fuente: Cuadro N° 11.

Elaborado por: Chiglan Naula Segundo Javier.

a) ANÁLISIS:

De los estudiantes observados se obtuvo que el 15% siempre, el 80% a veces y el 5% nunca, en cuanto a analizar en la resolución del sistema de ecuaciones sus procesos

b) INTERPRETACIÓN:

Los estudiantes en su mayoría analizan en la resolución del sistema de ecuaciones sus procesos, pues falta en una capacitación.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONCLUSIONES

- Mediante los instrumentos de recolección de datos se realizó un diagnóstico de las metodologías usadas dentro del proceso de enseñanza aprendizaje del sistema de ecuaciones, definiendo que solamente un 25% trabaja con la metodología en la resolución de problemas en clases y un 25% compara las diferentes formas de resolución del sistema de ecuaciones, pues no se hace un estudio pormenorizado de otros métodos y un cotejo entre ellos, existiendo deficiencias en la secuencia metodológica de resolución, a esto se suma la utilización de metodologías tradicionales.
- Mediante la elaboración del marco teórico se pudo obtener elementos conceptuales y teorías claras que ayudaron al desarrollo de la metodología de resolución de problemas para la enseñanza y aprendizaje del sistema de ecuaciones.
- Se concluye que la guía didáctica con estrategias de metodología de resolución de problemas provee algunos ejercicios donde se indica el proceso y metodología de resolución de sistema de ecuaciones, en una forma contextualizada y ordenada, a más de ello existen talleres que se deben realizar dentro del proceso de enseñanza aprendizaje.
- Luego de la aplicación de la guía didáctica se observa que en la opción siempre del global general está en el 34%, incrementándose al 56%, el valor total en la opción nunca baja del 6% al 4% del total, concluyendo que si existe un aporte de las actividades propuestas en la guía didáctica con la aplicación de la metodología de resolución de problemas para sistemas de ecuaciones.

5.2. RECOMENDACIONES

- Se recomienda que los docentes implementen nuevas metodologías en la resolución del sistema de ecuaciones mediante actividades o ejercicios aplicativos, que favorezcan el análisis de una manera práctica, mejorando la comparación entre métodos y desarrollando ejercicios con procesos de la metodología de resolución de problemas.
- Se recomienda que estos conceptos, métodos, procesos y estrategias sean transmitidas a través del docente de la forma más clara y sencilla posible, que conjuntamente con la participación activa del estudiante se construya estos conocimientos.
- Capacitar constantemente a los docentes a fin de que puedan trabajar en el aula con nuevas herramientas y metodologías, las mismas que permitan analizar la compatibilidad de sistemas por metodologías de resolución de problemas para determinar el número de posibles soluciones, teniendo amplias formas de resolución.
- Utilizar la Guía didáctica con el fin de fomentar el aprendizaje de sistema de ecuaciones mediante la metodología de resolución de problemas, en forma ordenada secuencial, pedagógica, basada en un sistema práctico, analítico, comparativo y fomentando la creatividad en los estudiantes.

5. BIBLIOGRAFÍA

- Ausubel, D. (1983). *Psicología Educativa*. México: Trillas.
- Ballester S. Et al. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomo 1. .*
Cuba: Pueblo y Educación.
- Barriga, D., & Hernández. (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: McGraw Hill.
- Barriga, D., & Hernandez. (2002). *Estrategias para un aprndizaje significativo*.
México: McGraw Hill.
- Bermúdez, M. (2002). *Dinámica de grupo en educación: su facilitación*. La Habana:
Pueblo y Educacion.
- CANÓS, L. y MAURI, J. (2005). “Metodologías activas para la docencia y aplicación de las nuevas tecnologías: una experiencia”. XX Simposium Nacional de la URSI, Gandia (Valencia).
- Cortés, L. y Vergnaud, K. (1990) *El carácter algebraico de la aritmética*, New York :
Trillas.
- Cutz, B. (2005). *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas*. México: Civestav.
- Figueroa, E. (2006). *Estrategias de Resolución de Educación*. Barquisimeta-Venezuela:
ISSN.
- García J.E. (2007). *Aproximación a la lógica de la búsqueda de la vía de solución a los problemas geométricos: Congreso Nacional de Matemática*. Computación.
Holguín. Cuba.
- Mayer Richard. (1983). *Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición. (Trad. Graziela Baravalle)*. Serie Cognición y Desarrollo Humano. Paidós.
- Martinez, M. (1990). *Didáctica de las ciencias experimentales*. España: Trillas.
- Polya G. (1944). *Serie de Matemáticas,(Traducción 1992, How to solve it)*. mexico:
Ed. Trillas.

Polya G. (1987). *Como Plantear y Resolver Problemas* Decimocuarta reimpresión.
México.: Editoriales Trillas.

Polya G. (1995). *Como Plantear y Resolver Problemas* Decimoquinta reimpresión.
México.: Editoriales Trillas.

Sanhueza, G. (2016). *El constructivismo*. Zaragoza: España.

Silva, M. (2009). *Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos
utilizadas por alumnos de primaria*.

Vygotsky, L. (1991). *La formación social de la mente*. Brasil: Aique.

7. ANEXOS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y
TECNOLOGÍAS
CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS

FICHA DE OBSERVACIÓN

En esta ficha se recolectará información relacionada con el tema del trabajo titulado “APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE SISTEMA DE ECUACIONES EN LA ASIGNATURA DE ALGEBRA ELEMENTAL, EN LOS ESTUDIANTES DEL SEGUNDO SEMESTRE DE LA CARRERA DE CIENCIAS EXACTAS, DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, DURANTE EL PERÍODO MARZO 2016 -JULIO 2016”

Indicadores	Valoración			
	Regular	Bueno	Muy bueno	Excelente
Observa como el docente aplica la metodología				
Identifica las operaciones más comunes de sistema de ecuaciones				
Analiza los problemas a fin de buscar soluciones				
Trabaja con la metodología en la resolución de problemas en clases y casa.				
Analiza las fórmulas del sistema de ecuaciones				
Reconoce la clasificación de las ecuaciones				
Identifica la manera para resolver la ecuación				
Compara las diferentes formas de resolución de ecuaciones				
Señala las diferencias existentes entre las ecuaciones				
Analiza en la resolución de ecuaciones sus procesos				

DESCRIPCIÓN FOTOGRÁFICA





APLICACIÓN DE LA GUÍA



GUÍA DIDÁCTICA



METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE SISTEMA DE ECUACIONES EN LA ASIGNATURA DE ALGEBRA ELEMENTAL

Chiglán Naula Segundo Javier

Contenido	Pág.
Portada	1
Índice	2
I. INTRODUCCIÓN	3
II. OBJETIVO	4
III. PRESENTACIÓN DE LA GUÍA	4
IV. CARACTERÍSTICAS DE LA GUÍA DIDÁCTICA	4
V. DESARROLLO DE LA GUÍA	5
FUNDAMENTO TEÓRICO DE LA GUIA	5
BLOQUE 1	7
CAPÍTULO 1 SISTEMA DE ECUACIONES	8
TÍTULO	9
OBJETIVO	9
RECURSOS	9
PROCEDIMIENTO DIDÁCTICO	9
RECOMENDACIÓN PEDAGÓGICA	12
EVALUACIÓN	12
EJERCICIOS RESUELTOS	13
TALLER N° 1	46
TALLER N° 2	49
EVALUACIÓN	53
VI. BIBLIOGRAFÍA	59

I. INTRODUCCIÓN

En el Ecuador existen muchas falencias en todas las áreas del conocimiento según el Ministerio de Educación los resultados del aprendizaje de la Matemática son insatisfactorios, tanto de forma como de fondo en los estudiantes de los diferentes niveles de educación. La metodología de resolución de problemas tiene la intención de transmitir, de una manera sistemática, los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas. A pesar de que los docentes tratan de solucionar esta dificultad, imparten los conocimientos de forma tradicional basados en libros o textos y como es de conocimiento estos textos inician con una explicación de los conceptos, definiciones, propiedades, principios tradicionales, donde se siguen procesos rígidos y algorítmicos, provocando que los estudiantes resuelvan los problemas de forma rutinaria y algorítmica, usando los métodos de forma mecánica.

II. OBJETIVO

- Proporcionar una guía didáctica con estrategias de metodología de resolución de problemas que permita mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje del sistema de ecuaciones.

III. PRESENTACIÓN DE LA GUÍA DIDÁCTICA

Esta guía didáctica es el instrumento de orientación técnica y práctica para el Docente y estudiante, que incluye toda la información necesaria para el correcto uso y manejo provechoso de la metodología de resolución de problemas dentro del sistema de ecuaciones.

IV. CARACTERÍSTICA DE LA GUÍA DIDÁCTICA

Presenta orientaciones en relación con la metodología para el proceso de enseñanza aprendizaje del sistema de ecuaciones, basado en el enfoque de la asignatura.

V. DESARROLLO DE LA GUÍA

5.1. FUNDAMENTO TEÓRICO DE LA GUIA

Definición de la Resolución de Problemas

(García J.E, 2007), sostiene que:

La metodología de resolución de problemas (RP) tiene la intención de transmitir, de una manera sistemática, los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas. Tal experiencia debe permitir al alumno manipular objetos matemáticos, activar su capacidad mental, ejercitar su creatividad y reflexionar sobre su propio aprendizaje al tiempo que se prepara para otros problemas con lo que adquiere confianza en sí mismo”.

Esta actividad central en el campo que nos ocupa remite a trabajar la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos, fundamentalmente en dos direcciones: a partir del contexto deben crearse esquemas, formular y visualizar los problemas, descubrir relaciones y regularidades, hallar semejanzas con otros problemas, y trabajando entonces matemáticamente, hallar soluciones y propuestas que necesariamente deben volverse a proyectar en la realidad para analizar su validez y significado.

Según (Ballester S. Et al, 1992) señala: Un problema es un ejercicio que refleja, determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de la ciencia o la práctica, en lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución. Se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, datos) conocida y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos.

(Mayer Richard, 1983) Utiliza indistintamente, a lo largo de su estudio, los términos pensamiento, cognición y resolución de problemas y lo hace sobre la base de la siguiente caracterización: El pensamiento es cognitivo, pero se infiere de la conducta. Ocurre internamente y debe ser inferido indirectamente.

- El pensamiento es un proceso que implica manipulación de, o establece un conjunto de operaciones sobre, el conocimiento.
- El pensamiento es dirigido y tiene como resultado la “resolución” de problemas o se dirige hacia la solución.

Así, el pensamiento, según Mayer, es lo que sucede cuando una persona resuelve un problema, es decir, produce un comportamiento que mueve al individuo desde un estado inicial a un estado final, o al menos trata de lograr ese cambio, llegando a definir directamente el pensamiento como resolución de problemas (Mayer Richard, 1983).

La resolución de problemas matemáticos ha mantenido un doble lugar en la enseñanza como ámbito privilegiado para el desarrollo del pensamiento con el objetivo de que los alumnos sean buenos “resolución de problemas”, esto es, buenos pensadores y como objetivo más concreto, dirigido a que los alumnos sean capaces de resolver problemas.

BLOQUE 1

APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ACTIVIDAD 1

CAPÍTULO 1

Sistema de Ecuaciones

Es un conjunto de ecuaciones para las que vamos a buscar una solución común. Los sistemas los vamos a clasificar en lineales y no lineales. Los sistemas de ecuaciones lineales son aquellos en los que todas las ecuaciones son de primer grado y se llaman así porque su representación gráfica es una línea recta.

Vamos a explicar el concepto de solución de un sistema. Para ello vamos a utilizar un sistema lineal con dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$2x + y = 5$$

$$x + y = 3$$

La pareja de valores $(x, y) = (1, 0)$ no es solución del sistema al sustituir dichos valores en el sistema las igualdades aritméticas que resultan son falsas.

$$2 \cdot 1 + 0 \neq 5 \quad 1 + 0 \neq 3$$

La pareja de valores $(2, 1)$ sí que es solución del sistema porque “satisface” todas las ecuaciones

$$2 \cdot 2 + 1 = 5 \quad 2 + 1 = 3$$

TITULO:

Ecuaciones con la metodología de resolución de problemas

OBJETIVO:

Aplicar la metodología de resolución de problemas siguiendo un proceso para el desarrollo de dicha resolución.

RECURSOS:

- Pizarra
- Marcadores
- Hojas
- Papelotes

PROCEDIMIENTO DIDÁCTICO

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

Ejercicio 1: En un examen de 20 preguntas la nota de Juan ha sido un 8. Si cada acierto vale un punto y cada error resta dos puntos, ¿cuántas preguntas ha acertado Juan?, ¿cuántas ha fallado?

Está claro que las preguntas que hay que contestar son las del final del enunciado, es decir, cuántas preguntas ha fallado y cuántas ha acertado Juan.

- Llamemos entonces X al número de respuestas acertadas y al de falladas Y .

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a efectuar el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado y a cómo hemos nombrado las incógnitas, tendremos las siguientes ecuaciones:

El número total de preguntas es 20, luego: $x + y = 20$

La nota es un 8 y cada fallo resta dos puntos: $x - 2y = 8$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores. Si aplicamos, por ejemplo, el método de sustitución tendremos:

De la segunda ecuación: $x = 2y + 8$

Sustituyendo en la primera: $2y + 8 + y = 20$

$\Rightarrow 3y = 12$

$\Rightarrow y = 12/3$

$$\Rightarrow y = 4$$

Sustituyendo en la ecuación del principio: $x = 16$

Juan ha acertado 16 preguntas y ha fallado 4.

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta, si ha acertado 16 preguntas, Juan tendría en principio 16 puntos, pero, al haber fallado 4, le restarán el doble de puntos, es decir 8.

Por tanto, $16 - 8 = 8$ es la nota que según el enunciado del problema, ha obtenido.

Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

RECOMENDACIÓN PEDAGÓGICA

- Luego de encontrada la solución el estudiante revisa y reflexiona sobre ella.

EVALUACIÓN

- ¿Qué es el método de resolución de problemas?
- ¿En cuántos parámetros se divide?
- ¿Qué aspectos debe contener la resolución de problemas?

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 2:

Juan compró un ordenador y un televisor por 2000 € y los vendió por 2260 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%?

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

Llamemos entonces:

$x \rightarrow$ precio del ordenador.

$y \rightarrow$ precio del televisor.

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a efectuar el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$x + \frac{10x}{100} \rightarrow \text{Precio de venta del ordenador.}$$

$$y + \frac{15y}{100} \rightarrow \text{Precio de venta del televisor.}$$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores:

$$x + y = 2000$$

$$x + \frac{10x}{100} + y + \frac{15y}{100} = 2260$$

$$\begin{array}{r} x + y = 2000 \\ 110x + 115y = 226000 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} -110x - 110y = -220000 \\ 110x + 115y = 226000 \\ \hline 5y = 6000 \end{array}$$

$$y = 1200$$

$$x + 1200 = 2000$$

$$x = 800$$

800 € \rightarrow precio del ordenador.

1200 € \rightarrow precio del televisor.

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta:

$$x + y = 2000$$

$$800 + 1200 = 2000$$

Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 3:

En una empresa trabajan 60 personas. Usan gafas el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 11.

¿Cuántos hombres y mujeres hay en la empresa?

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

Llamemos entonces:

$x \rightarrow$ número de hombres.

$y \rightarrow$ número de mujeres.

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a efectuar el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado:

$\frac{16x}{100} \rightarrow$ Hombres con gafas.

$$\frac{20y}{100} \rightarrow \text{Mujeres con gafas.}$$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores:

$$x + y = 60$$

$$16x + 20y = 1100$$

$$x = 60 - y$$

$$16(60 - y) + 20y = 1100$$

$$960 - 16y + 20y = 1100$$

$$4y = 140$$

$$y = 35$$

$$x + 35 = 60$$

$$y = 25$$

35 \rightarrow Número de hombres.

25 \rightarrow Número de mujeres.

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta:

$$x + y = 60$$

$$35 + 25 = 60$$

Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 4:

Resolver el siguiente ejercicio mediante la metodología de resolución de problemas:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez revisado detenidamente el problema vamos a encontrar las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

Llamemos entonces:

$x \rightarrow$ Incógnita 1

$y \rightarrow$ Incógnita 2

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a escribir el sistema de ecuaciones dentro del planteamiento del problema:

$$3x - 4y = -6$$

$$2x + 4y = 16$$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores:

$$3x = -6 + 4y$$

$$x = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$2x = 16 - 4y$$

$$x = \frac{16 - 4y}{2}$$

$$\frac{-6 + 4y}{3} = \frac{16 - 4y}{2}$$

$$2(-6 + 4y) = 3(16 - 4y)$$

$$-12 + 8y = 48 - 12y$$

$$8y + 12y = 48 + 12$$

$$20y = 60$$

$$y = 3$$

$$x = \frac{-6 + 4 \cdot 3}{3} = \frac{-6 + 12}{3}$$

$$x = 2$$

$$x = 2, y = 3$$

2 → Incógnita 1

3 → Incógnita 2

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta:

$$2x = 16 - 4y$$

$$2(2) = 16 - 4(3)$$

$$4 = 16 - 12$$

$$4 = 4$$

Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 5:

Resolver el siguiente ejercicio mediante la metodología de resolución de problemas:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez revisado detenidamente el problema vamos a encontrar las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

Llamemos entonces:

$x \rightarrow$ Incógnita 1

$y \rightarrow$ Incógnita 2

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a escribir el sistema de ecuaciones dentro del planteamiento del problema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Ponemos como primera ecuación la que tenga el cómo coeficiente de x: 1 ó -1, en caso de que no fuera posible lo haremos con y o z, cambiando el orden de las incógnitas.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores, específicamente con el método de Gauss:

- Hacemos **reducción con la 1ª y 2ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x de la 2ª ecuación**. Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación:

$$\mathbf{E}'_2 = \mathbf{E}_2 - 3\mathbf{E}_1$$

{

$$\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 1 \\ -3x - 3y + 3z = -3 \\ \hline -y + 4z = -2 \end{array}$$

- Hacemos lo mismo con la ecuación 1ª y 3ª **ecuación**, para **eliminar** el término en **x**.

$$\mathbf{E}'_3 = \mathbf{E}_3 - 5\mathbf{E}_1$$

$$\begin{array}{r} 5x + 3y + 4z = 2 \\ -5x - 5y + 5z = -5 \\ \hline -2y + 9z = -3 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ -2y + 9z = -3 \end{array} \right.$$

- Tomamos las ecuaciones 2ª y 3ª, transformadas, para hacer reducción y **eliminar** el término en **y**.

$$\mathbf{E}''_3 = \mathbf{E}'_3 - 2\mathbf{E}'_2$$

$$\begin{array}{r} -2y + 9z = -3 \\ 2y - 8z = 4 \\ \hline z = 1 \end{array}$$

- Obtenemos el sistema equivalente escalonado.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

- Encontrar las soluciones.

$$z = 1$$

$$-y + 4 \cdot 1 = -2 \quad y = 6$$

$$x + 6 - 1 = 1 \quad x = -4$$

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta:

$$\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 1 \\ -3x - 3y + 3z = -3 \\ \hline -y + 4z = -2 \end{array}$$

$$3x + 2y + z = 1$$

$$3(-4) + 2(6) + 1 = 1$$

$$-12 + 12 + 1 = 1$$

$$1 = 1$$

Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 6:

Resolver el siguiente ejercicio mediante la metodología de resolución de problemas:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez revisado detenidamente el problema vamos a encontrar las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

Llamemos entonces:

$x \rightarrow$ Incógnita 1

$y \rightarrow$ Incógnita 2

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a escribir el sistema de ecuaciones dentro del planteamiento del problema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores:

$$y = 7 - x$$

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25$$

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$x = 3 \quad y = 7 - 3 \quad y = 4$$

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$3^2 + 4^2 = 25$$

$$9 + 16 = 25$$

Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 7:

Por la compra de dos electrodomésticos hemos pagado 3500 €. Si en el primero nos hubieran hecho un descuento del 10% y en el segundo un descuento del 8% hubiéramos pagado 3170 €. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

- $x \rightarrow$ Precio del 1°.
- $y \rightarrow$ Precio del 2°.

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a efectuar el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado y a cómo hemos nombrado las incógnitas, tendremos las siguientes ecuaciones:

$$x - \frac{10x}{100} \rightarrow \text{Descuento en el 1}^\circ.$$

$$y - \frac{8y}{100} \rightarrow \text{Descuento en el 2}^\circ.$$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores.

$$x + y = 3500$$

$$x - \frac{10x}{100} + y - \frac{8y}{100} = 3170$$

$$x + y = 3500$$

$$90x + 92y = 317000$$

$$y = 1000$$

$$x + 1000 = 3500$$

$$x = 2500$$

$$-90x - 90y = -315000$$

$$90x + 92y = 317000$$

$$2y = 2000$$

2500 € \rightarrow Precio del 1°.

1000 € \rightarrow Precio del 2°.

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta, en cuanto a la pregunta ¿Cuál es el precio de cada artículo?

$$x + y = 3500$$

$$2500 + 1000 = 3500$$

Luego se cumplieron las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 8:

La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

$x \rightarrow$ cifra de las unidades

$y \rightarrow$ cifra de las decenas

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a efectuar el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado y a cómo hemos nombrado las incógnitas, tendremos las siguientes ecuaciones:

$10x + y \rightarrow$ número

$$10y + x \rightarrow \text{número invertido}$$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores.

$$y = 2x$$

$$(10y + x) - 27 = 10x + y$$

$$10 \cdot 2x + x - 27 = 10x + 2x$$

$$20x + x - 12x = 27$$

$$x = 3$$

$$y = 6$$

$$\text{Número} \rightarrow 63$$

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta, en cuanto a la pregunta ¿Cuál es el precio de cada artículo?

$$y = 2x$$

$$6 = 2(3)$$

$$6 = 6$$

Luego se cumplieron las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 9:

Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos los dos igual cantidad".
¿Cuánto dinero tenía cada uno?

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

$x \rightarrow$ dinero de Antonio.

$y \rightarrow$ dinero de Pedro.

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a efectuar el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado, cómo hemos nombrado las incógnitas, tendremos la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} x = 2y \\ y + 6 = x - 6 \end{cases}$$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores.

$$y + 6 = 2y - 6 \qquad 6 + 6 = 2y - y \qquad 12 = y$$

$$x = 2 \cdot 12 \qquad x = 24$$

24 \rightarrow Dinero de Antonio.

12 \rightarrow Dinero de Pedro.

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta, en cuanto a la pregunta ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

$$x = 2y$$

$$x = 2(12)$$

$$x = 24$$

Luego se cumplieron las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 10

Entre Ana y Sergio tienen 600 euros, pero Sergio tiene el doble de euros que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

Está claro que las preguntas que hay que contestar son las del final del enunciado, es decir, ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

- Llamemos x al número de euros de Ana y y al de Sergio.

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a efectuar el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado y a cómo hemos nombrado las incógnitas, tendremos las siguientes ecuaciones:

Si los dos tienen 600 euros, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$. Si Sergio tiene el doble de euros que Ana, tendremos que $y = 2x$.

Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$x + y = 600$$

$$2x - y = 0$$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores. Si aplicamos, por ejemplo, el método gráfico tendremos:

Para resolver el sistema por el método gráfico despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones y tendremos:

$$y = -x + 600$$

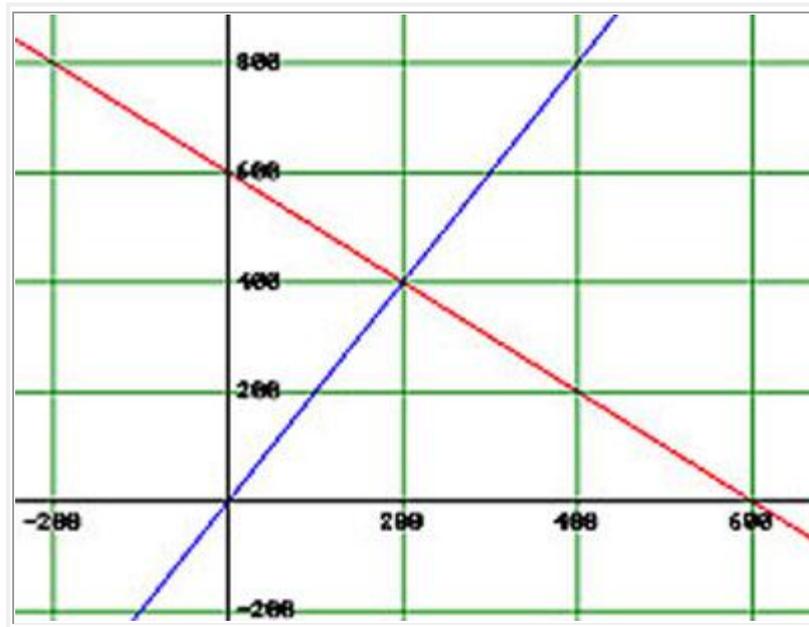
$$y = 2x$$

Vamos ahora, para poder representar ambas rectas, a calcular sus tablas de valores:

$y = -x + 600$		$y = 2x$	
x	y	x	y
200	400	100	200

600	0	200	400
-----	---	-----	-----

Con estas tablas de valores para las dos rectas y eligiendo las escalas apropiadas en los ejes OX y OY , podemos ya representar gráficamente:



Si observamos la gráfica, vemos claramente que las dos rectas se cortan en el punto $(200, 400)$.

Luego la solución del sistema es:

$$x = 200$$

$$y = 400$$

Por tanto, la respuesta al problema planteado es que Ana tiene 200 euros y Sergio tiene 400 euros.

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta:

$$y = -x + 600$$

$$400 = -200 + 600$$

$$400 = 400$$

Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 11:

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones. Decida si se trata de una ecuación condicional, identidad o contradicción.

La metodología que hay que seguir para resolver el problema es:

I. Comprender el problema.

Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

$$x + 6 = -4(x + 1)$$

II. Plantear el problema.

En esta segunda fase vamos a efectuar el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado, cómo hemos nombrado las incógnitas, tendremos la siguiente ecuación:

$$x + 6 = -4x - 4$$

III. Resolver el problema

Ya tenemos el sistema planteado, en esta fase se debe resolver el sistema, para ello se utiliza cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores.

$$x + 6 = -4(x + 1)$$

$$x + 6 = -4x - 4$$

$$x + 4x = -4 - 6$$

$$5x = -10 \quad x = -2$$

IV. Comprobar la solución

Esta fase consiste en comprobar si la solución es correcta, en cuanto a la pregunta ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

$$x + 6 = -4(x + 1)$$

$$-2 + 6 = -4(-2 + 1)$$

$$4 = -4(-1) \quad 4 = 4$$

El enunciado obtenido es verdadero.

TALLER N°1

1. Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:

a) $3x - 5y = 5$ b) $8x - 7y = 15$ c) $2x + 5y = -1$ d) $3x - 2y = 2$
 $4x + y = -1$ $x + 6y = -5$ $3x - y = 7$ $5x + 4y = 7$

2. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $y = 2x - 3$ b) $5x + y = 8$
 $y = \frac{x - 3}{2}$ $2x - y = -1$

c) $x + 6y = -2$ d) $4x - 5y = -2$
 $x - 3y = 1$ $3x + 2y = 10$

3. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $3x + 2y = 4$ b) $2x + 5y = 11$
 $5x - 2y = 4$ $4x - 3y = -4$

c) $x + 6y = -4$ d) $5x - 2y = 7$
 $3x - 5y = 11$ $4x + 3y = -2$

4. Resuelve por el método que consideres más adecuado:

a) $7x + 6y = 2$
 $y + 5 = 3$

b) $5x - 3y = 1$
 $4x - 2y = 14$

c) $3(x + 2) = y + 7$
 $x + 2(y + 1) = 0$

d) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3$
 $2(x + y) = 16$

5. Dos de los siguientes sistemas tienen solución única, uno de ellos es incompatible (no tiene solución) y otro es indeterminado (tiene infinitas soluciones). Intenta averiguar de qué tipo es cada uno, simplemente observando las ecuaciones. Después, resuélvelos gráficamente para comprobarlo:

a) $x + 2y = 5$
 $y - x = 4$

b) $2x + y = 3$
 $4x + 2y = 2$

c) $x + y = 2$
 $3x - 3y = 6$

d) $3x + y = 2$
 $x - y = -2$

6. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $4(x - 3) + y = 0$
 $3(x + 3) - y = 18$

b) $\frac{x}{4} + \frac{y + 1}{5} = 1$
 $x + 3y = 1$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x+4}{5} - y &= -1 \\ \frac{x-6}{5} + y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x &= \frac{y-4}{3} + 1 \\ y + \frac{1}{3} &= \frac{x+4}{3} \end{aligned}$$

7. Halla las soluciones de estos sistemas:

$$\begin{aligned} \text{a) } x + y &= 1 \\ xy + 2y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x + y &= 3 \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2x + y &= 3 \\ xy - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

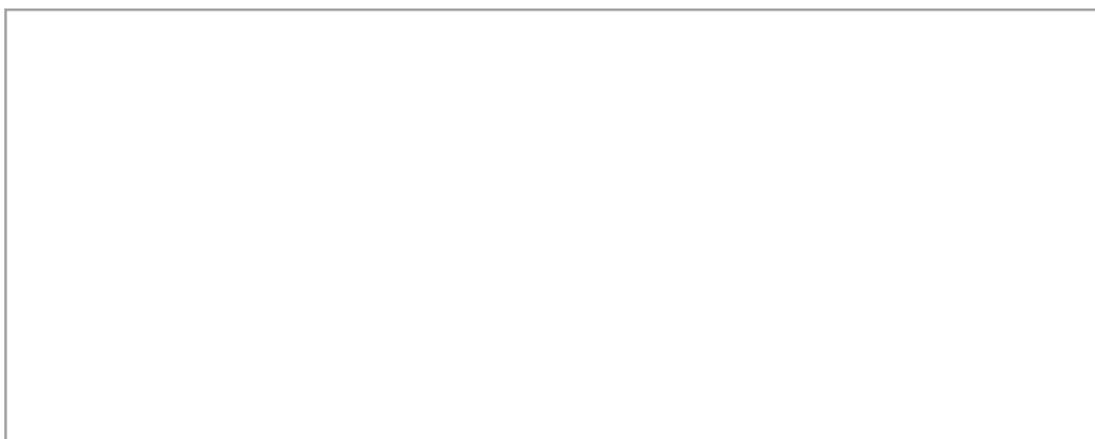
$$\begin{aligned} \text{d) } x - y &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 11 - 3x \end{aligned}$$

TALLER N°2

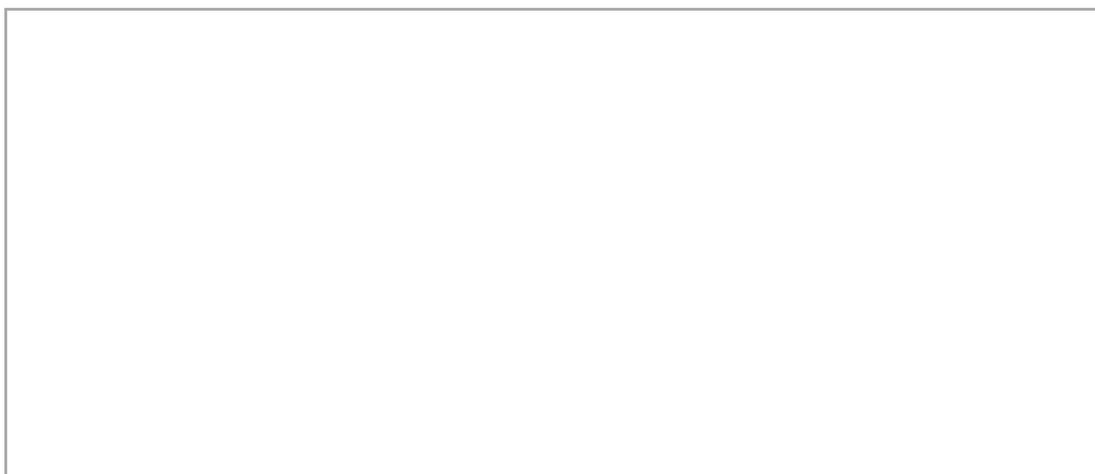
1. Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,8 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,7 €. ¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?

2. La suma de dos números es 15. La mitad de uno de ellos más la tercera parte del otro es 6. ¿De qué números se trata?

3. Por una calculadora y un cuaderno habríamos pagado, hace tres días, 10,80 €. El precio de la calculadora ha aumentado un 8%, y el cuaderno tiene una rebaja del 10%. Con estas variaciones, los dos artículos nos cuestan 11,34 €. ¿Cuánto costaba cada uno de los artículos hace tres días?



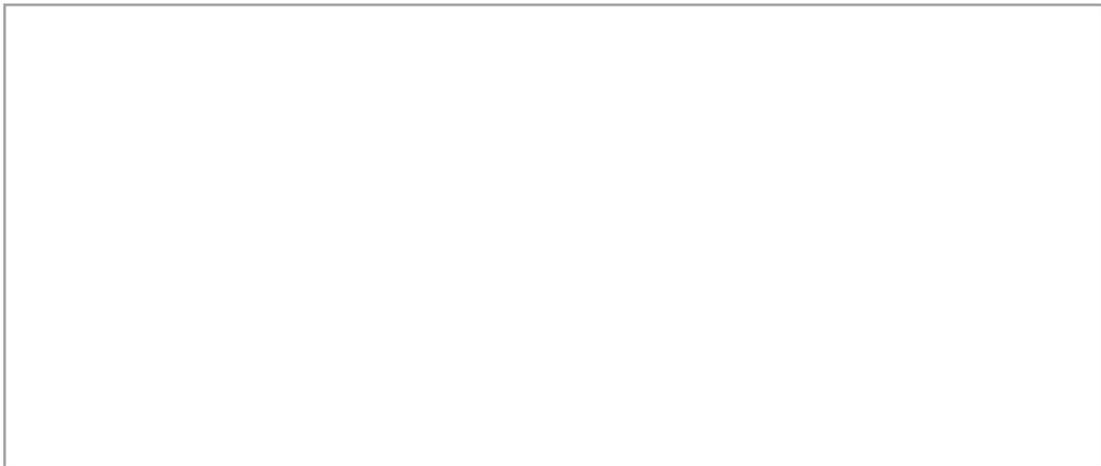
4. Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €. Después de algún tiempo, los vende por 2 157,50 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le



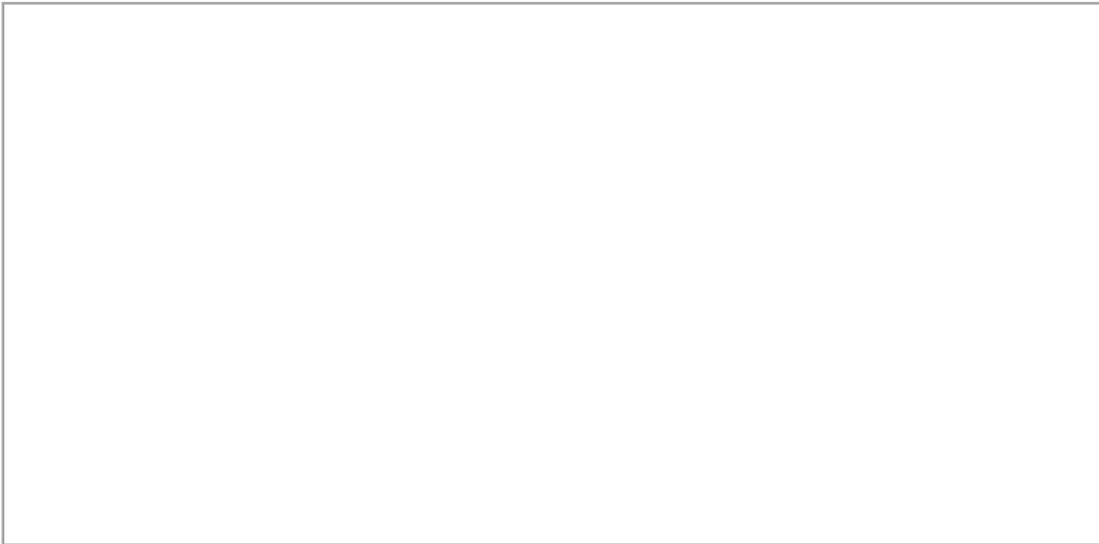
5. En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg. ¿Cuánto tiene que poner de cada clase?



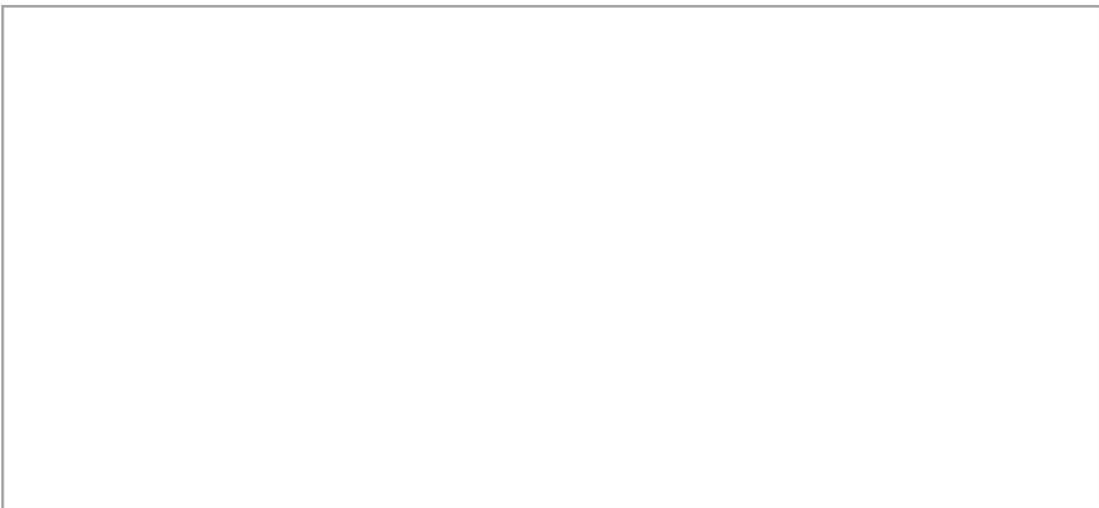
6. La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 400 km. Un coche sale desde A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Simultáneamente, sale otro coche desde B hacia A a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse? ¿A qué distancia de A se producirá el encuentro?

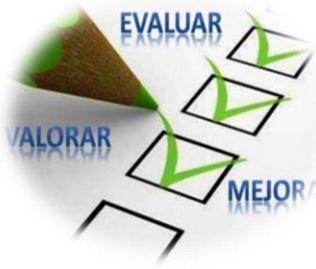


7. El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm². ¿Cuáles son sus dimensiones?



8. Si acortamos en 2 cm la base de un rectángulo y en 1 cm su altura, el área disminuye en 13 cm². Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es de 24 cm.





.....

.....

.....

.....

.....

.....

c. Con las características descubiertas en el apartado anterior, pon un ejemplo, sin resolverlos, de cada uno de los tres tipos de sistemas.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

d. Si ya has descubierto cuál es la propiedad que cumplen los coeficientes de cada tipo de sistema y has sido capaz, en el apartado anterior, de poner un ejemplo de cada uno de ellos, debes estar capacitado para enunciar, ahora sin ejemplos, con palabras, esta interesante propiedad que has observado.

.....

.....

.....

.....

.....

.....



.....
.....
.....
.....
.....
.....

e. Por último, ¿qué relación hay entre esta característica de los coeficientes de los sistemas según el tipo al que pertenezcan y su resolución gráfica?, es decir, ya sabemos cómo es la representación gráfica de las rectas de un sistema incompatible (paralelas), de uno compatible determinado (se cruzan) y compatible indeterminado (coincidentes);

¿qué tienen que ver esas distintas posiciones con la propiedad que has observado de los coeficientes de los sistemas de ecuaciones?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



2. Existen sistemas de ecuaciones que tienen curiosas propiedades. Entre ellos se encuentran aquellos en los que sus coeficientes son números naturales consecutivos como el siguiente:

$$2x + 3y = 4$$

$$3x + 4y = 5$$

Contesta razonadamente las siguientes preguntas:

- a. Resuelve el sistema aplicando la metodología de resolución de problemas.



¿Cuál es la solución?, es decir, ¿en qué punto se cortan las rectas que determinan cada una de las ecuaciones que forman el sistema?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

- b. Repetid el proceso del apartado a) para este otro sistema:

$$5x + 6y = 7$$

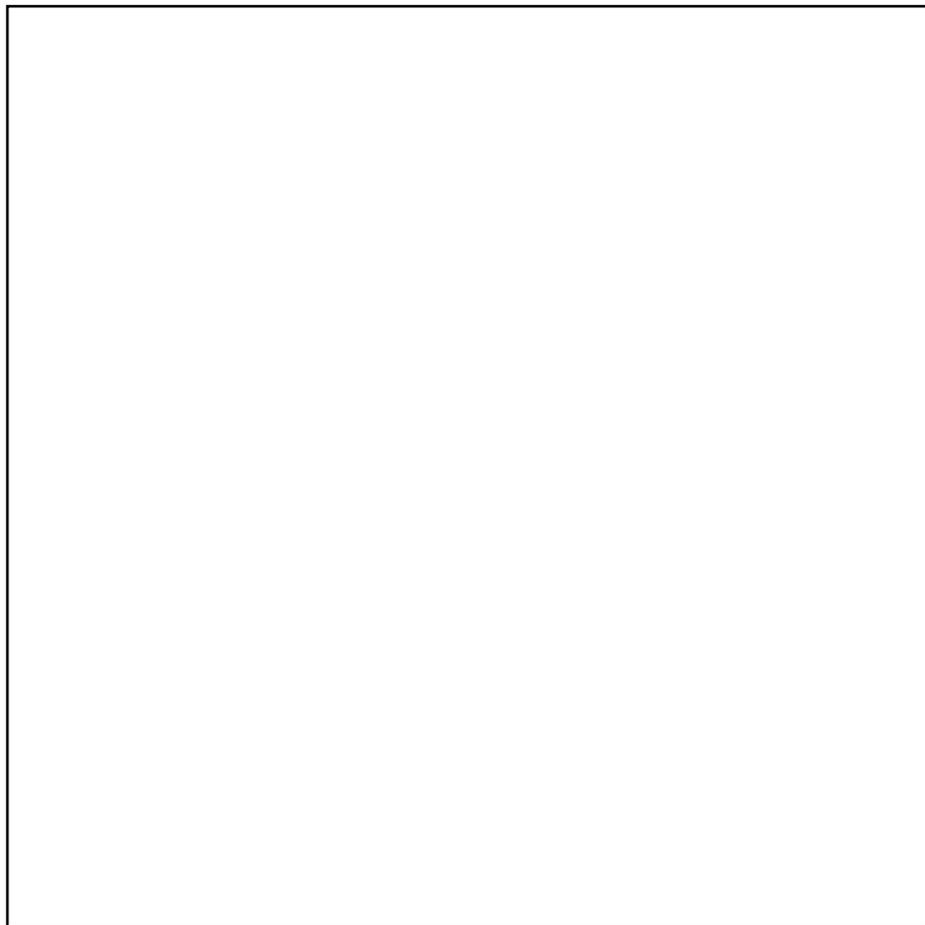
$$9x + 10y = 11$$

c. Generalizando, si tenemos un sistema de la forma:

$$ax + (a + 1)y = a + 2$$

$$bx + (b + 1)y = b + 2$$

Con a y b números naturales, ¿en qué punto se cortarán las rectas que determinan cada una de las ecuaciones que forman el sistema? Es decir, ¿cuál será la solución del sistema?



VI. BIBLIOGRAFÍA

García E. (2007). Aproximación a la lógica de la búsqueda de la vía de solución a los problemas geométricos: Congreso Nacional de Matemática. Holguín. Cuba.

Mayer R. (1983). Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición. (Trad. Graziela Baravalle). Serie Cognición y Desarrollo Humano. Paidós.

MEC. (2012). Reforma Curricular. Quito.

Polya G. (1987). Como Plantear y Resolver Problemas Decimocuarta reimpresión. México.: Editoriales Trillas.

Silva, M. (2009). Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizadas por alumnos de primaria.

WEBGRAFIA

- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/sistemas_lineales_dos_incognitas_dchg/p5_sde_3.html
- http://www.vitutor.com/ecuaciones/sistemas/s_e.html