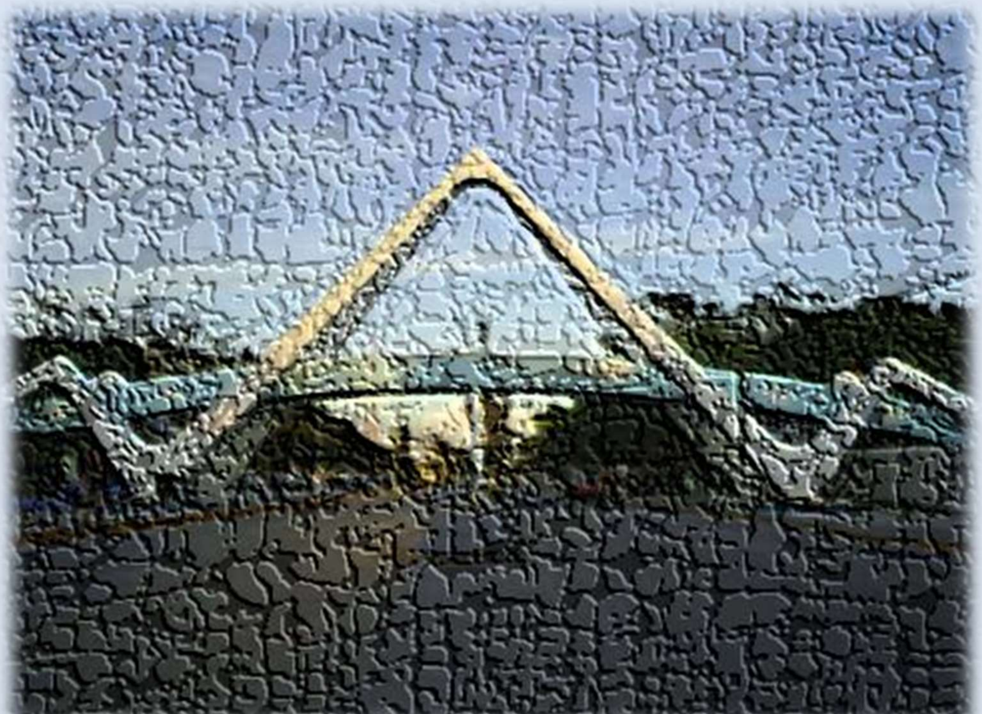
# MÓDULO DE APOYO ACADÉMICO PARA LA ASIGNATURA DE ESTÁTICA.



ING. CARLOS MÉNDEZ MARTÍNEZ.
2015.

# INDICE

## UNIDAD 1
### FUNDAMENTOS FÍSICOS.


BREVE RESEÑA HISTORICA 5
1.1 FUNDAMENTOS FÍSICOS 8
1.1.1 LA PARTÍCULA. 8
1.1.2 CUERPO RÍGIDO 8
1.1.3 FUERZA 8
1.1.3.1 TIPOS DE FUERZA 9
1.1.3.1.1 FUERZA DE LA GRAVEDAD 9
1.1.3.1.2 FUERZA ELECTROMAGNÉTICA 14
1.1.3.1.3 FUERZA NUCLEAR DEBIL 14
1.1.3.1.4 FUERZA NUCLEAR FUERTE. 15
1.1.4 MASA Y PESO 16
1.1.4.1 LA MASA 16
1.1.4.2 PESO 16
1.1.5 LAS LEYES DE NEWTON 17
1.1.5.1 PRIMERA LEY (LEY DE LA INERCIA) 17
1.1.5.2 SEGUNDA LEY (LEY DE LA FUERZA). 17
1.1.5.3 TERCERA LEY (PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN). 18
1.1.6 LA MECÁNICA 18
1.1.7 REPOSO Y MOVIMIENTO 18


## UNIDAD 2
### ANÁLISIS DE PARTÍCULAS.


2.1 EL PLANO COORDENADO CARTESIANO. 23
2.1.1 ¿CÓMO DEFINIR LA POSICIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO? 24
2.1.2 SEGMENTO RECTILÍNEO DIRIGIDO. 27
2.1.3 MAGNITUD DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO DIRIGIDO. 28
2.2 VECTORES Y ESCALARES. 31
2.2.1 MAGNITUD ESCALAR. 31
2.2.2 DEFINICIÓN DE UN VECTOR. 31
2.2.3 CARACTERÍSTICAS DE UN VECTOR. 32
2.2.3.1 MAGNITUD. 32
2.2.3.2 DIRECCIÓN. 32
2.2.3.3 SENTIDO. 34
2.2.4 PROPIEDADES DE LOS VECTORES. 34
2.2.5 SUMA DE VECTORES. 35
2.2.5.1 MÉTODO DEL POLÍGONO. 35
2.2.5.2 MÉTODO DEL PARALELOGRAMO. 37
2.2.5.3 COORDENADAS POLARES DE UN VECTOR. 39
2.2.6 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA, VECTORES UNITARIOS. 47
2.2.6.1 VECTORES UNITARIOS. 54
2.2.6.2 ADICIÓN DE VECTORES FUERZA, MÉTODO DE SUMATORIA DE COMPONENTES RECTANGULARES. 56
2.3 EQUILIBRIO DE PARTÍCULAS. 67
2.3.1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO. 68
2.3.1.1 FUERZAS ANGULARES. 68
2.3.1.2 FUERZAS COLINEALES. 68
2.3.1.3 FUERZAS PARALELAS. 69
2.3.2 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE. 70
2.3.3 EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA. 70
2.3.4 RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA. 71
2.4 FUERZAS EN EL ESPACIO. 95
2.4.1 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA EN E. TRIDIMENSIONALES. 95
2.4.2 COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR. 99

2.4.3 FUERZAS DEFINIDAS POR LAS COORDENADAS DE DOS PUNTOS. 104
2.4.4 EJERCICIOS RELACIONADOS CON SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO. 107
2.4.5 EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO. 122
2.4.6 RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO. 123

## UNIDAD 3
### ANÁLISIS DEL CUERPO RÍGIDO.

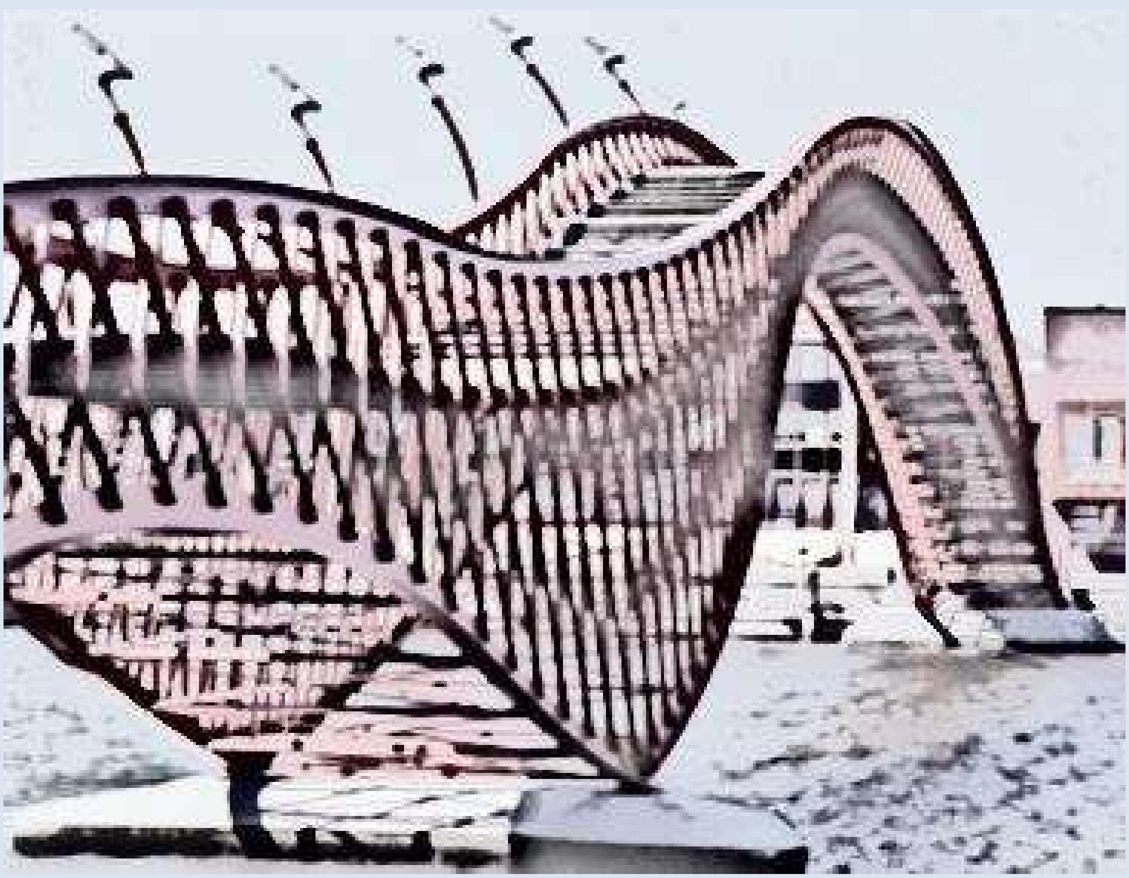
3.1 ANÁLISIS DEL CUERPO RÍGIDO. 142
3.1.1 PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES. 142
3.1.1.1 LA REGLA DE LA MANO DERECHA. 143
3.1.1.2 PROPIEDADES DEL PRODUCTO CRUZ. 145
3.2 PRODUCTO VECTORIAL EN TÉRMINOS DE COMPONENTES RECTANGULARES. 147
3.3 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN DETERMINADO PUNTO DE APLICACIÓN. 152
3.3.1 DEFINICIÓN. 152
3.3.2 CONSIDERACIONES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA. 153
3,4 TEOREMA DE VARIGNON. 156
3.5 COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA. 156
3.6 RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS, ANÁLISIS DEL CUERPO RÍGIDO. 157
3.7 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES. 180
3.7.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR. 181
3.7.2 ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES DADOS. 181
3.7.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UN PRODUCTO PUNTO. 182
3.7.4 VECTORES ORTOGONALES. 185
3.8 PRODUCTO TRIPLE MIXTO DE TRES VECTORES. 186
3.9 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DETERMINADO. 188
3.10 MOMENTO DE UN PAR DE FUERZAS. 199
3.11 PARES EQUIVALENTES DE FUERZAS. 201
3.12 SUMA DE PARES. 203
3.13 DESCOMPONIENDO UNA FUERZA CONOCIDA EN OTRA EN UN PUNTO DETERMINADO O, Y UN PAR. 204
3.14 EJERCICIOS DE APLICACIÓN. 205
3.15 REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS APLICADAS A UN CUERPO, A UNA FUERZA Y A UN PAR EQUIVALENTE. 218
3.16 REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UN TORSOR. 219
3.17 EJERCICIOS DE APLICACIÓN. 221
3.18 EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS EN DOS DIMENSIONES. 253
3.19 EJERCICIOS DE APLICACIÓN. 255

## UNIDAD 4
### FRICCIÓN.

4.1 INTRODUCCIÓN A LA FRICCIÓN. 278
4.2 LA FRICCIÓN SECA. 279
4.3 PROPIEDADES DE LA FRICCIÓN. 280
4.4 VALORES PARA LOS COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA. 281
4.5 EJERCICIOS DE APLICACIÓN. 282

# UNIDAD 1

## FUNDAMENTOS FÍSICOS.



# UNIDAD 1

# FUNDAMENTOS FÍSICOS.

# CONTENIDOS.

## BREVE RESEÑA HISTORICA.

### 1.1 FUNDAMENTOS FÍSICOS.

1.1.1 LA PARTÍCULA.

1.1.2 CUERPO RÍGIDO.

1.1.3 FUERZA.

1.1.3.1 TIPOS DE FUERZA.

1.1.3.1.1 FUERZA DE LA GRAVEDAD.

1.1.3.1.2 FUERZA ELECTROMAGNÉTICA.

1.1.3.1.3 FUERZA NUCLEAR DEBIL.

1.1.3.1.4 FUERZA NUCLEAR FUERTE.

1.1.4 MASA Y PESO.

1.1.4.1 LA MASA.

1.1.4.2 PESO.

1.1.5 LAS LEYES DE NEWTON.

1.1.5.1 PRIMERA LEY (LEY DE LA INERCIA).

1.1.5.2 SEGUNDA LEY (LEY DE LA FUERZA).

1.1.5.3 TERCERA LEY (PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN).

1.1.6 LA MECÁNICA.

1.1.7 REPOSO Y MOVIMIENTO.

## RESULTADOS DE APRENDIZAJE.

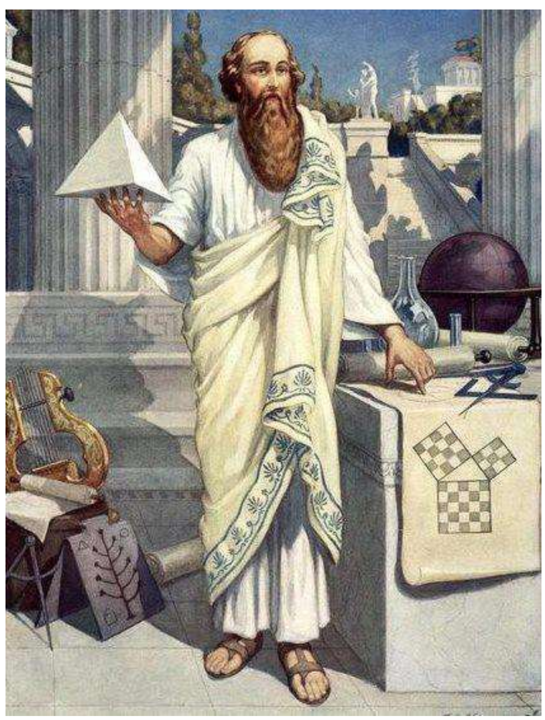
**CONOCER LA FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA EN LA QUE SE SUSTENTA LA ASIGNATURA DE ESTÁTICA.**

## BREVE RESEÑA HISTÓRICA.

El término geometría etimológicamente proviene de dos términos griegos ***geo,*** que significa tierra, y, ***metrein*** medir. Por lo que literalmente significa "medir la tierra", "conocer la medida de la tierra".

Desde los albores de la civilización, diversas han sido las aportaciones que las diferentes culturas consideradas como cunas del conocimiento vertieron de manera empírica en la construcción de grandes monumentos que incluso en la actualidad impactan por su grandeza y complejidad, Egipto, Babilonia, Sumeria entre otras son un ejemplo palpable de lo expuesto.

Quien si no Pitágoras (Samos 569 AC– Metaponto 475 AC) filósofo y matemático puro, contribuyo de manera notable al avance significativo de la matemática helénica, la aritmética y fundamentalmente en el campo práctico de la geometría, sería quien colocase la piedra angular de la geometría como la conocemos hoy en día, generando una tangible transformación entre lo mítico, arbitrario y muchas veces inconexo de lo empírico hacia el campo de lo lógico, la abstracción, la generalización, es decir a la generación de axiomas, o postulados, y lógicamente a la conceptualización de uno de sus mayores aportes en este campo "El Teorema de Pitágoras".



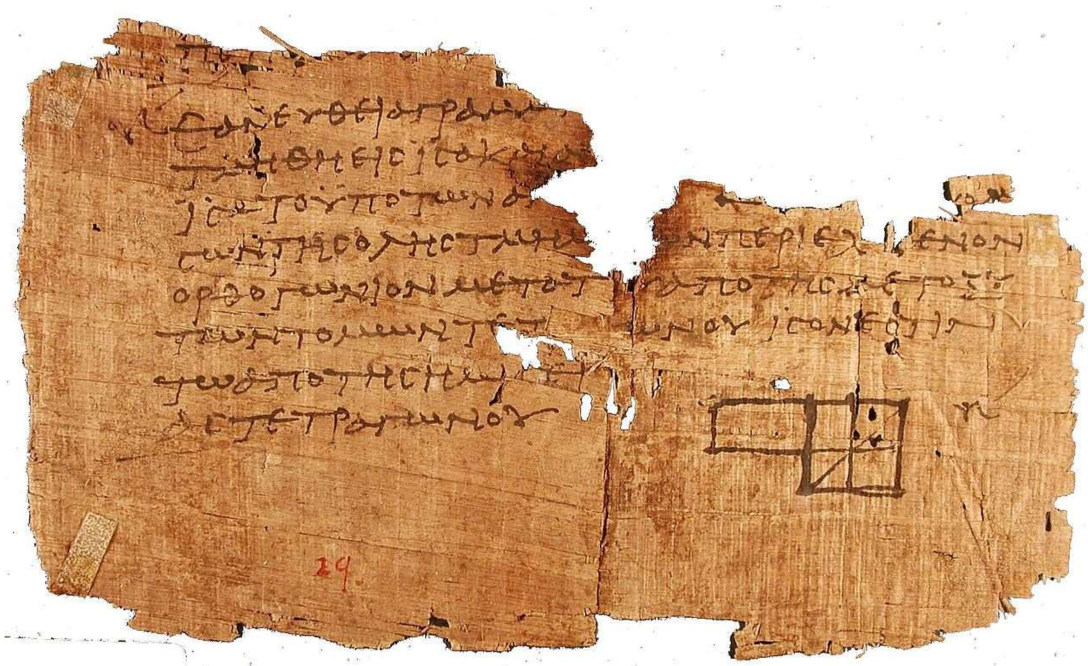
Pitágoras.[1]

[1] http://www.quien.net/pitagoras.php

Euclides (325 AC-265AC), en realidad su vida es poco conocida sabemos con cierta certeza que vivió en Alejandría y desarrollo sus conocimientos en gran medida dentro de esta ciudad, en su libro “***Los Elementos***” recopila, ordena y sistematiza todos los conocimientos de su época, utiliza el razonamiento deductivo que parte de conceptos básicos para la demostración de teoremas, fue gracias a otro filósofo griego Proclo y por sus comentarios acerca de esta obra que conocemos fehacientemente de su existencia y de los aportes de Eudoxo y Teeteto en relación a las teorías de la proporción y de los poliedros regulares, respectivamente.

“Los Elementos ha sido la primera obra matemática fundamental que ha llegado hasta nuestros días, el texto más venerado y que mayor influencia ha tenido en toda la historia de la matemática de hecho, después de la Biblia, es Los Elementos de Euclides la obra que más ediciones ha conocido desde que Gutenberg inventara la imprenta. Los Elementos están constituidos por XIII libros que contienen 465 proposiciones todas verdaderas, que han resistido el paso del tiempo como ninguna otra científica permaneciendo vigente e insuperada a lo largo de más de 2300 años”. (portal_planeta)

Este conjunto de tratados dieron origen a la denominada “Geometría Euclidiana”.



Fragmento de los Elementos de Euclides, escrito en papiro, hallado en el yacimiento de Oxirrinco, Egipto.[2]

[2] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8d/P._Oxy._I_29.jpg

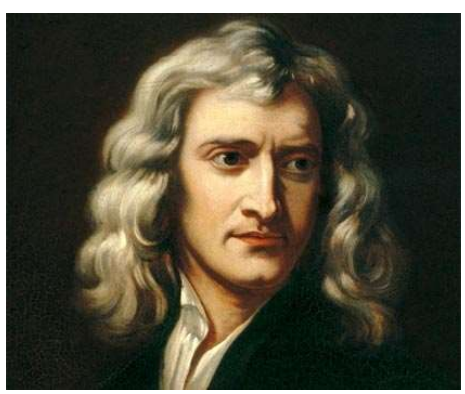
En realidad los postulados esgrimidos por los griegos no cambiaron significativamente hasta entrada la edad media. Fue con los aportes del matemático y filósofo René Descartes (La Haye, Francia 1596-Estocolmo, Suecia 1650) cuando se incursionó en nuevos aportes al campo de la geometría "El Discurso del Método" que fuera publicado en el año de 1637 originando la simbiosis entre la geometría clásica y el álgebra que constituye la base fundamental de la geometría analítica.

En "El Discurso del Método", se propone fundamentalmente poner a juicio todo el campo del conocimiento humano conocido hasta esa época, pero siempre encaminada a "la búsqueda de principios últimos sobre los cuales cimentar sólidamente el saber", en resumen se trata en consecuencia de dudar de todo y poner como único juez del conocimiento a la conciencia "pienso luego existo".

"El método cartesiano, que Descartes propuso para todas las ciencias y disciplinas, consiste en descomponer los problemas complejos en partes progresivamente más sencillas hasta hallar sus elementos básicos, las ideas simples, que se presentan a la razón de un modo evidente, y proceder a partir de ellas, por síntesis, a reconstruir todo lo complejo, exigiendo a cada nueva relación establecida entre ideas simples la misma evidencia de éstas. Los ensayos científicos que seguían al Discurso ofrecían un compendio de sus teorías físicas, entre las que destaca su formulación de la ley de inercia y una especificación de su método para las matemáticas". (Vidas., 2014-2015).

Entre los aportes relevantes de Newton podemos citar las leyes fundamentales de la dinámica, su deducción de la ley de gravitación universal, su magistral sistematización de las leyes del movimiento, considerado el padre de la física clásica que se mantuvo incólume hasta el advenimiento de otro genial científico Albert Einstein, con su formulación de la teoría de la relatividad.

En el campo matemático, la publicación de su conocida fórmula para el desarrollo de la potencia de un binomio con un exponente cualquiera, entero o fraccionario, y su aporte al estudio de las series infinitas dentro del cálculo infinitesimal.



Sir Isaac Newton[3]

[3] http://www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/

## 1.1 FUNDAMENTOS FÍSICOS.

### 1.1.1 LA PARTÍCULA.

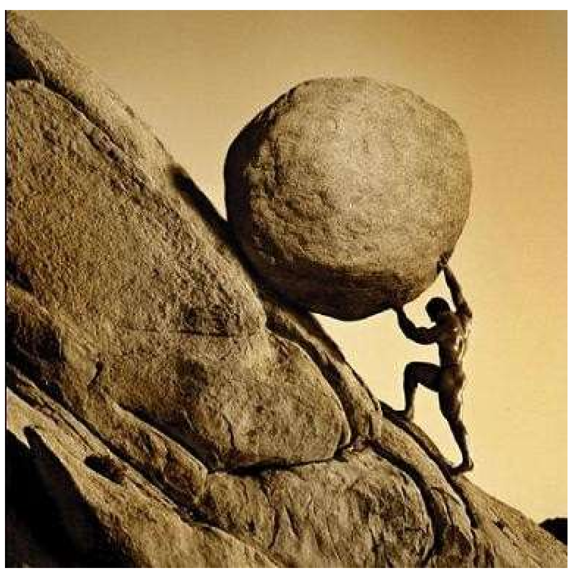
Como partícula en un sentido general, se podrá entender la más pequeña porción de materia que ocupa un lugar en el espacio, es importante tener en consideración que una partícula es un cuerpo que posee masa, y del cual no se tendrá en cuenta para efectos de representar un fenómeno físico dado, su tamaño ni forma, en otras palabras se la considera un punto (carente de dimensiones) dentro de un sistema referencial predefinido.

### 1.1.2 CUERPO RÍGIDO.

Un cuerpo rígido es considerado un "**modelo ideal**", su forma no puede variar bajo la acción de sistemas de fuerzas exteriores a las cuales puede estar sometido, lo cual implica que la distancia entre los elementos constitutivos de su estructura es invariable en el transcurso del tiempo, ningún cuerpo en la naturaleza cumple con esta característica pues todos se deforman bajo la acción de una o más fuerzas que actúan sobre él.

### 1.1.3 FUERZA.

En primer lugar entenderemos la fuerza como una magnitud física, cuya acción sobre un cuerpo puede modificar el estado del mismo, reposo o movimiento, al incorporar una aceleración que cambia el valor de su módulo o altera la dirección de su velocidad, puede incluso llegar a deformarlo alterando sus características morfológicas, en ocasiones puede actuar de tal manera que ocurren ambas situaciones a la vez. Las fuerzas se las representan como vectores en el plano o el espacio.



**Fuerza.**[4]

**FIGURA 1.**

[4] http://poetadelalba1985.blogspot.com/2012/10/fuerza-humana.html

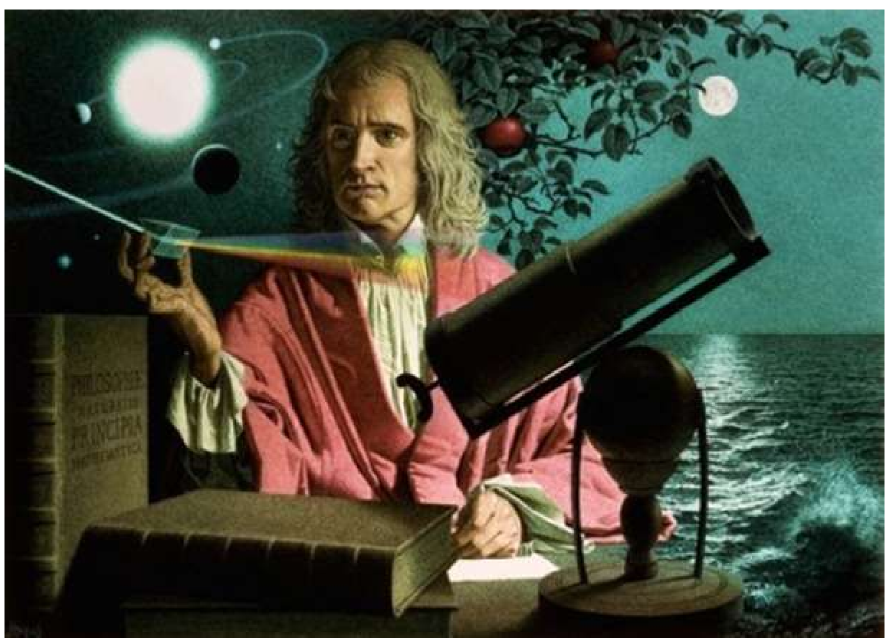
## 1.1.3.1 TIPOS DE FUERZA.

**1.1.3.1.1 FUERZA DE LA GRAVEDAD**: La fuerza de la gravedad, o también fuerza gravitatoria, etimológicamente proviene de dos vocablos de raíces griegas que son “fortia”, que implica fuerte y “gravis”, pesado, acompañado del sufijo “dad” que es un indicador de cualidad.

La gravedad es una fuerza que se produce entre objetos con masa, en nuestro planeta es aquella atracción que la tierra ejerce sobre todos los cuerpos dirigida hacia su centro en razón de su masa.

La determinación de la fuerza gravitatoria fue expuesta por **Sir Isaac Newton**, quien dilucidó la existencia de una fuerza universal que actuaba sobre todos los cuerpos y que se traducía en atracción entre los mismos, denominándola “**fuerza de gravitación universal**”, misma que es una fuerza instantánea, es decir, actúa de manera inmediata ante la proximidad de dos cuerpos separados una distancia.

Bajo este razonamiento se entiende que esta fuerza es universal, y que es la misma que gobierna desde los macro movimientos de los planetas y las estrellas, así como la simple caída de una manzana en nuestro planeta.



**Sir Isaac Newton.**[5]

**FIGURA 2.**

[5] http://www.taringa.net/posts/ciencia-educacion/18078564/12-Aportes-de-Isaac-Newton-a-la-ciencia.html

**Enunciado:** **"**La interacción gravitatoria entre dos cuerpos, puede expresarse mediante una fuerza cuyo módulo es directamente proporcional al producto de sus masas $m_1$ y $m_2$, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa r".

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \textit{(1)}$$

Donde: $m_1$ y $m_2$ , son los valores de las masas de los cuerpos considerados.
r, el valor de la distancia entre los cuerpos considerados.
G, la constante universal o constante de gravitación universal.

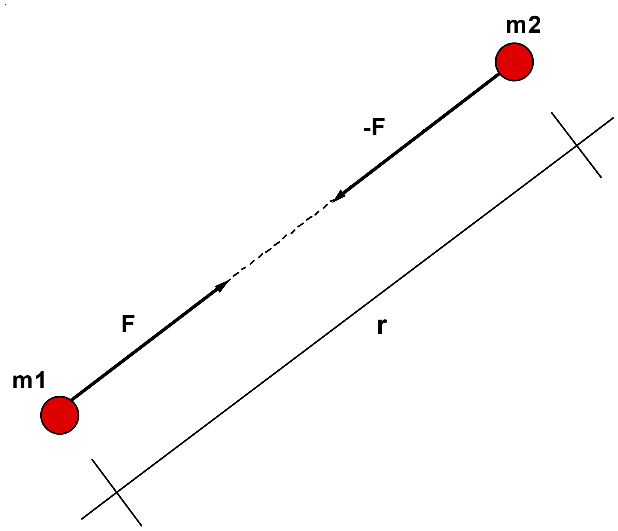



**FIGURA 3.**

Despejando de la ecuación (3), el valor de G se podrá determinar la ecuación dimensional de la constante de gravitación en el sistema SI (Sistema Internacional de Unidades)

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2} \quad \textit{(2)}$$

$$[G] = \frac{[F][r^2]}{[m_1][m_2]} = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2} \quad \textit{(3)}$$

El valor de la constante de gravitación universal o constante de Cavendish (Henry Cavendish, Niza, Francia, 1731 – Londres, Inglaterra 1810, físico y químico británico) es:

$$G = 6{,}67\mathrm{E}^{-11}\ \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

En un artículo publicado por la revista Nature, el investigador de la Universidad de Florencia Gabriele Rosi, conjuntamente con otros autores han referido un nuevo valor para la constante basados en la interferometría cuántica de átomos fríos:

$$G = 6{,}67191(99)\mathrm{E}^{-11}\ \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

Como se podrá apreciar existe un error del 0,015 por ciento y difiere en unas 1,5 desviaciones estándar del valor recomendado por el Comité de Datos para la Ciencia y Tecnología (CODATA).

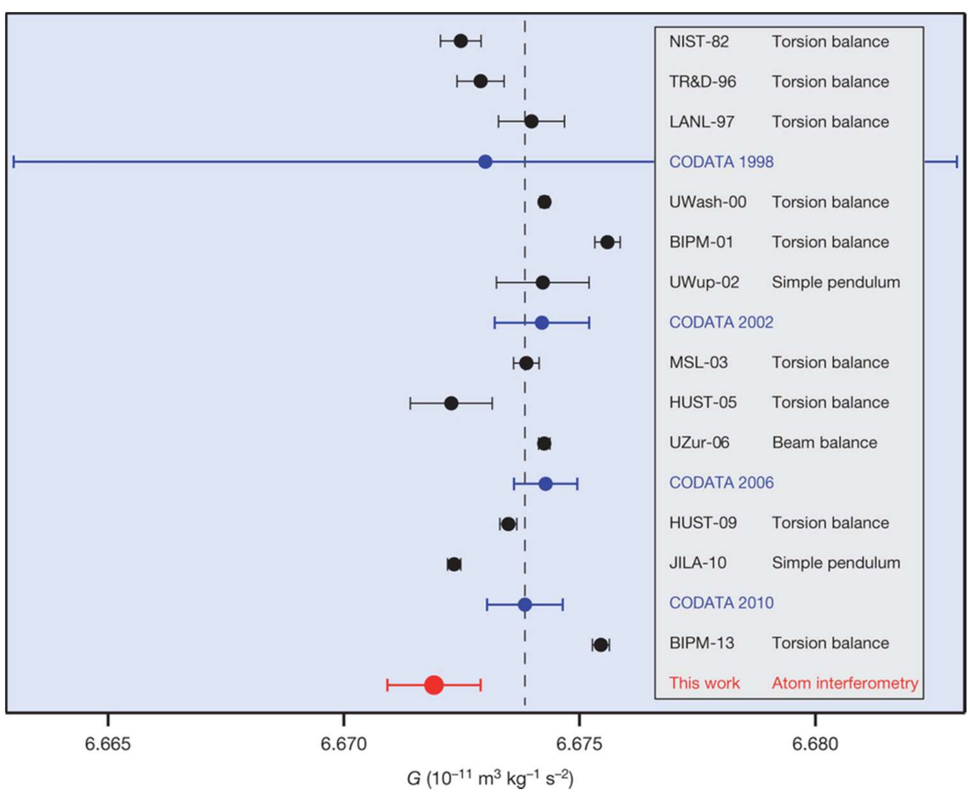



**FIGURA 4.**

La constante de la gravitación universal (G) según varios experimentos realizados durante los últimos treinta años. En azul oscuro se muestran los valores recomendados por el Comité de Datos para la Ciencia y la Tecnología (CODATA); en rojo, el resultado del último experimento de interferometría atómica. [2]

Ahora se analizará que sucede con la atracción que la Tierra ejerce sobre una partícula situada en su superficie, lo cual se define como el peso W de dicha partícula, de esta manera y considerando que:

$$g = \frac{Gm}{R^2} \qquad \textbf{\textit{(4)}}$$

Donde: m, es el valor de las masa de la partícula considerada.
R, el valor del radio terrestre.
G, la constante universal o constante de gravitación universal.

Se definirá por consiguiente la magnitud del peso de una partícula de masa m determinada por la siguiente relación:

$$W = mg \qquad \textbf{\textit{(5)}}$$

Se deberá considerar además que, el valor de la aceleración de la gravedad no es constante, ya que la misma varía de acuerdo con la elevación del punto en consideración, así como dependerá de la latitud ya que como conocemos el planeta Tierra no es una esfera perfecta, asemejándose a un elipsoide el cual presenta achatamientos a nivel de sus polos debido al comportamiento plástico que presenta la misma por efecto de su movimiento rotacional.

La gravedad entonces por las condiciones antes expuestas no está dirigida exactamente hacia el centro del planeta, sino experimenta una desviación con respecto a la vertical de aproximadamente 11’ 40’’ a 45° de latitud, siendo la variación en la superficie menor a 0,5 por ciento por lo que se considera su valor como constante. [3]

De manera general se acepta como valores para la aceleración de la gravedad:

$$9{,}81\ \frac{m}{seg^2} \quad \text{Así como también} \quad 32\ \frac{pies}{seg^2}$$

**Conclusiones:**

- El valor de la constante de gravitación “G”, es universal.

- El valor de la aceleración de la gravedad “g” no es constante, ni tampoco universal.

- La masa de un cuerpo es siempre constante en cualquier lugar del universo.

- El peso “W” de un cuerpo es función directa del valor de la aceleración de la gravedad.

- La ley de gravitación universal representa específicamente la fuerza de atracción entre dos partículas separadas una determinada distancia “r”.

- La fuerza de la gravedad es la gestora de toda la cinética en el universo.

- La fuerza de la gravedad es la que ocasiona que toda la materia en el universo dotada de energía interaccione entre sí.

**Vuelo de gravedad cero.**[6]

**FIGURA 5.**

[6] http://www.elmundo.es/ciencia/2015/02/03/54cf8524268e3ea63d8b456d.html

**1.1.3.1.2 FUERZA ELECTROMAGNÉTICA:** La fuerza electromagnética, o también electromagnetismo es directamente la causa de la interacción entre las partículas que poseen una carga eléctrica y por ende de las reacciones químicas, por consiguiente, al hablar de carga eléctrica su naturaleza será atractiva o repulsiva.

La fuerza electrostática actuará entre partículas con cargas en reposo.
La fuerza eléctrica y magnética interacciona sobre cargas que se encuentran en movimiento relativo entre ellas.

**Conclusiones:**

- La fuerza electromagnética es considerada débil.
- Su radio de interacción o alcance es infinito.
- Las interacciones electromagnéticas, explican fenómenos como:

  El magnetismo.
  La electricidad.
  Ondas electromagnéticas.
  Estructura interna de la materia a escala atómica y molecular.
  Interacciones entre la materia y la luz.

**1.1.3.1.3 FUERZA NUCLEAR DEBIL:** La fuerza nuclear débil o denominada también interacción débil, es solo una de las interacciones entre partículas consideradas fundamentales, y causal de fenómenos naturales como por ejemplo la denominada desintegración beta.

No ocasiona efectos solo atractivos o repulsivos, como la anterior, sino que genera "cambios de identidad de las partículas", que se traduce en una reacción de partículas subatómicas.

**Conclusiones:**

- Los elementos se convierten en partículas de mayor liviandad.
- Su intensidad es débil.
- El alcance es menor que la fuerza nuclear fuerte.


**Fuerza nuclear débil.**[7]

**FIGURA 6.**

**1.1.3.1.4 FUERZA NUCLEAR FUERTE:** La fuerza nuclear fuerte o interacción nuclear fuerte, es responsable de mantener unidos los elementos que coexisten en el núcleo de un átomo es decir a protones y neutrones (nucleones), permite a los quarks unirse entre sí con el propósito de formar hadrones.

**Conclusiones:**

- Sus efectos se aprecian a distancias muy pequeñas (del tamaño de los núcleos atómicos), corto alcance.
- Su radio de acción es el más elevado de los cuatro.
- Según el modelo estándar, la partícula mediadora de esta fuerza es el gluon.

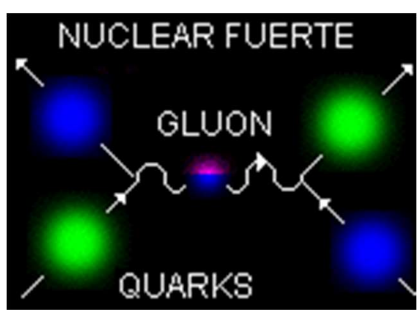
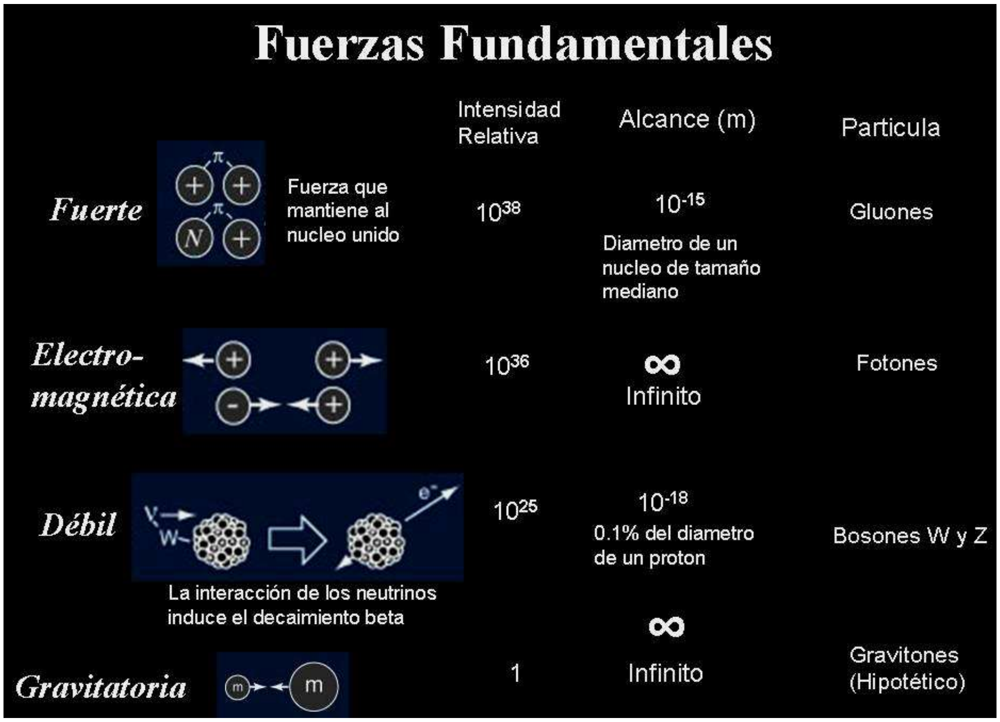



**FIGURA 7.**[8]

[7] http://akifrases.com/frase/174955
[8] http://astrojem.com/teorias/fuerzanuclearfuerte.html




**Fuerzas fundamentales.**[9]

**FIGURA 8.**

## 1.1.4 MASA Y PESO.

**1.1.4.1 LA MASA**, propiedad definida en el ámbito de la física como la cantidad de materia que posee un cuerpo, es una magnitud de tipo escalar, como se indicó con anterioridad su valor es siempre constante en cualquier lugar (suponiendo que el objeto no está viajando a velocidades relativistas con respecto al observador), independientemente de la altitud y latitud, sus unidades de medida más utilizadas son el gramo (g) y el kilogramo (Kg), sufre aceleraciones.

**1.1.4.2 PESO**, medida de fuerza que es ocasionada por el campo gravitatorio sobre un cuerpo, el peso es una magnitud vectorial, varía según la ubicación es decir depende de la altitud y latitud, se valor o magnitud puede ser medida mediante un dinamómetro y sus unidades más frecuentes en el Sistema Internacional de Unidades SI son la dina y el Newton, produce aceleraciones.

[9] http://con-ciencia-te.blogspot.com/2013/03/fuerzas-fundamentales.html


**FIGURA 9.**[10]

## 1.1.5 LAS LEYES DE NEWTON.

Las leyes de Newton, o conocidas también como "Leyes del movimiento de Newton", fueron enunciadas por primera vez en su genial obra "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", publicada en 1687.

Las tres leyes fundamentales constituyen, conjuntamente con las transformaciones de Galileo, la base fundamental de la mecánica clásica, y que combinadas con la ley de gravitación universal, explican las leyes de Kepler sobre los movimientos planetarios.

### 1.1.5.1 PRIMERA LEY (LEY DE LA INERCIA).

Si la magnitud de la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula que se encuentra en reposo es igual a cero, la misma permanece en reposo o, continuará desplazándose con velocidad constante (aceleración igual a cero) en línea recta si originalmente estaba en movimiento.

### 1.1.5.2 SEGUNDA LEY (LEY DE LA FUERZA).

La aceleración que una partícula experimenta, es directamente proporcional a la magnitud de la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella, e inversamente proporcional a su masa, manteniendo siempre la misma dirección y sentido de esta resultante.

Esta ley se la puede expresar de la siguiente manera:

$$F = ma \qquad a = \frac{F}{m} \qquad \textit{(6)}$$

[10] http://iesmh.edu.gva.es/ptebar/peso%20y%20masa.htm

Donde $F$ y $a$ son los valores de la resultante de las fuerzas actuantes y la aceleración de la partícula respectivamente, y $m$ el valor de su masa.

### 1.1.5.3 TERCERA LEY (PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN).

Si dos cuerpos se encuentran en contacto, y el uno ejerce una fuerza sobre el otro, el segundo reaccionará sobre el primero con otra fuerza cuya magnitud es la misma pero con direcciones opuestas y actuando sobre la misma línea de acción de la primera.

### 1.1.6 LA MECÁNICA.

La mecánica es una rama de la física, que permite analizar las condiciones de movimiento y reposo de los cuerpos, y su evolución en el tiempo, bajo la acción de fuerzas.

Desde un punto de vista netamente clásico, se la podría dividir en:

**a)** Mecánica de los cuerpos rígidos.
**b)** Mecánica de los cuerpos deformables.
**c)** Mecánica de fluidos.

El enfoque de la mecánica al ser una ciencia física que analiza fenómenos física en resumen estudia los movimientos y las condiciones de equilibrio de los cuerpos.

En lo que compete al presente tratado se considera la mecánica de los cuerpos rígidos, la cual se subdivide a su vez en estática y dinámica.

### 1.1.7 REPOSO Y MOVIMIENTO.

Para llegar a una comprensión de los conceptos de reposo y movimiento, es preciso tomar como punto de partida algunas consideraciones fundamentales como por ejemplo, en el universo, ¿existirá algo que no se mueva?, la respuesta a esta interrogante aparentemente lógica sería, “en el universo todo se mueve”, entonces, si esta posición es verdadera, ¿qué sucede con el reposo?

Bajo estas consideraciones cabe introducir la idea de relatividad que permite comprender que el estado de reposo o movimiento de un cuerpo no son absolutos, sino relativos y que dependen de un sistema de referencia y desde el punto de vista o posición del observador.

De esta manera, el reposo es un estado de la materia, dentro de la física se lo conseptualiza como un cuerpo que se desplaza con movimiento rectilineo uniforme, es decir que la resultante de las fuerzas que actuan sobre él es nula lo que ocaciona que su velocidad sea constante.

**Conclusiones:**

- El estado de reposo solo existirá dentro de un sistema de referencia.

- En el universo no existe el reposo absoluto.

- El reposo es un concepto relativo, y depende del sistema de referencia desde el cual se realiza la observación.

**FIGURA 10.**[11]

Tomemos como ejemplo lo que sucede con un automóvil que se desplaza en una carretera, si consideramos un observador externo que percibe el desplazamiento parado junto a la vía, tanto las personas que van en el interior como el vehículo se mueven conjuntamente, y con la misma velocidad; pero dentro del auto las personas están en reposo una respecto de la otra, ya que su distancia no varía, es por ello que cuando se requiere hablar de que algo se mueve, siempre tenemos que indicar que su desplazamiento es relativo con respecto a algo.

Se define como movimiento al cambio de posición de un cuerpo respecto de otro, durante un determinado lapso de tiempo.

**Conclusiones:**

- El movimiento es un estado de la materia.

- El movimiento es un fenómeno físico que define un cambio de posición en el espacio.

- El movimiento de un cuerpo se considera con respecto al tiempo y a un punto de referencia.

[11] http://www.cvinoticias.com/filtro.php?sec=44&_pagi_pg=282&_pagi_pg=281

# UNIDAD 2

## ANÁLISIS DE PARTÍCULAS.

# UNIDAD 2

## ANÁLISIS DE PARTÍCULAS.

## CONTENIDOS.


**2.1 EL PLANO COORDENADO CARTESIANO.**

2.1.1 ¿CÓMO DEFINIR LA POSICIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO?

2.1.2 SEGMENTO RECTILÍNEO DIRIGIDO.

2.1.3 MAGNITUD DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO DIRIGIDO.

**2.2 VECTORES Y ESCALARES.**

2.2.1 MAGNITUD ESCALAR.

2.2.2 DEFINICIÓN DE VECTOR.

2.2.3 CARACTERÍSTICAS DE UN VECTOR.

2.2.3.1 MAGNITUD.

2.2.3.2 DIRECCIÓN.

2.2.3.3 SENTIDO.

2.2.4 PROPIEDADES DE LOS VECTORES.

2.2.5 SUMA DE VECTORES.

2.2.5.1 MÉTODO DEL POLÍGONO.

2.2.5.2 MÉTODO DEL PARALELOGRAMO.

2.2.5.3 COORDENADAS POLARES DE UN VECTOR.

2.2.6 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA, VECTORES UNITARIOS.

2.2.6.1 VECTORES UNITARIOS.

2.2.6.2 ADICIÓN DE VECTORES FUERZA, MÉTODO DE SUMATORIA DE COMPONENTES RECTANGULARES.

## 2.3 EQUILIBRIO DE PARTÍCULAS.

2.3.1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

2.3.1.1 FUERZAS ANGULARES.

2.3.1.2 FUERZAS COLINEALES.

2.3.1.3 FUERZAS PARALELAS.

2.3.2 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.

2.3.3 EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA.

2.3.4 RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA.

## 2.4 FUERZAS EN EL ESPACIO.

2.4.1 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA EN ESPACIOS TRIDIMENSIONALES.

2.4.2 COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR.

2.4.3 FUERZAS DEFINIDAS POR LAS COORDENADAS DE DOS PUNTOS.

2.4.4 EJERCICIOS RELACIONADOS CON SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO.

2.4.5 EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO.

2.4.6 RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO.

## RESULTADOS DE APRENDIZAJE.

**ANALIZAR Y SOLUCIONAR EJERCICIOS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO DE PARTÍCULAS, EN SISTEMAS DONDE SE APLICA LA ACCIÓN DE FUERZAS.**

## 2.1 EL PLANO COORDENADO CARTESIANO.

En la geometría plana, el sistema coordenado cartesiano está generado por el entrecruzamiento de dos rectas perpendiculares o normales que se intersectan en un punto común denominado origen de coordenadas rectangulares (O), es también conocido como sistema euclidiano, o simplemente sistema coordenado bidimensional, y por lo tanto permite representar objetos en dos dimensiones, la recta que discurre en sentido horizontal toma el nombre de eje de las abscisas, o simplemente eje "X", y la recta que discurre en sentido vertical toma el nombre de eje de las ordenadas, o simplemente eje de las "Y".

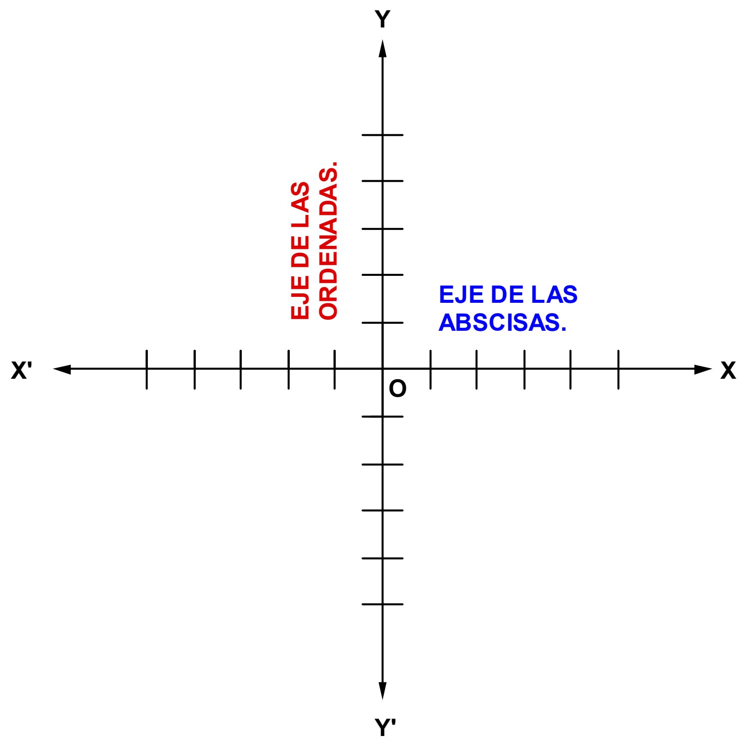
El mencionado entrecruzamiento de los ejes coordenados, da lugar o genera la división del plano en cuatro cuadrantes nombrados en sentido anti horario y desde la derecha como cuadrantes I, II, III, y, IV.

Es necesario adoptar la siguiente convención de signos para ubicar el conjunto infinito de números reales en cada uno de los ejes coordenados, a la derecha del origen (O) y siguiendo la dirección del eje "X" números reales positivos; a la izquierda del origen (O) y siguiendo la dirección del eje "X" números reales negativos; hacia arriba del origen (O) y siguiendo la dirección del eje "Y" números reales positivos; hacia abajo del origen (O) y siguiendo la dirección del eje "Y" números reales negativos.

El punto, el ente geométrico por excelencia, conceptualizado en la Grecia clásica dentro de los tratados Euclidianos "Los Fundamentos", constituye el sujeto esencial dentro de la geometría, se lo pudiese conceptualizar como una figura geométrica adimensional, carente de área y volumen, generador de otros elementos fundamentales como la línea (sucesión de puntos), e incluso el plano; el punto como tal al ser una entidad abstracta, solo se lo podría describir como aquel que ocupa una posición en el plano o en el espacio respecto de un sistema coordenado definido, su representación más general puede ser utilizando una marca o una cruz.

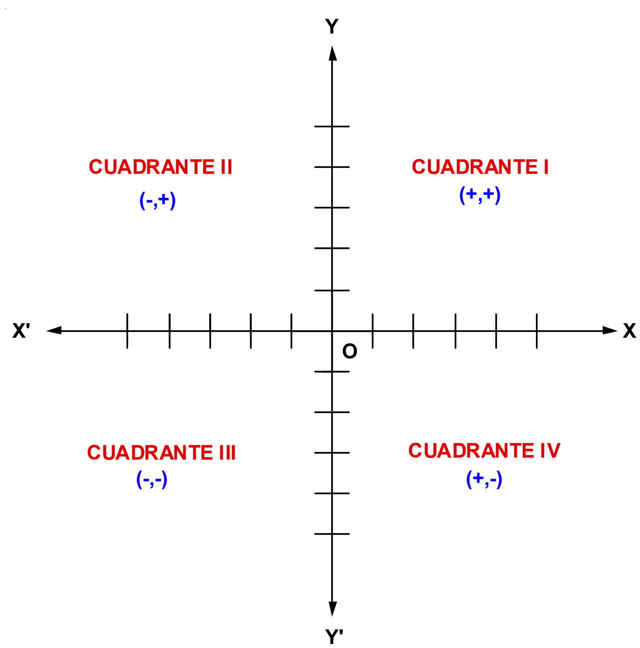
Al mencionar que un punto ocupa una posición en el plano, surge inmediatamente el concepto de coordenadas rectangulares, es decir aquel conjunto constituido por una pareja ordenada (X,Y) o terna ordenada (X,Y,Z) de números reales que permiten definir la posición de un punto en el plano, o en el espacio respectivamente; si hablamos concretamente de un sistema bidimensional, al primer valor de la pareja ordenada "X" corresponde lo que denominamos la abscisa del punto, y al segundo valor de la pareja ordenada "Y" corresponde lo que denominamos la ordenada del punto, es decir que, a cada posición que ocupa un punto en el plano corresponderá únicamente una pareja específica de números reales (X,Y), o de manera recíproca para cada par de números reales (X;Y), existe únicamente un punto en el plano al cual lo representa.

En la siguiente figura se podrá apreciar el plano Euclidiano bidimensional, donde se muestra los diferentes elementos descritos en estos conceptos.




**EL PLANO COORDENADO CARTESIANO.**

**FIGURA 11.**



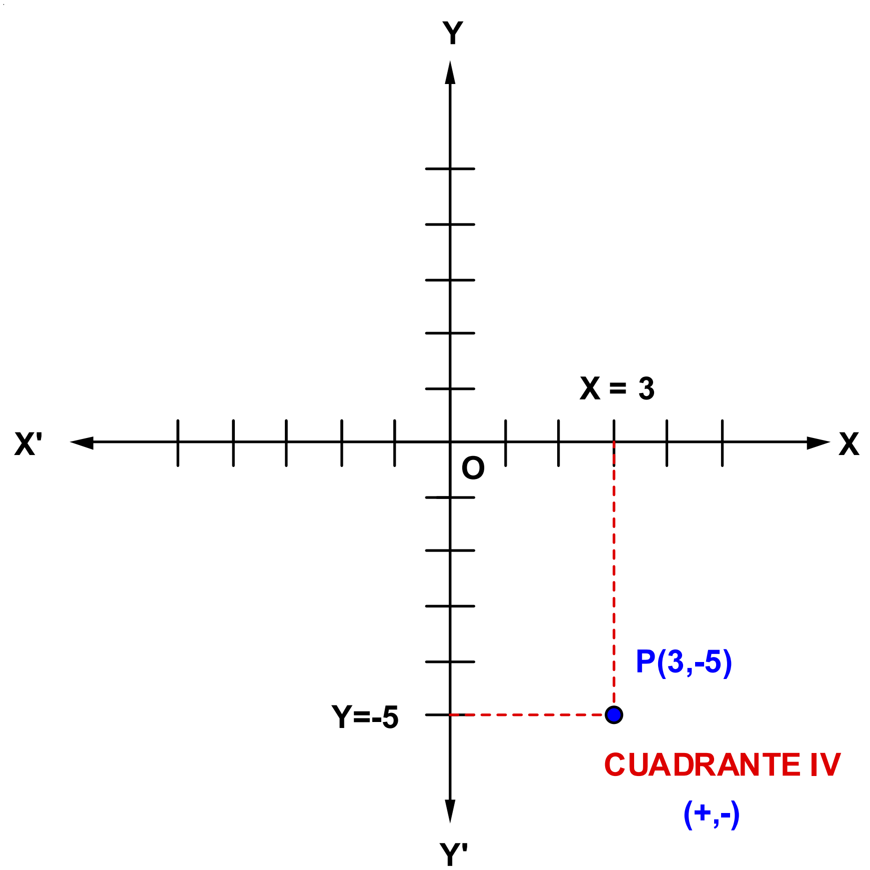

**EL PLANO COORDENADO CARTESIANO.**

**FIGURA 12.**

## 2.1.1 ¿CÓMO DEFINIR LA POSICIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO?

Ejemplo: Ubicar la posición del punto P de coordenadas (3,-5).

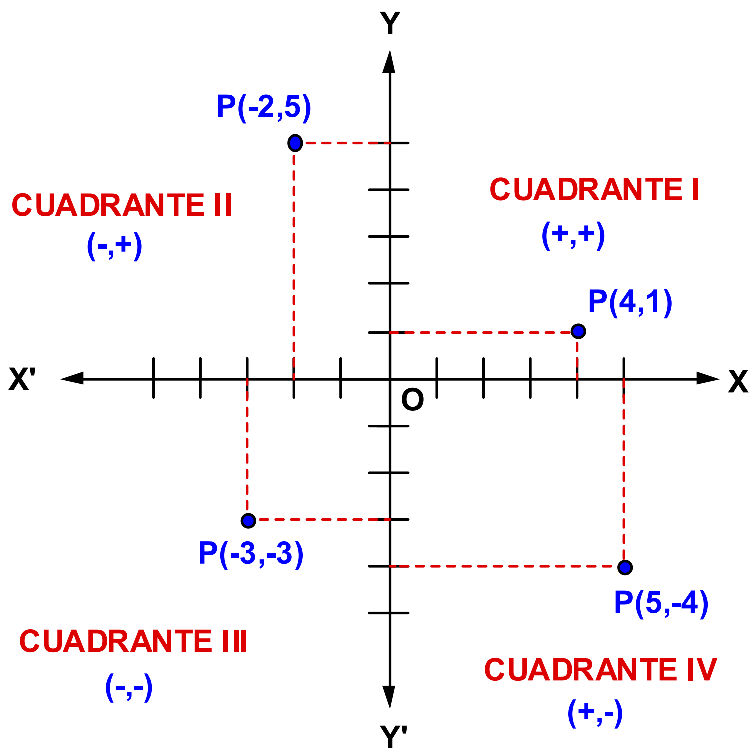
Desarrollo: Como ya se manifestó anteriormente, el punto denotado como P(3,-5), presenta junto a su notación **P** una pareja ordenada de números reales **(X,Y),** por lo tanto, al primer valor lo denominaremos la **abscisa de P**, es decir X = 3 y al segundo valor lo denominaremos **ordenada de P**, es decir Y = -5, de esta manera al ser 3 un número real positivo recorreremos 3 unidades hacia la derecha del eje "X" a partir del origen "O" de coordenadas, y de igual manera al ser -5 un número real negativo recorreremos 5 unidades hacia abajo del eje "Y" a partir del origen "O", luego la posición del punto **P** en el plano estará dada por la intersección de las dos normales levantadas a partir de la ubicación de estos valores en los ejes coordenados.




**EL PLANO COORDENADO CARTESIANO.**

**FIGURA 13.**

A continuación se muestra la ubicación de los puntos P (4,1), Q (-2,5), R (-3,-3), y, S (5,-4)




**EL PLANO COORDENADO CARTESIANO.**

**FIGURA 14.**

**Nota**: Siempre que se ubica la posición de un punto en el plano, se deberá colocar junto a él la notación del punto acompañada de sus correspondientes coordenadas rectangulares, o par ordenado de números reales.

Ejercicio de repaso.

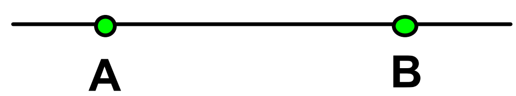
Ubicar las posiciones en plano Cartesiano de los siguientes puntos:

a) P (-5,4)
b) Q (4,7)
c) R (5,-7)
d) S (-6,-2)

### 2.1.2 SEGMENTO RECTILÍNEO DIRIGIDO.

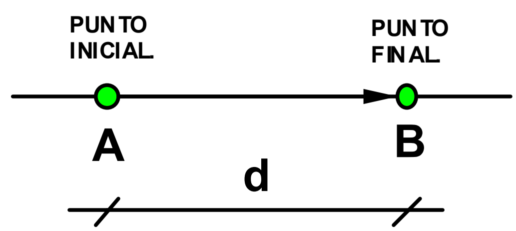
Se define como segmento rectilíneo dirigido a un fragmento de recta que se delimita por la existencia en el plano de dos puntos definidos llamados extremos, en este caso extremos del segmento de recta, considerados además como parte de su lugar geométrico, al punto de partida en la traza se lo denomina punto origen o punto inicial, y al punto donde termina la traza se le denomina punto terminal o punto final.

Bajo estas consideraciones, un segmento rectilíneo dirigido tendrá entonces un sentido definido, y además será factible siempre poder establecer su magnitud, como veremos más adelante.



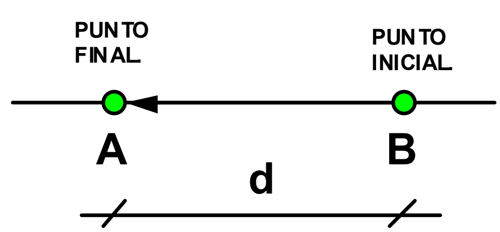

**SEGMENTO RECTILINEO NO DIRIGIDO $AB$.**

**FIGURA 15.**




**SEGMENTO RECTILINEO DIRIGIDO $\overrightarrow{AB}$.**

**FIGURA 16.**



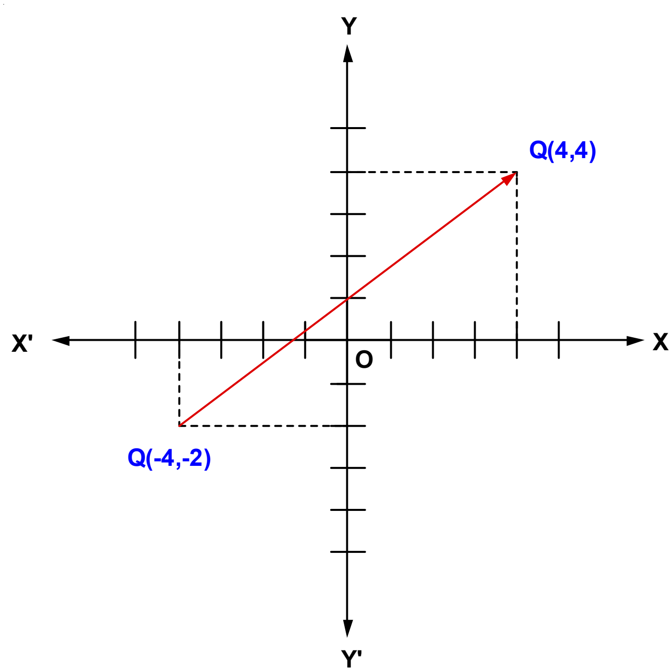

**SEGMENTO RECTILINEO DIRIGIDO $\overrightarrow{BA}$.**

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

**FIGURA 17.**

En las figuras 5 y 6 se puede apreciar dos segmentos rectilíneos dirigidos cuyas magnitudes son iguales, consideradas en valor absoluto sin embargo, sus sentidos son evidentemente opuestos por lo que la primera sería considerada como positiva (izquierda a derecha) y la segunda negativa (derecha a izquierda).

A continuación veamos la representación gráfica de un segmento rectilíneo dirigido en el siguiente ejemplo: Graficar el segmento rectilíneo dirigido cuyo extremo inicial es P (-4,-2) y cuyo extremo final es Q (4,4).




**SEGMENTO RECTILINEO DIRIGIDO.**

**FIGURA 18.**

## 2.1.3 MAGNITUD DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO DIRIGIDO.

Para establecer el valor o magnitud de un segmento rectilíneo dirigido, se tendrá que establecer analíticamente el valor del fragmento de recta que une el punto inicial con el punto terminal del mismo, por lo tanto, supongamos que el punto inicial del segmento es $P(x_1, y_1)$ y el punto terminal es $Q(x_2, y_2)$, entonces la magnitud buscada estará dada por la relación:

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2} \qquad \textit{(7)}$$

**Ejemplo de cálculo 1.-** Determine el valor o magnitud del segmento de recta dirigido cuyas coordenadas del punto inicial son P (-4,-2) y punto terminal Q (4,4).

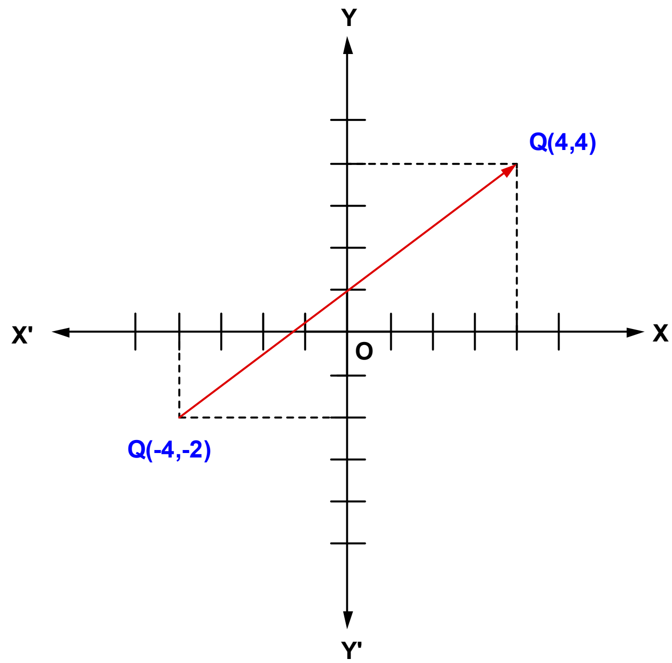



FIGURA 19.

- **Datos.**

  Punto Inicial: P (-4,-2); punto terminal: Q (4,4).

- **Objetivo.**

  Determinar la magnitud del segmento de recta dirigido PQ al cual denominaremos $d_{PQ}$.

- **Procedimiento de cálculo.**

  Dados como punto inicial P y como punto terminal Q, y considerando al segmento dirigido de P a Q, entonces: $x_1$=-4, $x_2$=4, $y_1$=-2, $y_2$=4.
  De acuerdo con la relación 1 se tendrá:

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{PQ} = \sqrt{(4-(-1))^2 + \left(4-(-2)\right)^2}$$

$$d_{PQ} = \sqrt{(5)^2 + (6)^2}$$

$$d_{PQ} = \sqrt{61}\ \mathbf{u.}$$

- **Conclusiones.**

Analíticamente se puede comprobar que $d_{PQ} = d_{QP}$, es decir que:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

**Ejemplo de cálculo 2.-** Halle el valor o magnitud del segmento de recta dirigido cuyas coordenadas del punto inicial son P (5,-4) y punto terminal Q (-3,5).

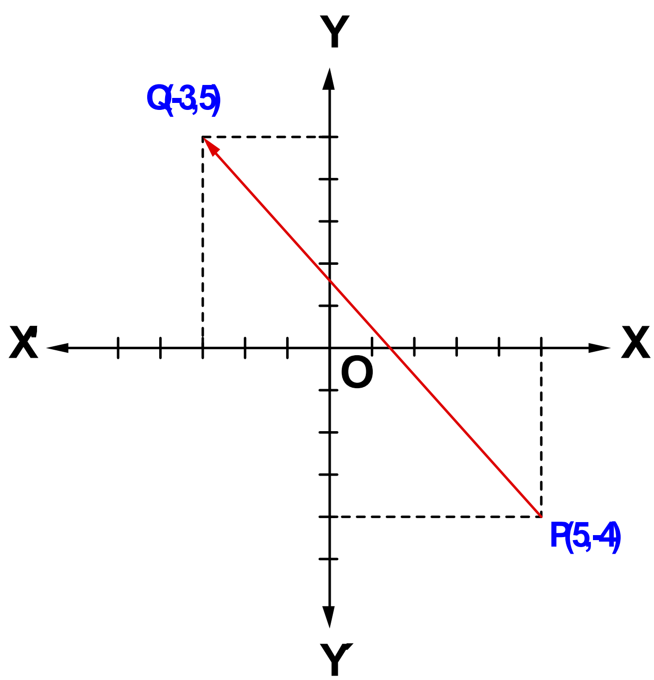



FIGURA 20.

- **Datos.**

Punto Inicial: P (5,-4); punto terminal: Q (-3,5).

- **Objetivo.**

Hallar la magnitud del segmento de recta dirigido PQ al cual denominaremos $d_{PQ}$.

- **Procedimiento de cálculo.**

Dados como punto inicial P y como punto terminal Q, y considerando al segmento dirigido de P a Q, entonces: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$, $y_1 = -4$, $y_2 = 5$.
De acuerdo con la relación 1 se tendrá:

$$\boldsymbol{d_{PQ}} = \sqrt{(\boldsymbol{x_{2-}x_1})^2 + (\boldsymbol{y_{2-}y_1})^2}$$

$$\boldsymbol{d_{PQ}} = \sqrt{(\mathbf{-3-5})^2 + \left(\mathbf{5-(-4)}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{d_{PQ}} = \sqrt{(\mathbf{-8})^2 + (\mathbf{9})^2}$$

$$\boldsymbol{d_{PQ}} = \sqrt{\mathbf{145}} \text{ u.}$$

Ejercicio de repaso.

1.- Sean P (-5.-3) y Q (5,-1), los puntos inicial y terminal respectivamente, de un segmento rectilíneo dirigido PQ, determine la magnitud del segmento.

2.- Sean P (3.4) y Q (-4,-5), los puntos inicial y terminal respectivamente, de un segmento rectilíneo dirigido PQ, determine la magnitud del segmento.

## 2.2 VECTORES Y ESCALARES.

### 2.2.1 MAGNITUD ESCALAR.

Una magnitud escalar, o simplemente escalar, es un tipo de magnitud física que para su completa definición requiere específicamente solo de un número, o coordenada, la cual se caracteriza por ser invariable para cualquier sistema de referencia considerado, como ejemplos se puede citar, la carga eléctrica, la temperatura, la masa, el tiempo, constituyen escalares dentro de la física clásica.

### 2.2.2 DEFINICIÓN DE VECTOR.

La concepción de un vector, puede ser definida desde varias ópticas, geométrica, matemática y física.

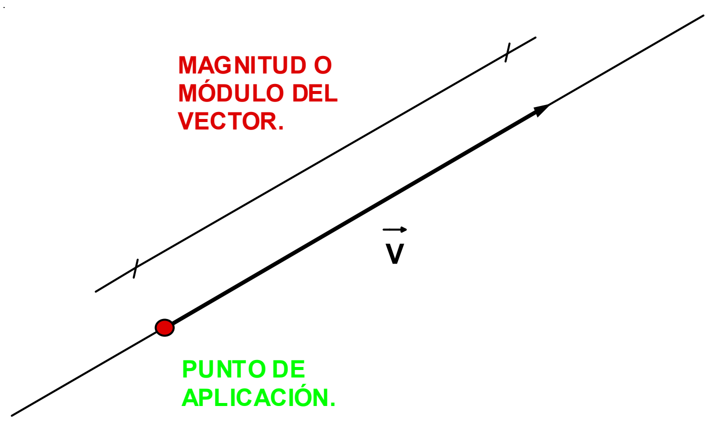
Geométricamente, un vector o vector geométrico, es un segmento rectilíneo dirigido que pertenece a un sistema bidimensional o tridimensional, donde por sus características deberá estar definido por puntos de coordenadas iniciales y terminales.

Matemáticamente, un vector constituye un elemento que pertenece a un espacio vectorial.

Físicamente, un vector constituye otro tipo de magnitud física, representada de manera gráfica por un segmento rectilíneo dirigido, que para su total definición requiere de tres características fundamentales que son magnitud, dirección y sentido, son consideradas como magnitudes vectoriales la velocidad, aceleración, fuerza, intensidad luminosa, campo eléctrico.

## 2.2.3 CARACTERÍSTICAS DE UN VECTOR.

**2.2.3.1 MAGNITUD:** La magnitud o también denominado "módulo del vector", constituye la longitud o el tamaño del vector, que gráficamente estará representado por su medida adoptando escalas apropiadas, y considerando para el efecto su punto inicial y terminal, al punto inicial del vector se lo denomina "punto de aplicación del vector".




**MÓDULO DE UN VECTOR.**

**FIGURA 21.**

**2.2.3.2 DIRECCIÓN:** Se entiende por dirección de un vector a la orientación, o medida del ángulo que hace con respecto a un sistema definido de referencia.

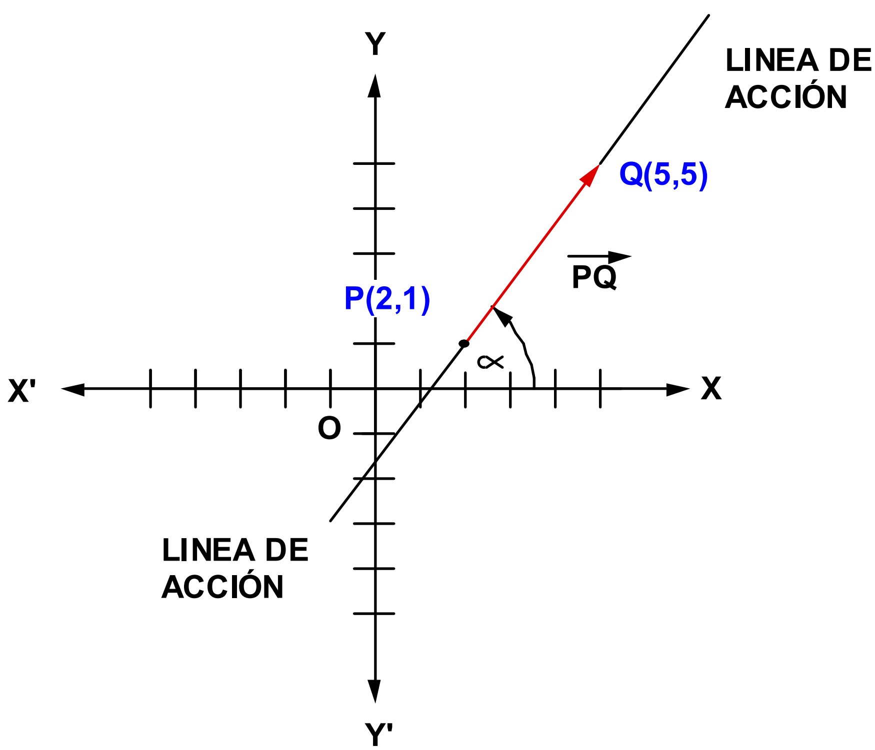
Si el sistema de referencia es por ejemplo el coordenado cartesiano, se debe tener en cuenta que tanto los puntos inicial y terminal del mencionado vector dispondrán de coordenadas rectangulares que definen su posición en el plano, de esta manera se podrá encontrar el valor del ángulo director del vector utilizando la siguiente relación.

$$\alpha = tang^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \qquad (8)$$

Relación en la cual (x1, y1) es el punto inicial y (x2, y2) es el punto terminal.

En la siguiente figura a modo de ejemplo se podrá apreciar la gráfica correspondiente a un vector $\overrightarrow{PQ}$, cuyas coordenadas del punto inicial son P (2,1) y punto terminal Q (5,5), se trata de determinar el valor del ángulo director α con respecto al sistema referencial que en este caso es el sistema coordenado cartesiano, evidentemente este corresponde al ángulo formado entre la línea de acción del vector con respecto al eje de las abscisas “X”.

Es conveniente recordar en este momento el concepto de “línea de acción” de un vector, línea de acción es una recta a cuyo lugar geométrico pertenece el vector, además un vector puede ser desplazado a cualquier posición dentro de ella sin que se altere ni su magnitud ni su dirección.




**DIRECCIÓN DE UN VECTOR.**

**FIGURA 22.**

- **Datos.**

Punto Inicial: P (2,1); punto terminal: Q (5,5).

- **Objetivo.**

  Determinar la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$, con respecto del sistema coordenado cartesiano.

- **Procedimiento de cálculo.**

  Dados como punto inicial P y como punto terminal Q, y considerando al segmento dirigido de P a Q, entonces: $X_1 = 2$, $x_2 = 5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 5$.

  De acuerdo con la relación 2 se tendrá:

$$\alpha = tang^{-1}(\frac{y_{2-}y_1}{x_{2-}x_1})$$

$$\alpha = tang^{-1}(\frac{5-1}{5-2})$$

$$\alpha = tang^{-1}(\frac{4}{3})$$

$$\boldsymbol{\alpha = 53°7'48.37''}$$

Si el ángulo es obtuso de deberá realizar la diferencia de 180° para obtener el ángulo buscado.

**2.2.3.3 SENTIDO:** Se indica mediante una punta de flecha o saeta colocada en uno de los extremos del vector.

### 2.2.4 PROPIEDADES DE LOS VECTORES.

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, y, $\vec{w}$ tres vectores c un escalar, entonces:

$\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}}$ PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA SUMA.

$\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} + (-\vec{\boldsymbol{u}})$ PROPIEDAD SUMA DEL OPUESTO.

$\vec{\boldsymbol{u}} + (\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}}) = (\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}) + \vec{\boldsymbol{w}}$ PROPIEDAD ASOCIATIVA.

$$\vec{u} + 0 = \vec{u} \qquad \text{PROPIEDAD IDENTIDAD.}$$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = 0 \qquad \text{PROPIEDAD IDENTIDAD.}$$

$$1\,\vec{u} = \vec{u} \qquad \text{PROPIEDAD IDENTIDAD.}$$

$$-1\,\vec{u} = -\vec{u} \qquad \text{PROPIEDAD IDENTIDAD.}$$

$$c\,(\vec{u}) = c\vec{u} \qquad \text{PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.}$$

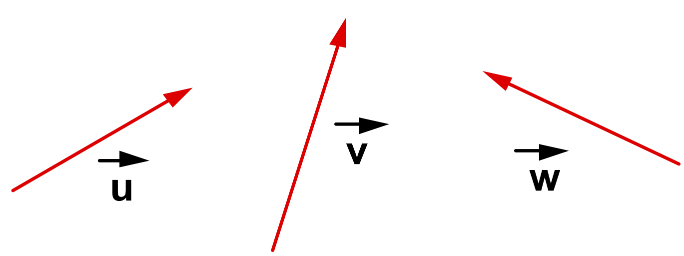
$$c\,(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v} \qquad \text{PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.}$$

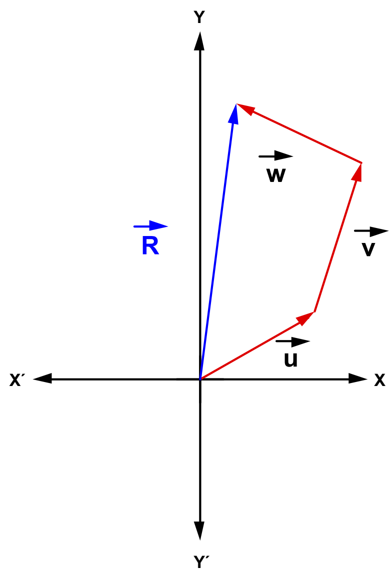
## 2.2.5 SUMA DE VECTORES.

### 2.2.5.1 MÉTODO DEL POLÍGONO.

Cuando se trata de sumar varios vectores, se recomienda la utilización del denominado **método del polígono**, este consiste básicamente en colocar el primer vector, ubicando su punto inicial generalmente coincidente con el origen de coordenadas si fuere el caso, manteniendo siempre presente la correspondiente magnitud dirección y sentido, luego se ubicara el segundo vector partiendo de la cabeza de fecha o saeta del anterior y considerando de igual manera su magnitud dirección y sentido, este proceso se repetirá con los restantes n vectores sumandos, de esta manera el **vector resultante** se determinará uniendo el punto origen del primero con el afijo del último vector como se podrá apreciar en los siguientes ejemplos.

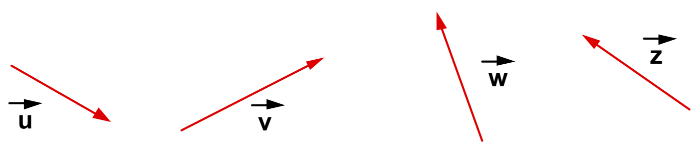
a).-Halle gráficamente el vector resultante $\vec{R}$, siendo $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

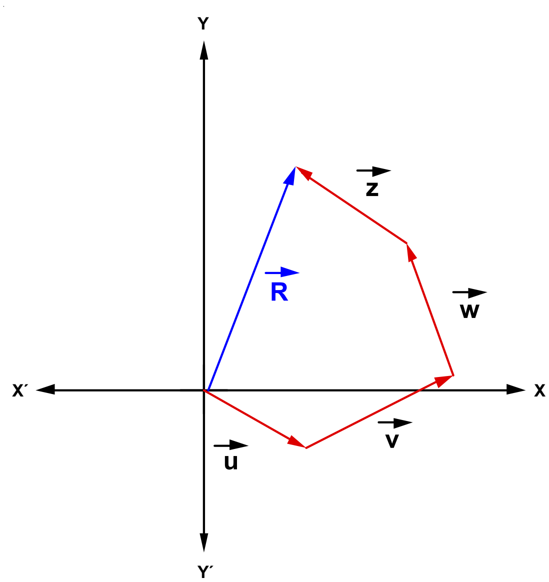





**SUMA DE VECTORES (M. POLÍGONO) FIGURA 23.**

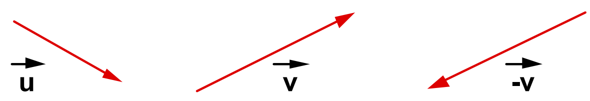
b).-Encuentre gráficamente el vector resultante $\vec{R}$, siendo $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{z}$

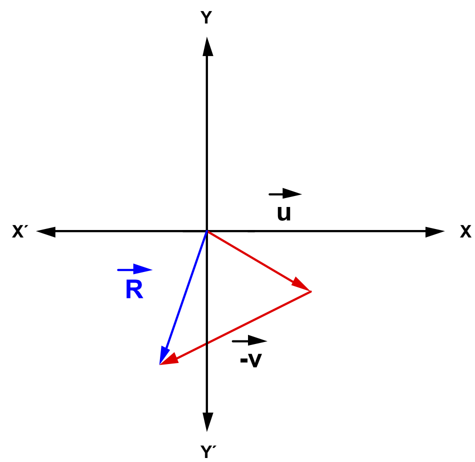



**SUMA DE VECTORES (M. POLÍGONO) FIGURA 24.**

c).-Halle gráficamente el vector resultante $\vec{R}$, siendo $\vec{R} = \vec{u} - \vec{v}$




**SUMA DE VECTORES (M. POLÍGONO) FIGURA 25.**

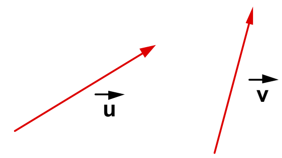
### 2.2.5.2 MÉTODO DEL PARALELOGRAMO.

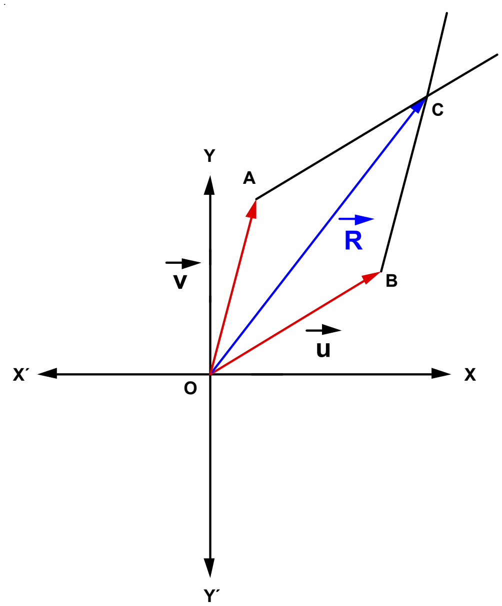
En primer término se define a continuación un **paralelogramo**: Un paralelo gramo es una figura geométrica que tiene sus lados opuestos paralelos y de igual magnitud.

Ahora se describe el proceso para sumar dos vectores mediante el **método del paralelogramo**: se dibujan los vectores de manera que los mismos sean concurrentes (tengan sus puntos iniciales coincidentes), escogiendo una escala adecuada para su magnitud y respetando su dirección y sentido, luego se trazan rectas auxiliares paralelas a los mismos levantadas desde los puntos terminales de tal manera que se genere el paralelogramo, finalmente el vector resultante buscado será la diagonal (recta que une dos puntos opuestos de un paralelogramo), trazada desde el punto común inicial a los dos vectores hasta el vértice opuesto.

En los siguientes ejemplos se ilustra lo expuesto:

a).-Determine por el método del paralelogramo el vector resultante $\vec{R}$, siendo $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v}$

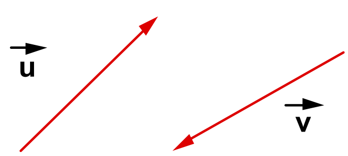


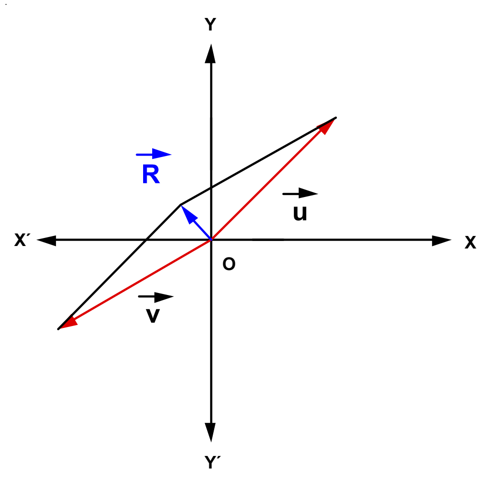




**SUMA DE VECTORES (M. PARALELOGRAMO) FIGURA 26.**

En la figura, el segmento de recta dirigido $\overline{OA}$ es el vector $\vec{v}$, el $\overline{OB}$ es el vector $\vec{u}$, las líneas auxiliares AC y BC definen el paralelogramo OACB, ya que OA es paralelo e igual a BC y, AC es paralelo e igual a OB por construcción, de esta manera que por definición la diagonal $\overline{OC}$ es igual al vector resultante suma $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v}$.

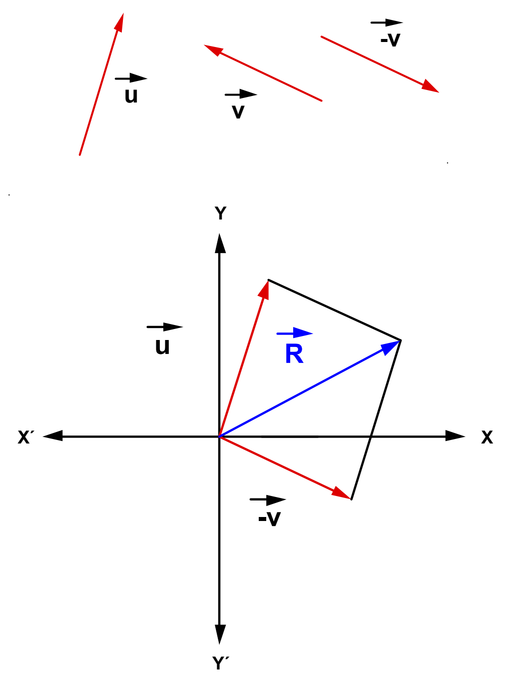
b).-Halle por el método del paralelogramo el vector resultante $\vec{R}$, siendo $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v}$






**SUMA DE VECTORES (M. PARALELOGRAMO) FIGURA 27.**

c).-Halle por el método del paralelogramo el vector resultante $\vec{R}$, siendo $\vec{R} = \vec{u} - \vec{v}$

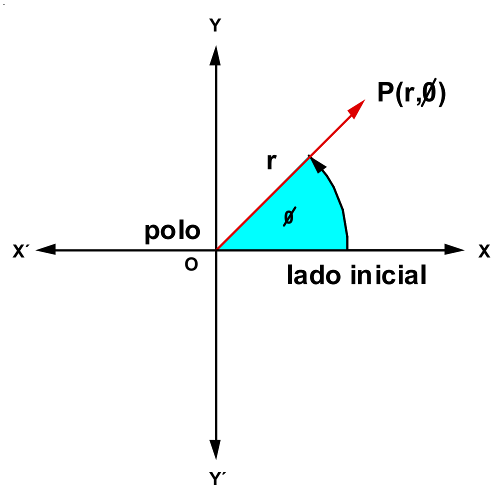



**SUMA DE VECTORES (M. PARALELOGRAMO) FIGURA 28.**

## 2.2.5.3 COORDENADAS POLARES DE UN VECTOR.

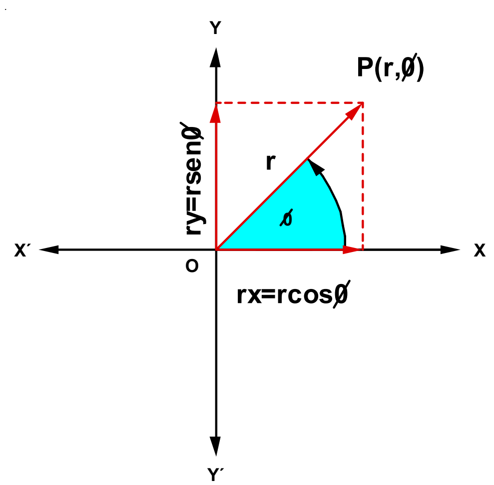
El concepto de coordenadas polares que, en lo particular define la posición de un vector en el plano, fue introducido por primera vez por el genial Sir Isaac Newton quien en su libro publicado en 1736 "**Método de las Fluxiones**", hace referencia a ocho sistemas de coordenadas entre los cuales se considera el presente, y cuyo objetivo es facilitar procesos y cálculos que resultarían altamente complejos utilizando otros sistemas referenciales como el coordenado.

El sistema de coordenadas polares, constituye al igual que el coordenado anteriormente descrito, un sistema bidimensional, pero que al contrario del precedente nos permite definir la posición relativa de un vector mediante el conocimiento de dos entes fundamentales, el valor de la magnitud o modulo del vector r, y el ángulo Ø formado entre éste y un sistema de referencia en nuestro caso con respecto al eje OX.




**CORDENADAS POLARES FIGURA 29.**

Cómo definir las componentes rectangulares de un vector:




**CORDENADAS POLARES FIGURA 30.**

Recordemos por qué la componente en "x" es, $\mathrm{rx} = \mathrm{r}\cos\emptyset$ en el triángulo rectángulo ABC y utilizando la trigonometría básica se quiere determinar valor del cateto adyacente al ángulo Ø por lo que se tiene:

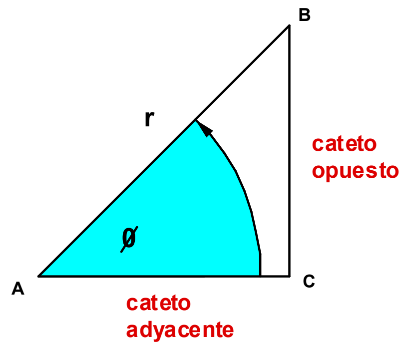



**FIGURA 31.**

$$\cos\emptyset = \frac{cateto\ adyacente\ AC}{hipotenusa\ r}$$

De donde se obtiene

$$\mathrm{cateto\ adyacente\ AC} = \mathrm{hipotenusa\ r.}\cos\emptyset$$

$$\mathrm{rx} = \mathrm{AC} = \mathrm{r}\,.\cos\emptyset$$

Con un análisis similar se tendrá entonces

$$\mathrm{sen}\,\emptyset = \frac{cateto\ opuesto\ BC}{hipotenusa\ r}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{cateto\ opuesto\ BC} = \mathrm{hipotenusa\ r\,.\,sen}\,\emptyset$$

$$\mathrm{ry} = \mathrm{BC} = \mathrm{r.\,sen}\,\emptyset$$

**Ejemplo de cálculo 1.-** Dados los vectores $\vec{A}$ cuya magnitud es 10u a 30° y $\vec{B}$ cuya magnitud es de 15u a 60°. Determine las componentes rectangulares de los vectores y halle el valor de la resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ en coordenadas polares.

- **Datos.**

Vector $\vec{A}$: valor de la magnitud o módulo = 10u, ángulo $\emptyset_1$ = 30°

Vector $\vec{B}$: valor de la magnitud o módulo = 15u, ángulo $\emptyset_2$ = 60°

- **Objetivo.**

Determinar la magnitud de las componentes rectangulares de los vectores, y calcular analíticamente el valor o magnitud del vector resultante suma $\vec{R}$.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Se procederá a dibujar a escala conveniente las magnitudes especificadas de los vectores dados $\vec{A}$ y $\vec{B}$, considerando para su ubicación correcta en el plano adicionalmente al valor de sus módulos, el ángulo director generado desde la parte positiva del eje de referencia y en sentido anti - horario.

b).- Se determinará gráfica y analíticamente la magnitud y dirección del vector suma $\vec{R}$ en coordenadas polares.

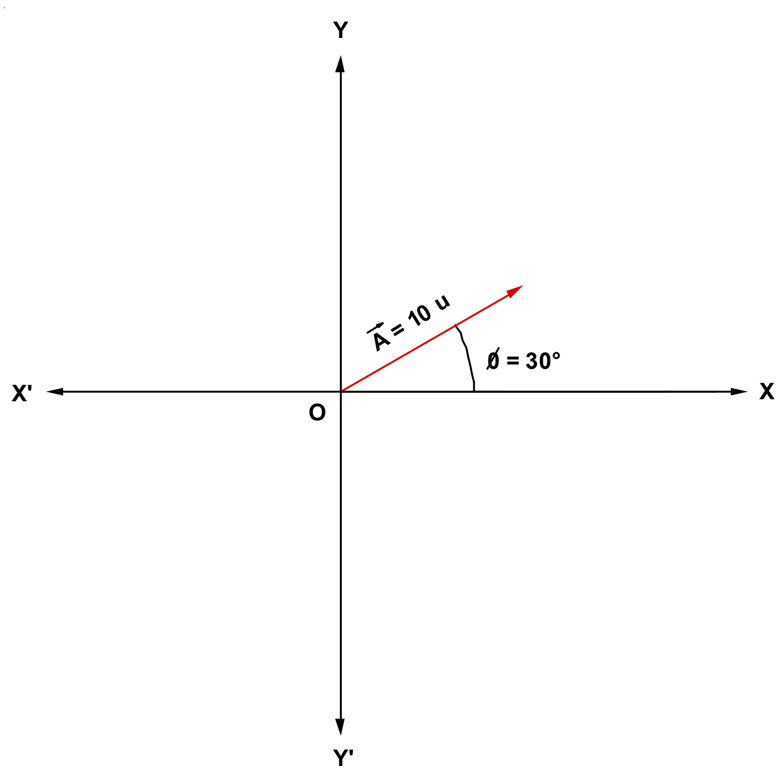



**FIGURA 32.**

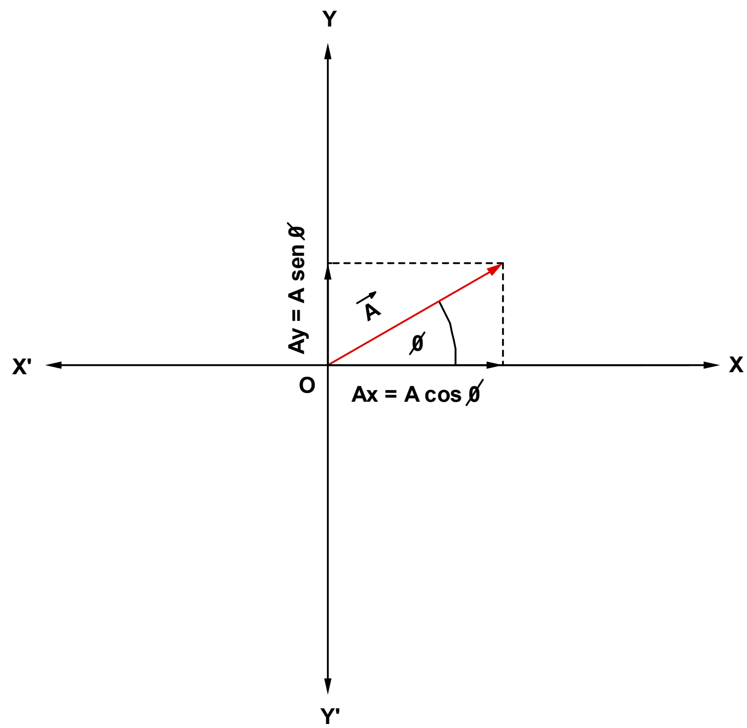



**FIGURA 33.**

En las gráficas se puede apreciar en primer lugar la ubicación del vector $\vec{A}$ en el plano mediante coordenadas polares, y en la segunda gráfica sus componenetes rectangulares, con respecto al sistema de referencia determinado.

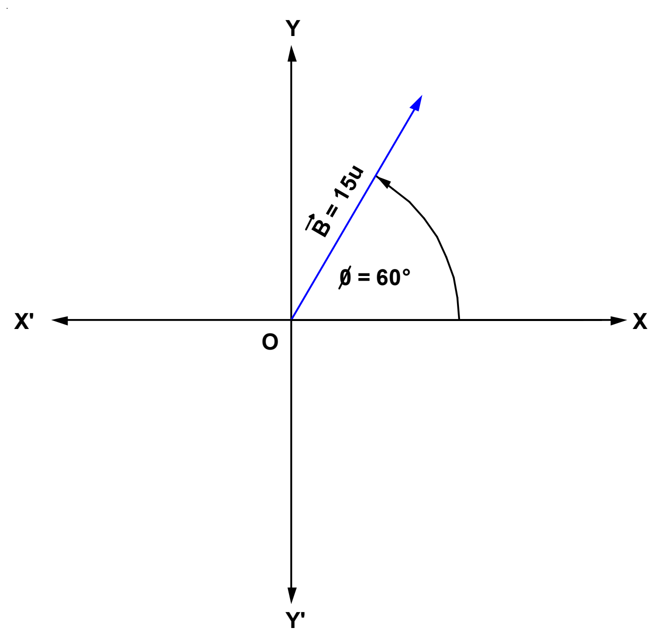



**FIGURA 34.**

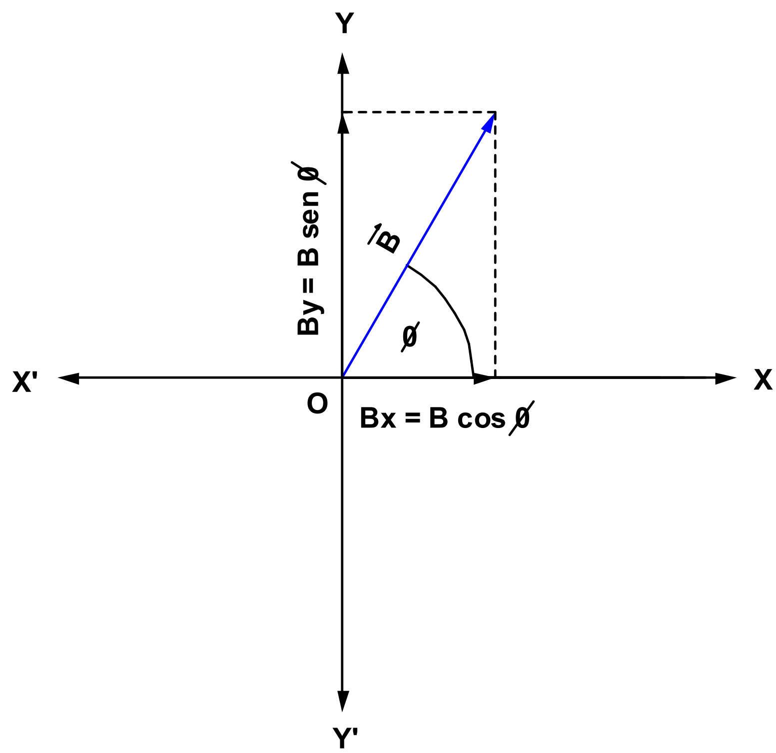



**FIGURA 35.**

De igual manera en las gráficas se podrá apreciar en primer lugar la ubicación del vector $\vec{B}$ en el plano mediante coordenadas polares, y en la segunda gráfica sus componenetes rectangulares, con respecto al sistema de referencia determinado.

Ahora se obtendrá, por lo antes expuesto, el valor calculado para las componentes rectangulares de los dos vectores:

**Para el vector $\vec{A}$**

$$Ax = A\,cos\,\emptyset\,; Ax = 10\,cos\,30°\,; Ax = 8.660u$$

$$Ay = A\,sen\,\emptyset\,; Ay = 10\,sen\,30°\,; Ay = 5.000u$$

**Para el vector $\vec{B}$**

$$Bx = B\,cos\,\emptyset\,; Bx = 15\,cos\,60°\,; Bx = 7.500u$$

$$By = B\,sen\,\emptyset\,; By = 15\,sen\,60°\,; By = 12.990u$$

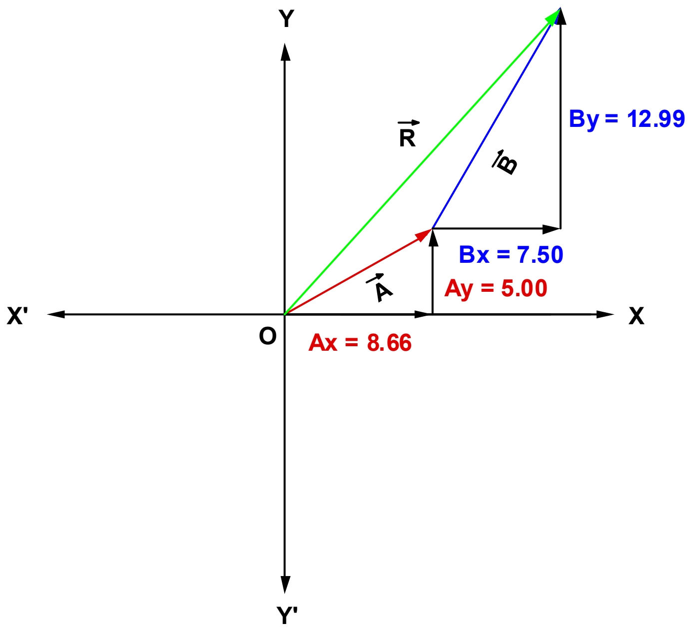



FIGURA 36.

Como se puede apreciar se tiene gráficamente la resultante y se procederá a determinar analíticamente su magnitud y dirección:

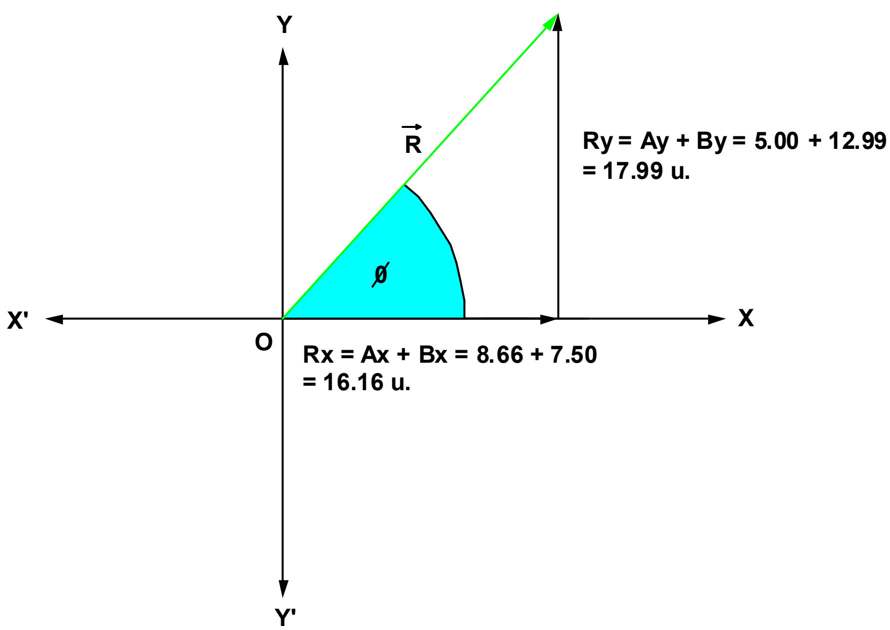



FIGURA 37.

**Para el vector $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$**

$$\text{Rx} = Ax + Bx \quad 8.66 + 7.50 = \mathbf{16.16\ u.}$$

$$\text{Ry} = Ay + By = 5.00 + 12.99 = \mathbf{17.99\ u.}$$

Por lo que

$$\vec{R} = \sqrt{(Rx)^2 + (Ry)^2}$$

$$\vec{R} = \sqrt{(16.16)^2 + (17.99)^2}$$

$$\vec{R} = \sqrt{584.78}$$

$$\vec{R} = \mathbf{24.182\ u}$$

Finalmente la dirección del vector $\vec{R}$ se determinará como sigue:

$$\text{Ø} = tang^{-1}(\frac{Ry}{Rx})$$

$$\text{Ø} = tan\ ^{-1}(\frac{17.99}{16.16})$$

$$\text{Ø} = \mathbf{48°4'2.57''}$$

Ejercicios de repaso.

1.- Dados los vectores $\vec{A}$ cuya magnitud es 20u a 45° y $\vec{B}$ cuya magnitud es de 30u a 35°, determine las componentes rectangulares de los vectores y hallar el valor de la resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ en coordenadas polares.

2.- Dados los vectores $\vec{A}$ cuya magnitud es 18u a 20° y $\vec{B}$ cuya magnitud es de 25u a 45°, determine las componentes rectangulares de los vectores y hallar el valor de la resultante $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$ en coordenadas polares.

## 2.2.6 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA, VECTORES UNITARIOS.

Es importante partir de lo que implica la eficiencia de una cantidad vectorial aplicada sobre un cuerpo, y de la comprensión que la misma dependerá de la dirección en la cual actua dicha fuerza.

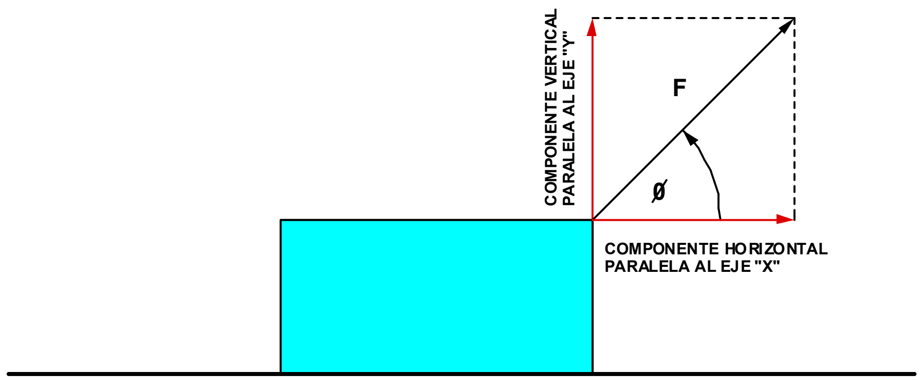



**FIGURA 38.**

Por ejemplo, en la caja mostrada en la figura, se puede apreciar que la misma se desplazará más facilmente si se aplica sobre ella una fuerza inclinada con un determinado ángulo, que si se la empujara, devido al efecto que produce la fuerza al levantar la caja y moverla hacia adelante al mismo tiempo, esto nos induce a pensar que una fuerza, y en general, un vector, presenta componentes horizontales y verticales, que podrían sustituir al vector.

Según lo expuesto y bajo éste “marco referencial”, se deduce que, la componente horizontal de una fuerza es un vector que actua en dirección del eje “x”, y, la componente vertical de una fuerza actuará en dirección el eje “y”.

Es importante mensionar que, al hablar de marco referencial nos referimos a un sistema ortogonal, es decir cuyos ejes son perpendiculares o normales entre sí, por lo general el cartesiano, lo que implica entonces que las componentes rectangulares de un vector serán tambien perpendiculares, y constituyen las proyecciones de un vector sobre sus ejes.

Existen entoces dos maneras de determinar las componentes resctangulares de un vector, una gráfica y otra analítica, empecemos por la gráfica.

**Ejemplo de cálculo 1.-** Dado un vector, como el mostrado en la figura. Encuentre las componentes rectangulares gráficamente.

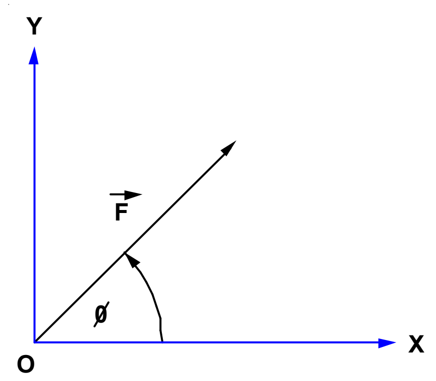



FIGURA 39.

- **Procedimiento.**

  a).- Desde la cabeza de flecha del vector $\vec{F}$, se trazan perpendiculares o normales a los ejes coordenados.

  b).- Se unen el origen de coordenadas O, con los pies de las perpendiculares, obteniéndose las componentes del vector $\vec{F}$ , $F_x$ y $F_y$

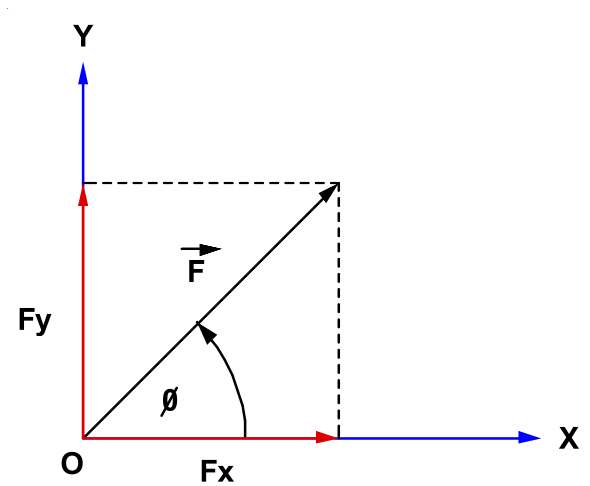



FIGURA 40.

Dado un vector, como el mostrado en la figura 28. Determine las componentes rectangulares analíticamente.

- **Procedimiento.**

  a).- El valor de la componente horizontal Fx, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fx = F \cos \emptyset$.
  b).- El valor de la componente vertical Fy, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fy = F \operatorname{sen} \emptyset$.

Esto si el ángulo está comprendido entre el vector $\vec{F}$ y el eje “x”; si el ángulo está comprendido entre el vector $\vec{F}$ y el eje “y”, se tendrá:

  a).- El valor de la componente horizontal Fx, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fx = F \operatorname{sen} \emptyset$.
  b).- El valor de la componente vertical Fy, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fy = F \cos \emptyset$.

**Ejemplo de cálculo 2.-** Dado el vector $\vec{F} = 500\,N$, mostrado en la figura. Halle las componentes rectangulares analíticamente.

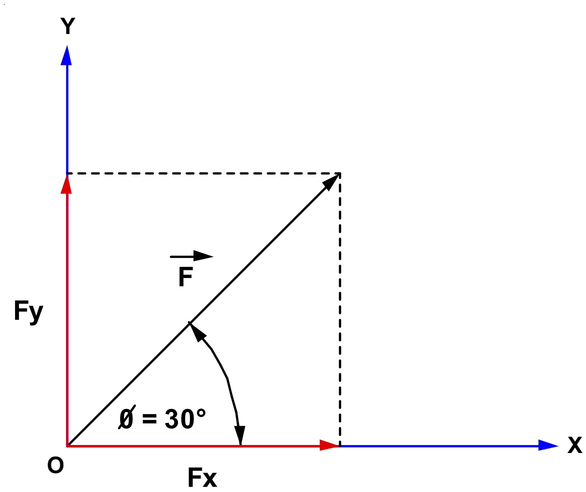



**FIGURA 41.**

- **Datos.**

  Modulo del vector $\vec{F} = 500N$

  Angulo comprendido entre el vector $\vec{F}$ y el eje “x”, Ø= 30°

- **Objetivo.**

  Hallar la magnitud de las componentes rectangulares del vector $\vec{F}$

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- El valor de la componente horizontal Fx, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fx = F \cos \emptyset$.

Por lo tanto:

$$Fx = F \cos \emptyset.$$
$$Fx = 500 \cos 30° = \mathbf{433.012\ N}$$

b).- El valor de la componente vertical Fy, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fy = F \operatorname{sen} \emptyset$.

Así:

$$Fy = F \operatorname{sen} \emptyset.$$
$$Fy = 500 \operatorname{sen} 30° = \mathbf{250\ N}$$

Considerando ahora el ángulo complementario de 60°:

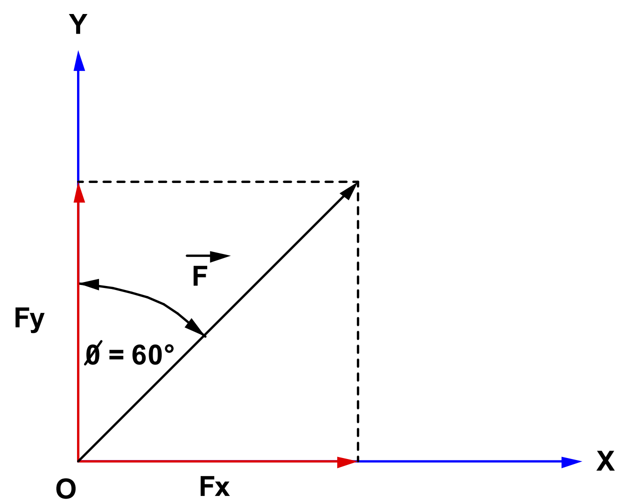



**FIGURA 42.**

- **Datos.**

  Modulo del vector $\vec{F} = 500N$

  Angulo comprendido entre el vector $\vec{F}$ y el eje "y", Ø= 60°

- **Objetivo.**

  Determinar la magnitud de las componentes rectangulares del vector $\vec{F}$

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- El valor de la componente horizontal Fx, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fx = F \operatorname{sen} \emptyset$.

Por lo tanto:

$$Fx = F \text{ sen } \emptyset.$$
$$Fx = 500 \text{ sen } 60° = \mathbf{433.012\ N}$$

b).- El valor de la componente vertical $\mathrm{Fy}$, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fy = F \cos \emptyset$.

Así:

$$Fy = F \cos \emptyset.$$
$$Fy = 500 \cos 60° = \mathbf{250\ N}$$

**Ejemplo de cálculo 3.-** Dado el vector $\vec{\mathrm{F}} = 800\ N$, mostrado en la figura. Calcule las componentes rectangulares analíticamente.

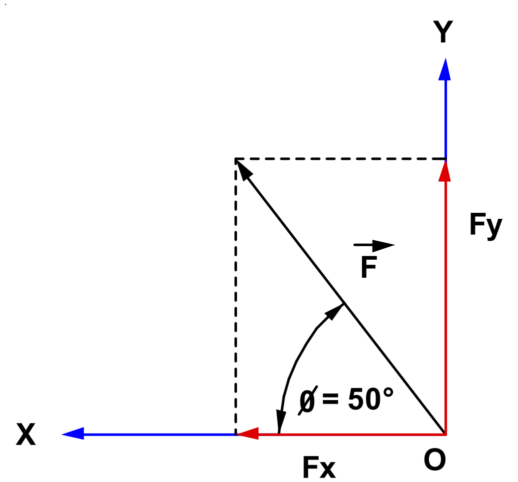



**FIGURA 43.**

- **Datos.**

  Modulo del vector $\vec{F} = 800N$

  Angulo comprendido entre el vector $\vec{\mathrm{F}}$ y el eje "x", Ø= 50°

- **Objetivo.**

  Calcular la magnitud de las componentes rectangulares del vector $\vec{\mathrm{F}}$

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- El valor de la componente horizontal $\mathrm{Fx}$, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fx = F \cos \emptyset$.

Por lo tanto:

$$Fx = F\cos\emptyset.$$
$$Fx = -800\cos 50° = \mathbf{-514.230\ N}$$

El signo negativo de la componente corresponde a su dirección con respecto al eje “x”.

b).- El valor de la componente vertical Fy, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fy = F\,\mathrm{sen}\,\emptyset$.

Así:

$$Fy = F\,\mathrm{sen}\,\emptyset.$$
$$Fy = 800\,\mathrm{sen}\,50° = \mathbf{612.835\ N}$$

Considerando ahora el ángulo complementario de 40°:

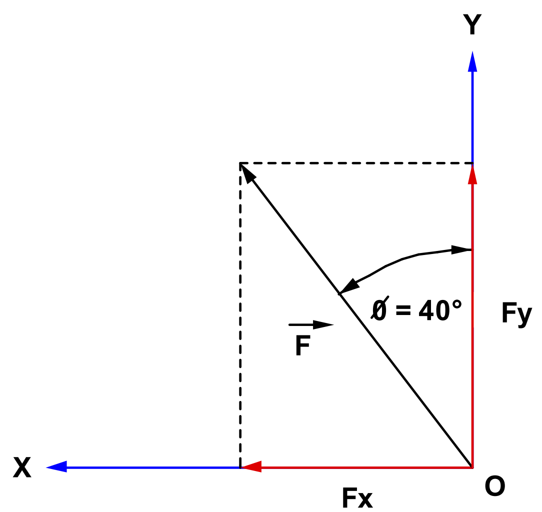



**FIGURA 44.**

- **Datos.**

Modulo del vector $\vec{F} = 800N$

Angulo comprendido entre el vector $\vec{\mathrm{F}}$ y el eje “y”, Ø= 40°

- **Objetivo.**

Determinar la magnitud de las componentes rectangulares del vector $\vec{\mathrm{F}}$

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- El valor de la componente horizontal Fx, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fx = F\,\text{sen}\,\emptyset$.
Por lo tanto:

$$Fx = F\,\text{sen}\,\emptyset.$$
$$Fx = -800\,\text{sen}\,40° = \mathbf{-514.230\ N}$$

El signo negativo de la componente corresponde a su dirección con respecto al eje "x".
b).- El valor de la componente vertical Fy, será de acuerdo con la trigonometría fundamental $Fy = F\cos\emptyset$.

Así:

$$Fy = F\cos\emptyset.$$
$$Fy = 800\cos 40° = \mathbf{612.835\ N}$$

Considerando ahora el ángulo polar de 180°- 50° = 130°:

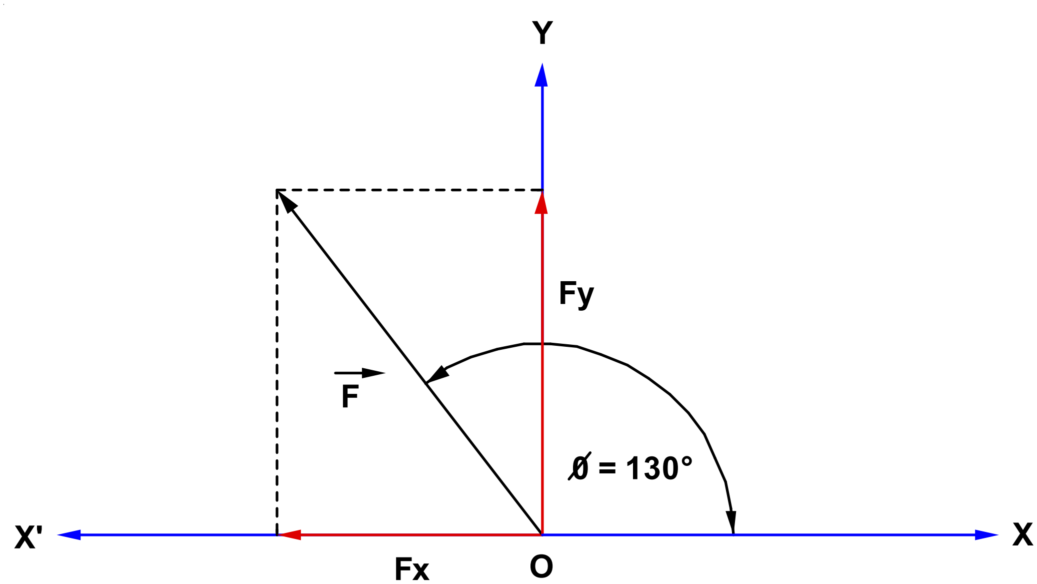



FIGURA 45.

- **Datos.**

Módulo del vector $\vec{F} = 800N$

Ángulo polar del vector $\vec{F}$ Ø= 130°

- **Objetivo.**

  Determinar la magnitud de las componentes rectangulares del vector $\vec{\mathrm{F}}$

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- El valor de la componente horizontal $\mathrm{Fx}$ será $Fx = F\cos\emptyset$.

  Por lo tanto:

$$Fx = F\cos\emptyset.$$
$$Fx \quad 800\cos 130° = \mathbf{-5} \quad \mathbf{.230}\ \boldsymbol{N}$$

  Obsérvese que el valor negativo de la componente rectangular viene implícito en la función del ángulo polar.

  b).- El valor de la componente vertical $\mathrm{Fy}$ será $Fy = F\,\mathrm{sen}\,\emptyset$.

  Así:

$$Fy = F\,\mathrm{sen}\,\emptyset.$$
$$Fy = 800\,\mathrm{sen}\,130° = \mathbf{612.835}\ \boldsymbol{N}$$

  Obsérvese que el valor positivo de la componente rectangular viene implícito en la función del ángulo polar.

### 2.2.6.1 VECTORES UNITARIOS.

Recordando la definición de producto escalar por un vector, que establece primero la conveniencia de escribir por ejemplo, la suma vectorial de F + F como 2F, o F + F + F + F como 4F, es decir, de manera general si tenemos un número k de vectores F de igual magnitud entonces el vector resultante se podrá expresar como el producto de kF donde k es un escalar y F un vector, con las siguientes consideraciones, si k es positivo, kF será un vector que tenga la misma dirección y sentido que F, pero k veces su magnitud; y si k es negativo entonces kF será un vector que tenga la misma dirección pero sentido opuesto que F y su magnitud será kF veces la del vector F.

Bajo esta consideración, se denomina vectores unitarios a aquellos cuya magnitud es igual a la unidad, pero siempre conservando la dirección de los ejes del sistema referencial considerado.

Si el sistema de referencia es el cartesiano entonces, al vector unitario que está dirigido a lo largo del eje “x” de lo designa por “i”, y al vector unitario dirigido a lo largo del eje “y” se lo designa por “j”.

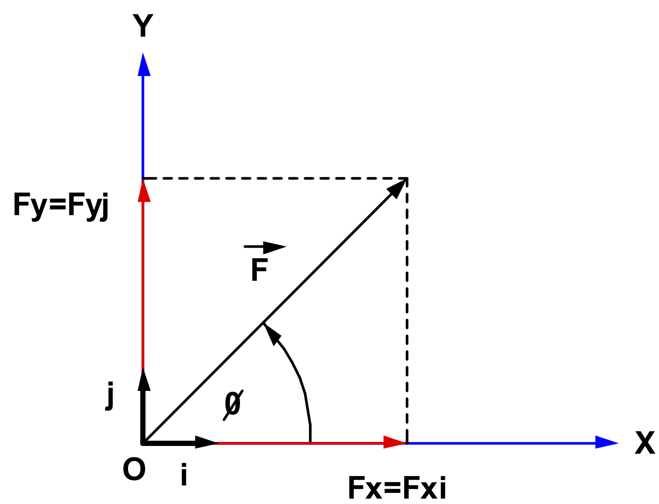



FIGURA 46.

**Ejemplo de cálculo 4.-** Dado el vector $\vec{\mathrm{F}} = 700\ N$, mostrado en la figura. Determine las componentes rectangulares analíticamente, y expréselas como vectores unitarios.

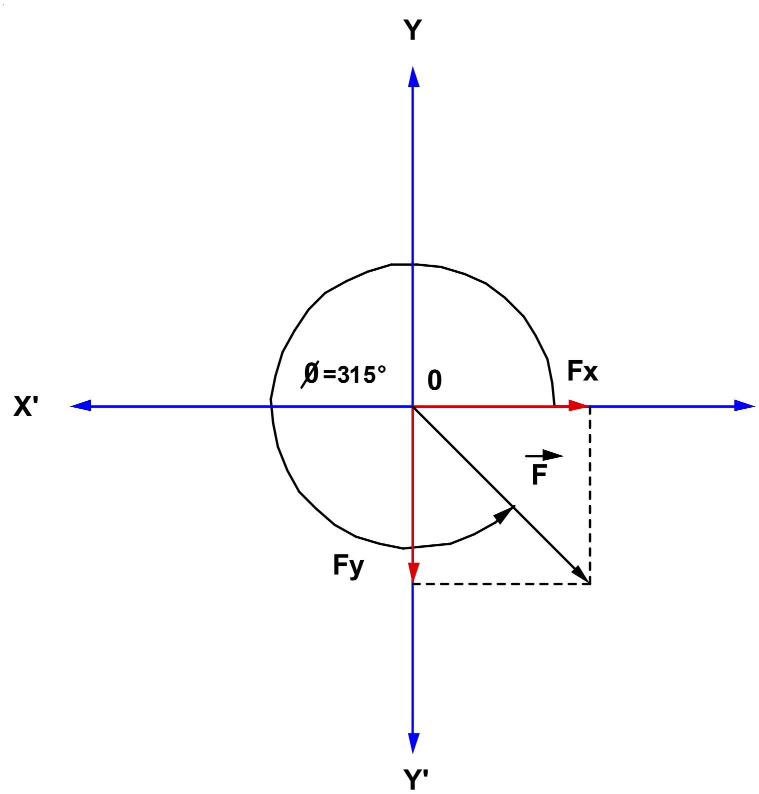



FIGURA 47.

- **Datos.**

Modulo del vector $\vec{F} = 700N$

Ángulo polar del vector $\vec{F}$ Ø= 315°

- **Objetivo.**

Determinar la magnitud de las componentes rectangulares del vector $\vec{F}$

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- El valor de la componente horizontal $Fx$ será $Fx = F \cos \emptyset$.

Por lo tanto:

$$Fx = F \cos \emptyset.$$
$$Fx = 700 \cos 315° = \mathbf{494.974\ N}$$

b).- El valor de la componente vertical $Fy$ será $Fy = F \operatorname{sen} \emptyset$.

Así:

$$Fy = F \operatorname{sen} \emptyset.$$
$$Fy = 700 \operatorname{sen} 315° = \mathbf{-494.974\ N}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{F = 494.974\ Ni - 494.974j}$$

Si el sistema de referencia contempla las tres dimensiones espaciales, al vector unitario que está dirigido a lo largo del eje "x" de lo designa por "i", al vector unitario dirigido a lo largo del eje "y" se lo designa por "j", y al dirigido a lo largo del eje "z" se lo designa por "k".

## 2.2.6.2 ADICIÓN DE VECTORES FUERZA, MÉTODO DE SUMATORIA DE COMPONENTES RECTANGULARES.

A continuación se expone un mecanismo que permitirá realizar la sumatoria de tres o más vectores concurrentes de una manera práctica y que simplifica la obtención de la resultante de un sistema de fuerzas aplicadas a un determinado punto.

**Ejemplo de cálculo 1.-** Halle la magnitud y el ángulo de dirección del vector resultante del sistema de fuerzas mostrado en la figura.

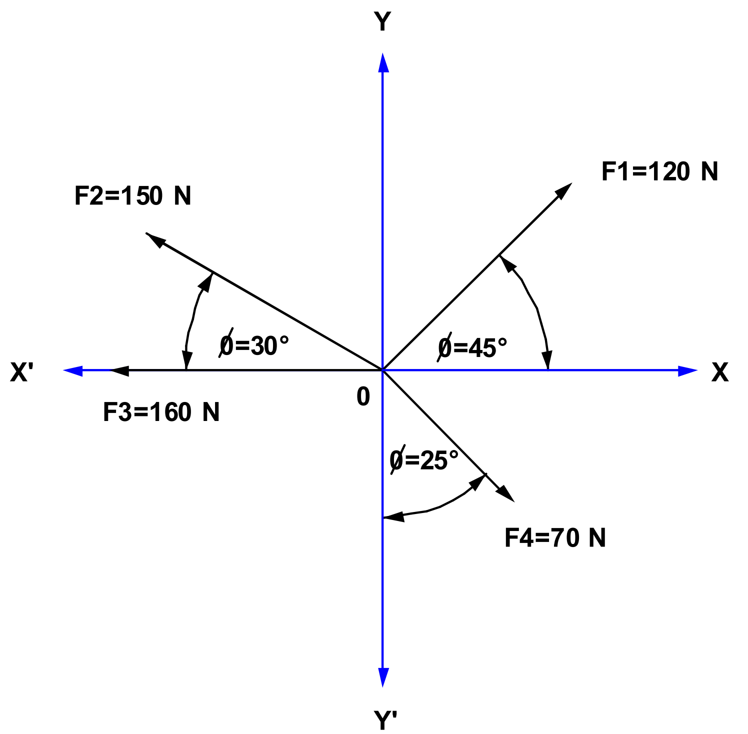



FIGURA 48.

- **Datos.**

  Modulo del vector $F1 = 120N\ ; \emptyset = 45°$

  Modulo del vector $F2 = 150N\ ; \emptyset = 30°$

  Modulo del vector $F3 = 160N\ ; \emptyset = 180°$

  Modulo del vector $F4 = 70N\ ; \emptyset = 25°$

- **Objetivo.**

  Hallar la magnitud y ángulo de dirección del vector resultante del sistema de fuerzas concurrentes sobre el punto de aplicación O.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Traslado del sistema de fuerzas a otro equivalente, donde se representan únicamente las componentes rectangulares de cada vector, considerando su signo correspondiente de acuerdo a convención.

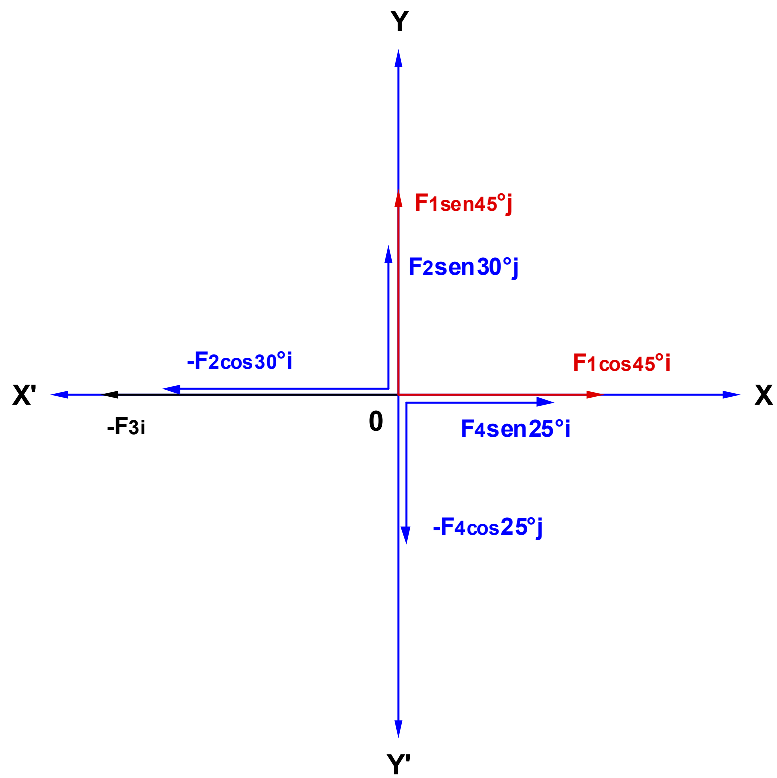



**FIGURA 49.**

b).- Elaboración de tabla donde se detalla, Magnitudes de las fuerzas y los valores agrupados de las componentes de cada vector en las columnas correspondientes.

| VECTOR | MAGNITUD (N) | COMPONENTES Fxi (N) | COMPONENTES Fyj (N) |
|---|---|---|---|
| F1 | 120 | 84.852 | 84.852 |
| F2 | 150 | -129.903 | 75.000 |
| F3 | 160 | -160.000 | 0 |
| F4 | 70 | 29.583 | -63.441 |
| | | **∑Fxi = -175.468** | **∑Fyj = 96.411** |

$$\boldsymbol{R} = -(\mathbf{175.468}\ \boldsymbol{N})\boldsymbol{i} + (\mathbf{96.411}\boldsymbol{N})$$

c).- Cálculo de la magnitud y dirección del vector resultante:

Aplicando Pitágoras:

$$R = \sqrt{(\sum Fxi)^2 + (\sum Fyj)^2}$$

$$R = \sqrt{(-175.468)^2 + (96.411)^2}$$

$$\mathrm{R} = \sqrt{40084.099}$$

$$\boldsymbol{R} = \mathbf{200.210}\ \boldsymbol{N}$$

Para la determinación del ángulo director:

$$\emptyset = tang^{-1}(\frac{\sum Fyj}{\sum Fxi})$$

$$\emptyset = tang^{-1}(\frac{96.411}{-175.468})$$

$$\emptyset = \mathbf{-28°47'11.84''}$$

d).- Graficando los resultados obtenidos se tendrá:

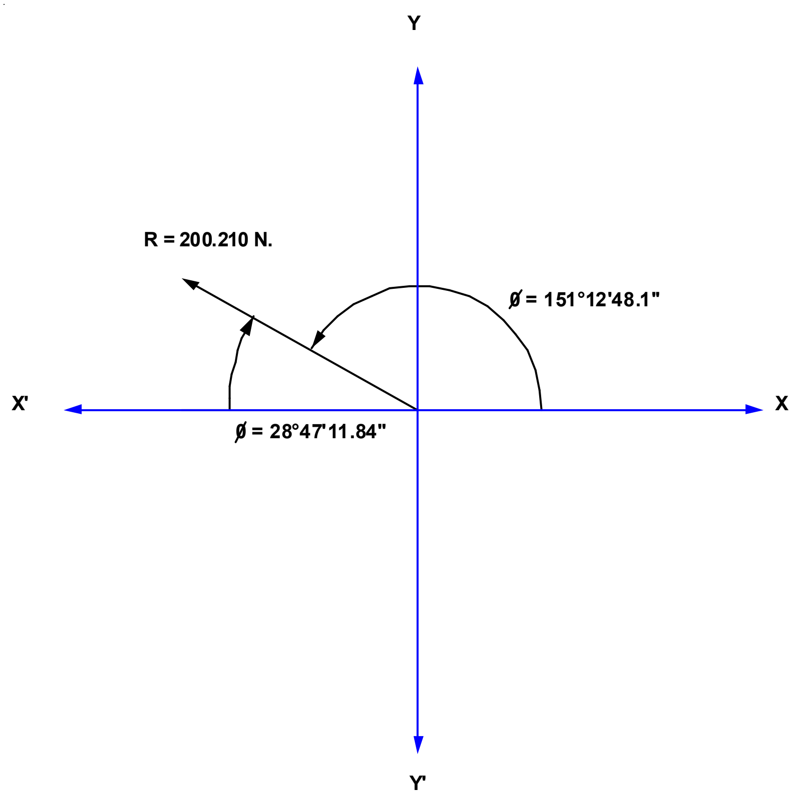



**FIGURA 50.**

- **Conclusiones.**

  Cuando un vector es coincidente con uno de los ejes del sistema referencial, carecerá de una componente, según el caso, y el valor de la otra será igual al módulo del vector con signo, conforme su dirección y de acuerdo con la convención establecida.

**Ejemplo de cálculo 2.-** Calcule la magnitud y el ángulo de dirección del vector resultante del sistema de fuerzas mostrado en la figura, considerando la reacción AB = 70 N.

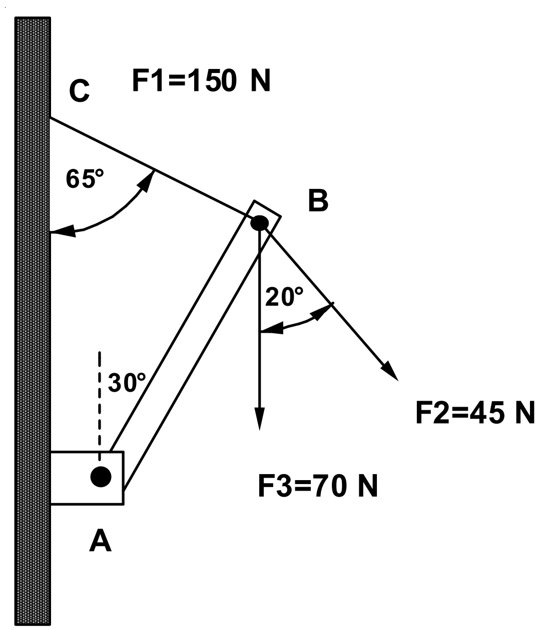



FIGURA 51.

- **Datos.**

  Modulo del vector $F1 = 150N\ ; \emptyset = 65°$

  Modulo del vector $F2 = 45N\ ; \emptyset = 20°$

  Modulo del vector $F3 = 70N\ ; \emptyset = 270°$

  Modulo del vector $F4 = 70N\ ; \emptyset = 30°$

- **Objetivo.**

  Calcular la magnitud y ángulo de dirección del vector resultante del sistema de fuerzas concurrentes sobre el punto de aplicación B.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Traslado del sistema de fuerzas a un primer sistema equivalente.

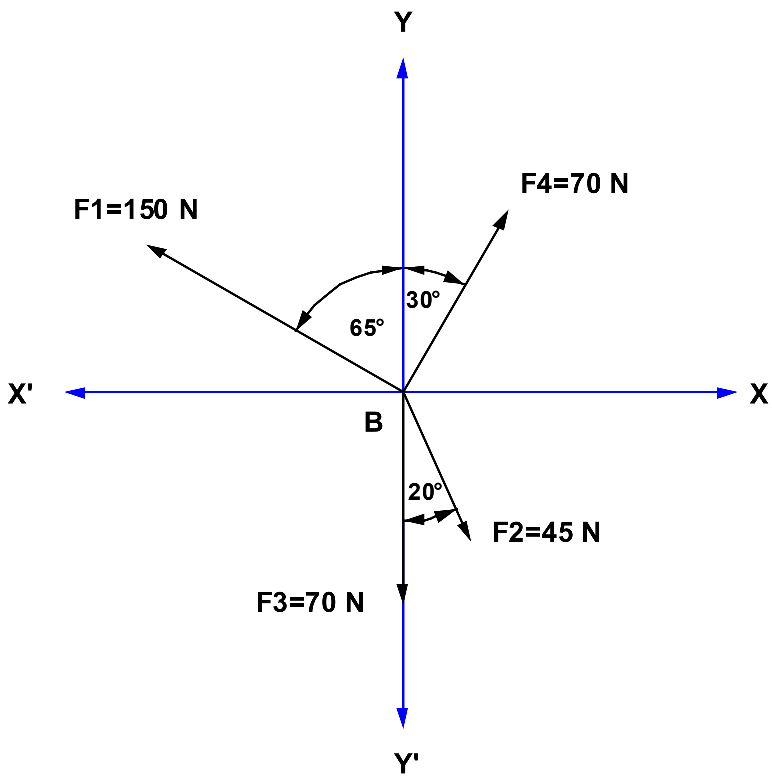



FIGURA 52.

b).- Traslado del sistema de fuerzas a un segundo sistema equivalente, donde se representan únicamente las componentes rectangulares de cada vector, considerando su signo correspondiente de acuerdo a convención.

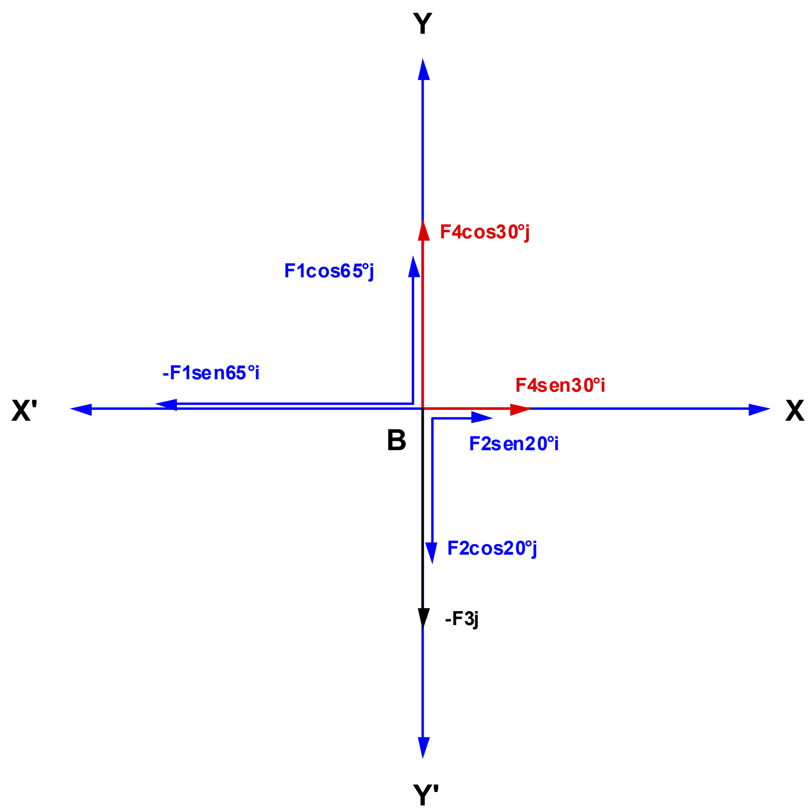



**FIGURA 53.**

c).- Elaboración de tabla donde se detalla, Magnitudes de las fuerzas y los valores agrupados de las componentes de cada vector en las columnas correspondientes.

| VECTOR | MAGNITUD (N) | COMPONENTES Fxi (N) | COMPONENTES Fyj (N) |
|---|---|---|---|
| F1 | 150 | -135.946 | 63.392 |
| F2 | 45 | 15.390 | -42.286 |
| F3 | 70 | 0 | -70.000 |
| F4 | 70 | 35.000 | 60.621 |
| | | **∑Fxi = -85.556** | **∑Fyj = 11.727** |

$$\boldsymbol{R} = -(\mathbf{85.556}\ \boldsymbol{N})\boldsymbol{i} + (\mathbf{11.727}\boldsymbol{N})\boldsymbol{j}$$

d).- Cálculo de la magnitud y dirección del vector resultante:

Aplicando Pitágoras:

$$R \ = \sqrt{(\sum Fxi)^2 + (\sum Fyj)^2}$$

$$R \ = \sqrt{(-85.556)^2 + (11.727)^2}$$

$$\mathrm{R} \ = \sqrt{7457.351}$$

$$\boldsymbol{R} \ = \mathbf{86.355}\ \ \boldsymbol{N}$$

Para la determinación del ángulo director:

$$\text{Ø} = tang^{-1}(\frac{\sum Fyj}{\sum Fxi})$$

$$\text{Ø} = tang^{-1}(\frac{11.727}{-85.556})$$

$$\text{Ø} = \mathbf{-7°48'17.24''}$$

e).- Graficando los resultados obtenidos se tendrá:

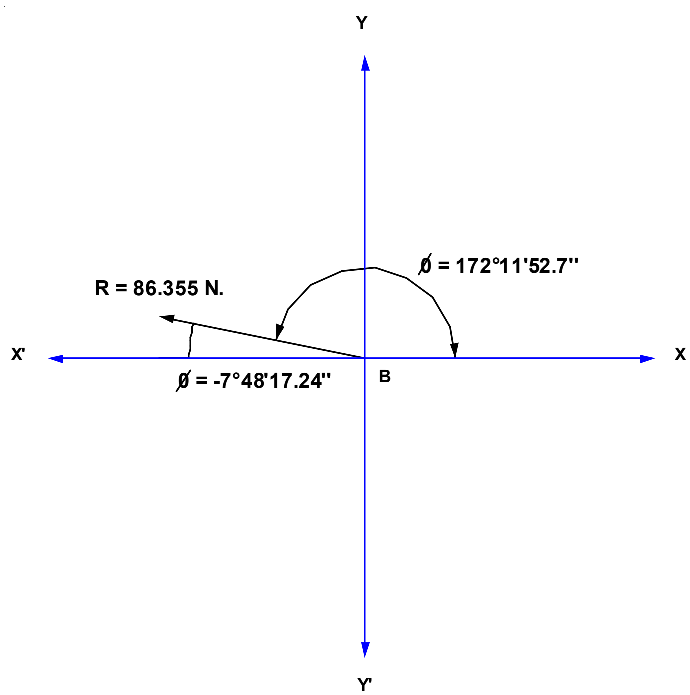



FIGURA 54.

**Ejemplo de cálculo 3.-** Halle la magnitud y el ángulo de dirección del vector resultante del sistema de fuerzas mostrado en la figura.

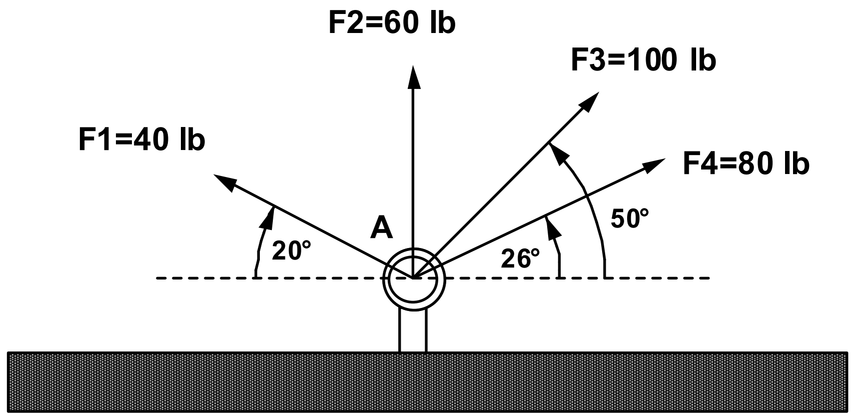



**FIGURA 55.**

- **Datos.**

  Modulo del vector $F1 = 40\ lb\ ; \emptyset = -20°$

  Modulo del vector $F2 = 60\ lb\ ; \emptyset = 90°$

  Modulo del vector $F3 = 100\ lb\ ; \emptyset = 50°$

  Modulo del vector $F4 = 80\ lb\ ; \emptyset = 26°$

- **Objetivo.**

  Hallar la magnitud y ángulo de dirección del vector resultante del sistema de fuerzas concurrentes sobre el punto de aplicación B.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Traslado del sistema de fuerzas a un primer sistema equivalente.

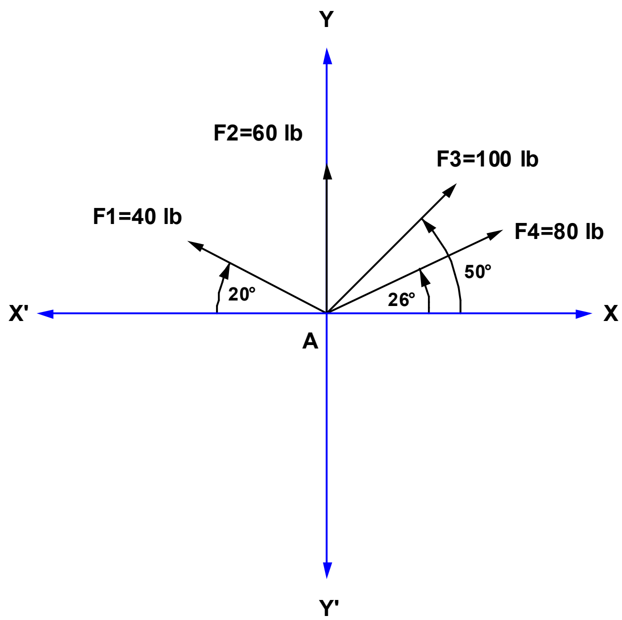



FIGURA 56.

b).- Traslado del sistema de fuerzas a un segundo sistema equivalente, donde se representan únicamente las componentes rectangulares de cada vector, considerando su signo correspondiente de acuerdo a convención.

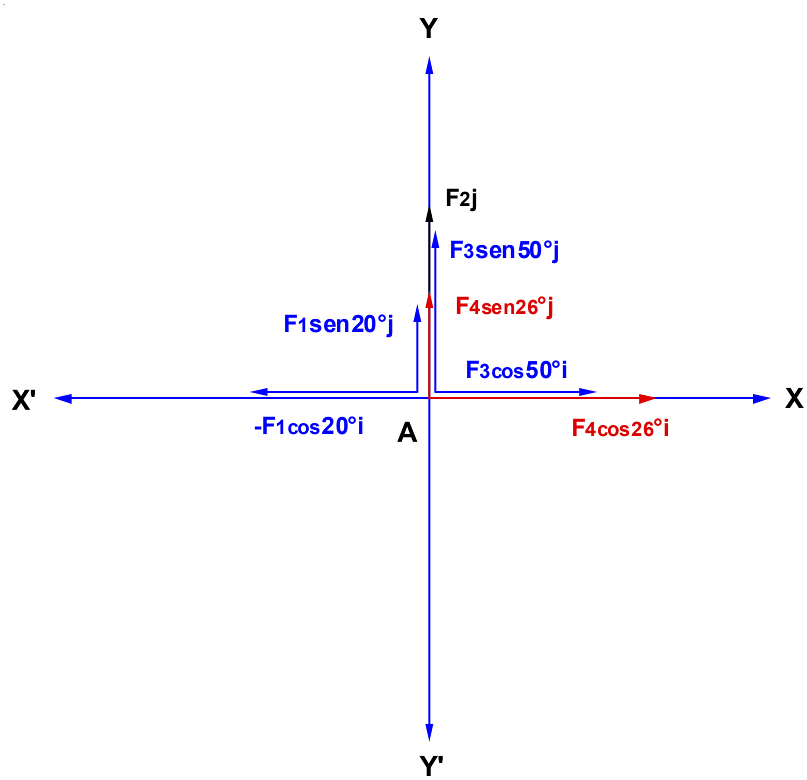



FIGURA 57.

c).- Elaboración de tabla donde se detalla, Magnitudes de las fuerzas y los valores agrupados de las componentes de cada vector en las columnas correspondientes.

| VECTOR | MAGNITUD (lb) | COMPONENTES Fxi (lb) | COMPONENTES Fyj (lb) |
|---|---|---|---|
| F1 | 40 | -37.587 | 13.680 |
| F2 | 60 | 0 | 60.000 |
| F3 | 100 | 64.278 | 76.604 |
| F4 | 80 | 71.903 | 35.069 |
| | | **∑Fxi = 98.594** | **∑Fyj = 185.353** |

$$\boldsymbol{R = (98.594\ lb)i + (185.353\ lb)j}$$

d).- Cálculo de la magnitud y dirección del vector resultante:

Aplicando Pitágoras:

$$R \ = \sqrt{(\sum Fxi)^2 + (\sum Fyj)^2}$$

$$R \ = \sqrt{(98.594)^2 + (185.353)^2}$$

$$\mathrm{R} \ = \sqrt{44076.511}$$

$$\boldsymbol{R \ = 209.944 \ \ lb}$$

Para la determinación del ángulo director:

$$\emptyset = tang^{-1}(\frac{\sum Fyj}{\sum Fxi})$$

$$\emptyset = tang^{-1}(\frac{185.353}{98.594})$$

$$\emptyset = \boldsymbol{61°59´25.25´´}$$

e).- Graficando los resultados obtenidos se tendrá:

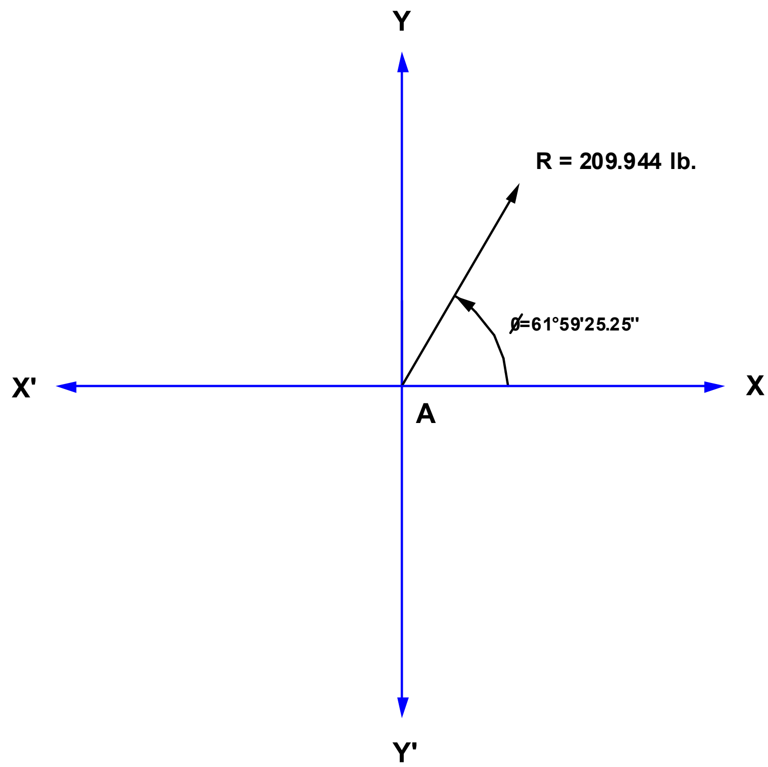



FIGURA 58.

## 2.3 EQUILIBRIO DE PARTÍCULAS.

Se dice que una partícula que se encuentra sometida a la acción de varias fuerzas concurrentes o copuntuales se encuentra en equilibrio, cuando la resultante del sistema es nula o igual a cero, entonces se manifiesta que, la partícula se encuentra en equilibrio.

Recordando lo enunciado en el literal 2.1.5.1 tenemos que:

Si la magnitud de la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula que se encuentra en reposo es igual a cero, la misma permanece en reposo o, continuará desplazándose con velocidad constante (aceleración igual a cero) en línea recta si originalmente estaba en movimiento, que constituye la primera ley del movimiento de Newton, o ley de la inercia.

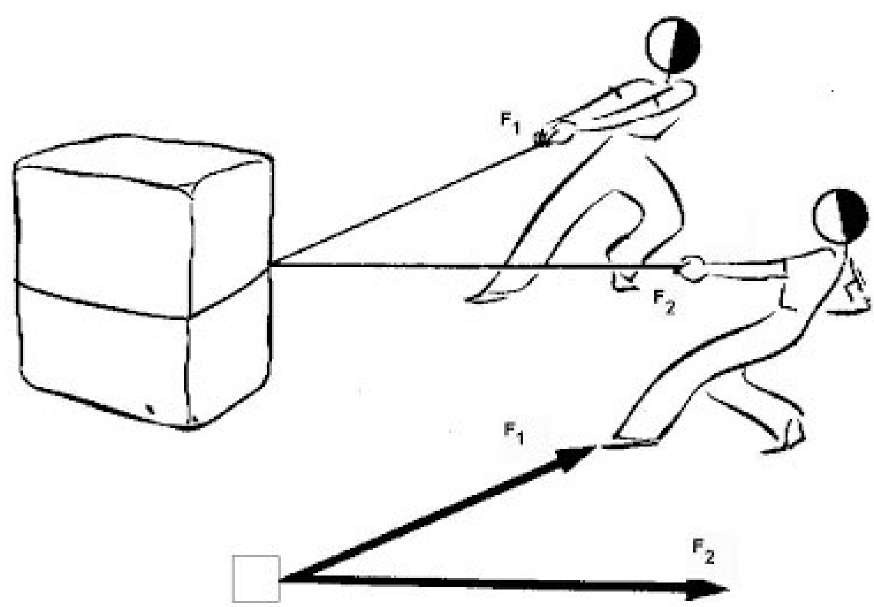
Por lo tanto, una partícula considerada en equilibrio, puede estar en reposo, o desplazándose en línea recta con velocidad constante.

## 2.3.1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

Las condiciones de equilibrio son las leyes que rigen la estática, siendo esta, la ciencia que estudia como ya se mencionó anteriormente, los sistemas de fuerzas que se aplican a un cuerpo para describir un sistema en equilibrio.

Las fuerzas que se aplican sobre un cuerpo pueden clasificarse de la siguiente manera.

**2.3.1.1 FUERZAS ANGULARES:** Dos fuerzas concurrentes se dice son angulares, cuando su línea de acción concurre en un miso punto de aplicación, y forman entre ellas un determinado ángulo.

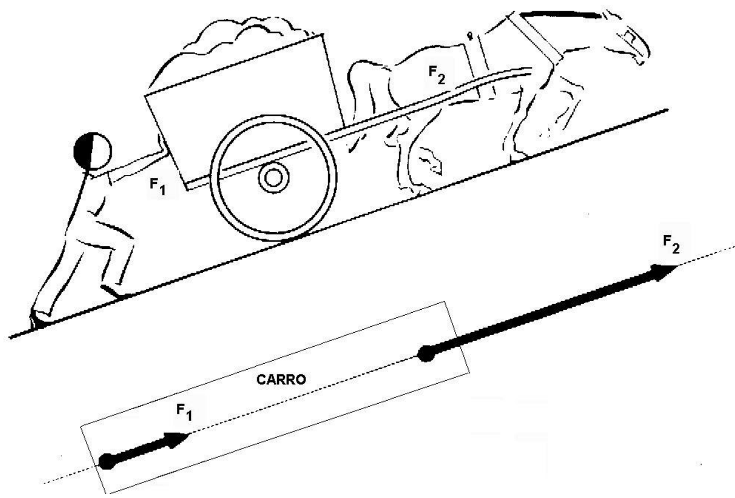



Fuerzas Angulares.[12]

**FIGURA 59.**

**2.3.1.2 FUERZAS COLINEALES:** Dos fuerzas concurrentes son colineales, cuando comparten la misma línea de acción, pudiendo tener o no la misma dirección, **en el caso del equilibrio y al considerar fuerzas con direcciones opuestas están deberán tener la misma magnitud, para considerar que el cuerpo está en equilibrio.**

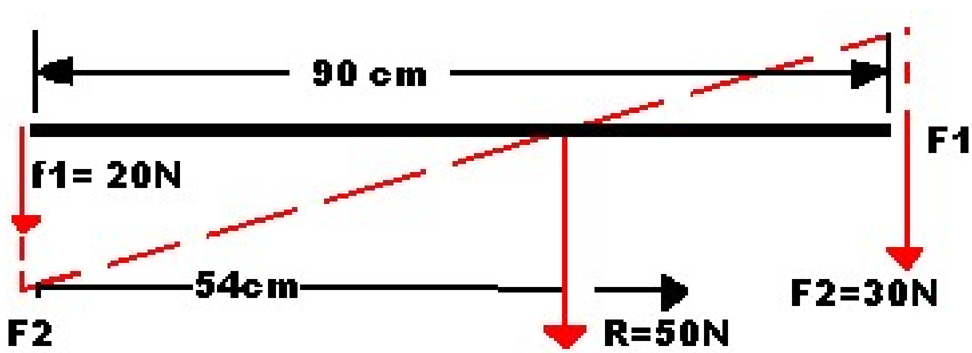
[12] http://videofuerzas.blogspot.com/




Fuerzas Colineales.[13]

**FIGURA 60.**

**2.3.1.3 FUERZAS PARALELAS:** Dos fuerzas son consideradas paralelas, cuando sus líneas de acción también los son, con la consideración que pueden tener la misma dirección o direcciones opuestas.




Fuerzas Paralelas.[14]

**FIGURA 61.**

[13] http://fisica.laguia2000.com/wp-content/uploads/2013/03/2.jpg
[14] http://html.rincondelvago.com/fuerzas-paralelas.html

### 2.3.2 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.

Un diagrama de cuerpo libre, es una representación gráfica utilizada para el análisis de los sistemas de fuerzas que actúan sobre una partícula, su aplicación facilita la identificación de las características de cada una de ellas y pretende contribuir a la resolución de los problemas de aplicación.

### 2.3.3 EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA.

Las condiciones necesarias y suficientes que permiten determinar el equilibrio estático de una partícula, se fundamentan en la aplicación de las siguientes ecuaciones, denominadas “ecuaciones del equilibrio”.

$$\text{a)}\ \sum Fx = 0 \qquad \textit{(9)}$$

Esta ecuación de equilibrio manifiesta que, la resultante de todas las componentes de las fuerzas del sistema que actúan sobre una partícula en sentido horizontal en relación a su sistema de referencia, tiene que ser igual a cero.

$$b)\ \sum Fy = 0 \qquad \textit{(10)}$$

Esta ecuación de equilibrio manifiesta que, la resultante de todas las componentes de las fuerzas del sistema que actúan sobre una partícula en sentido vertical en relación a su sistema de referencia, tiene que ser igual a cero.

Cuando las dos ecuaciones se satisfacen de manera simultánea, se dirá entonces que la partícula se encuentra en equilibrio.

Cuando hablamos de satisfacer simultáneamente estas ecuaciones, se entenderá que se ha generado un sistema de ecuaciones, que por sus características será un sistema de ecuaciones lineal con máximo dos incógnitas, cuya solución será obtenida mediante cualquiera de los procesos matemáticos conocidos.

Cuando se trate de resolver ejercicios de aplicación, los casos más comunes serán: las dos componentes (o la magnitud y dirección) de una sola fuerza; las magnitudes de las dos fuerzas, cada una de dirección conocida.

## 2.3.4 RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA.

**Ejemplo de cálculo 1.-** Determine la magnitud de las tensiones en las cuerdas AC y BC del sistema mostrado si W = 500 N.

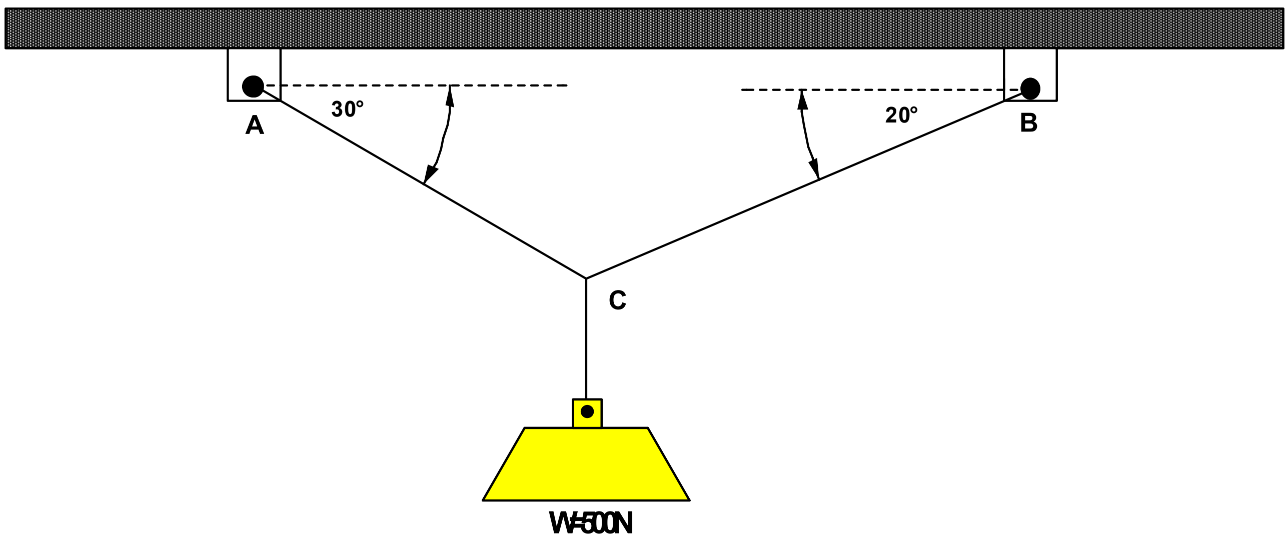



**FIGURA 62.**

- **Datos.**

  Valor del peso W = 500 N.

  Ángulo director de la tensión $T_{AC}$ ; $\emptyset = 30°$

  Ángulo director de la tensión $T_{BC}$ ; $\emptyset = 20°$

- **Objetivo.**

  Determinar la magnitud de las tenciones en las cuerdas AC y BC del sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Traslado del sistema de fuerzas a un primer sistema equivalente.

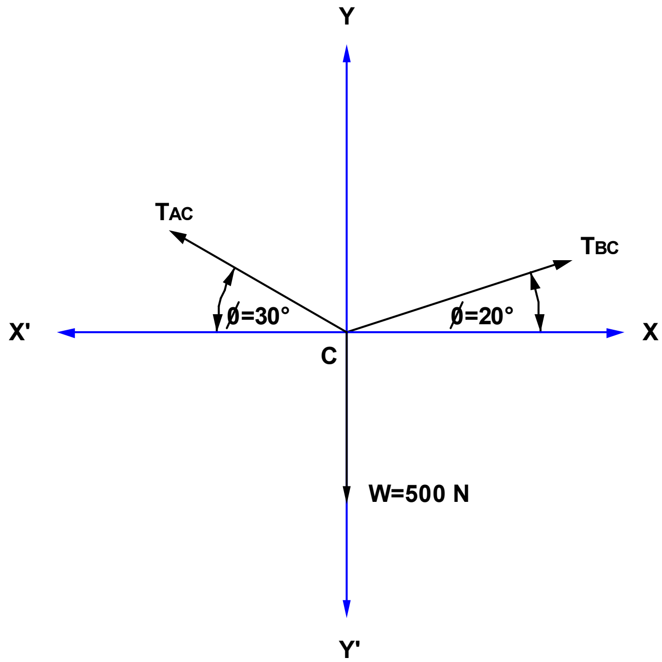



FIGURA 63.

b).- Traslado del sistema de fuerzas a un segundo sistema equivalente.

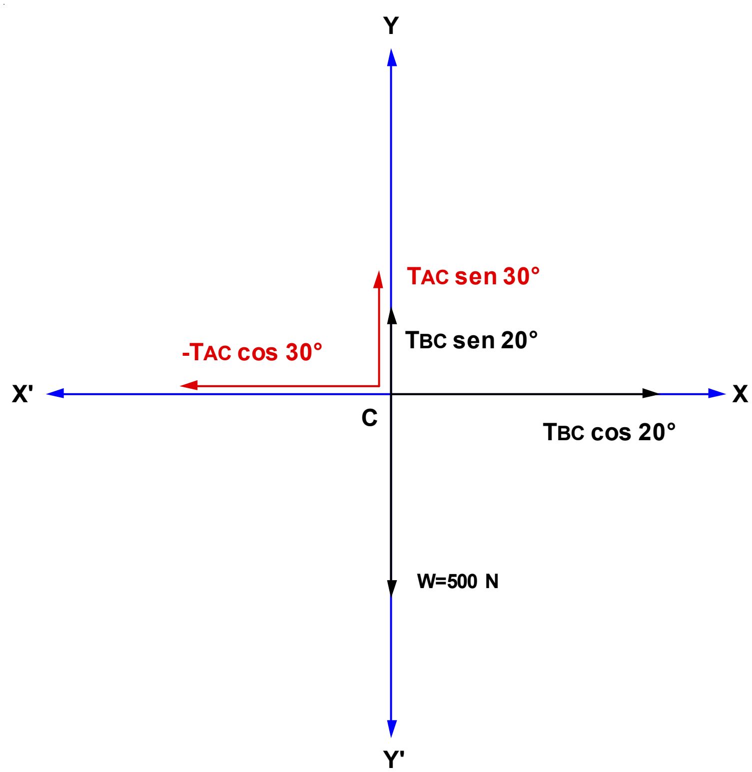



FIGURA 64.

c).- Aplicando la primera y segunda ecuación del equilibrio:

**1)** $\sum \boldsymbol{Fx} = \mathbf{0}$

**1)** $\sum Fx = T_{BC} cos\ 20° - T_{AC} cos\ 30° = 0$

**2)** $\sum \boldsymbol{Fy} = \mathbf{0}$

**2)** $\sum Fy = T_{AC} sen\ 30° + T_{BC} sen\ 20° - 500\ N = 0$

d).- Resolviendo el sistema de ecuaciones (cualquier método) se tendrá:

De la primera ecuación

$$T_{BC} \cos 20° = T_{AC} \cos 30°$$

$$T_{BC} = \frac{T_{AC} cos 30°}{cos\ 20°}$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación.

$$T_{AC}(sen\ 30°) + \frac{T_{AC}}{\cos 20°} \cos 30°\ (sen\ 20°) - 500\ N = 0$$

Con lo cual.

$$0.5\ T_{AC} + 0.315\ T_{AC} = 500\ N$$

$$0.815\ T_{AC} = 500\ N$$

$$\boldsymbol{T_{AC} = 613.496\ N}$$

Remplazando en.

$$T_{BC}\quad \frac{T_{AC} cos 30°}{cos\ 20°}$$

$$T_{BC}\quad \frac{613.496\ cos 30°}{cos\ 20°}$$

$$\boldsymbol{T_{BC} = 565.400\ N}$$

e).- Comprobación:

**1)** $\sum Fx = T_{BC} cos\ 20° - T_{AC} cos\ 30° = 0$

$$565.400\ (\cos 20°) - 613.496\ (\cos 30°) = 0$$

Satisface la ecuación 1

**2)** $\sum Fy = T_{AC} sen\ 30° + T_{BC} sen\ 20° - 500\ N = 0$

$$613.496\ (sen\ 30°) + 565.400\ (sen\ 20°) - 500\ N = 0$$

Satisface la ecuación 2

- **Conclusiones.**

  Como las dos ecuaciones del equilibrio se satisfacen, se concluye que los valores de las tensiones $T_{AC}$ y $T_{BC}$ son correctas.

**Ejemplo de cálculo 2.-** Halle la magnitud de las tensiones en las cuerdas AC y BC del sistema mostrado si W = 800 kg.

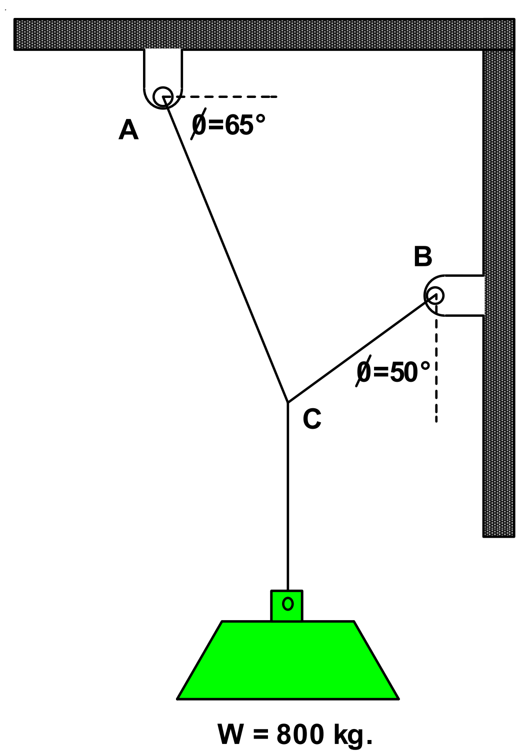



**FIGURA 65.**

- **Datos.**

  Valor del peso W = 800 kg.

  Ángulo director de la tensión $T_{AC}$ ; $\emptyset = 65°$

  Ángulo director de la tensión $T_{BC}$ ; $\emptyset = 50°$

- **Objetivo.**

  Hallar la magnitud de las tenciones en las cuerdas AC y BC del sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Traslado del sistema de fuerzas a un primer sistema equivalente.

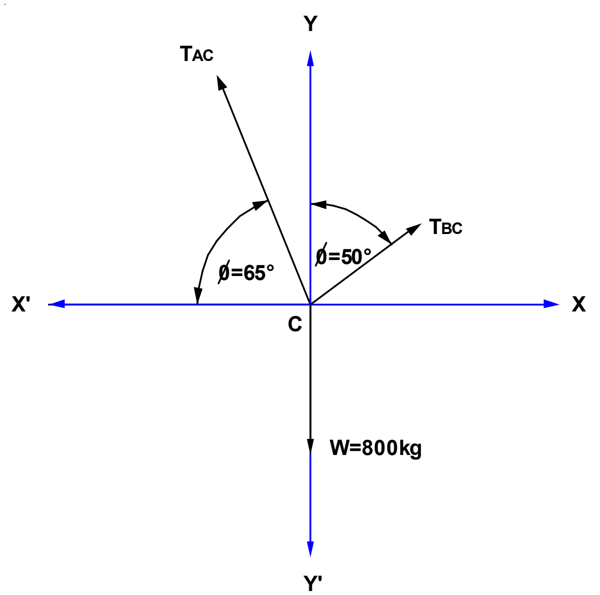



FIGURA 66.

b).- Traslado del sistema de fuerzas a un segundo sistema equivalente.

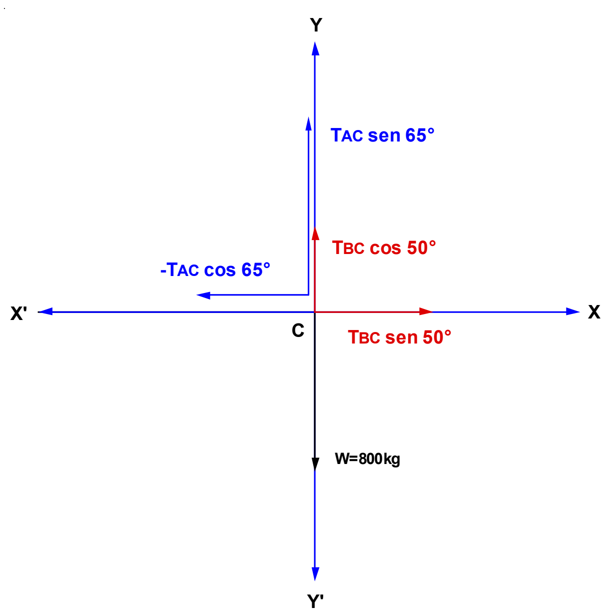



FIGURA 67.

c).- Aplicando la primera y segunda ecuación del equilibrio:

$$1) \quad \sum \boldsymbol{Fx = 0}$$

**1)** $\sum Fx = \; T_{BC} sen\; 50° - \; T_{AC} cos\; 65° = 0$

**2)** $\sum \boldsymbol{Fy = 0}$

**2)** $\sum Fy = \; T_{AC} sen\; 65° + \; T_{BC} cos\; 50° - 800\; kg \quad\; 0$

d).- Resolviendo el sistema de ecuaciones se tendrá:

De la primera ecuación

$$T_{BC}\; \text{sen}\; 50° = \; T_{AC}\; \cos 65°$$

$$T_{BC=}\frac{T_{AC}cos65°}{sen\; 50°}$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación.

$$T_{AC}(sen\; 65°) + \; \frac{T_{AC}}{\text{sen}\; 50°}\cos 65°\; (cos\; 50°) - 800\; kg = 0$$

Con lo cual.

$$0.906\; T_{AC} + 0.354\; T_{AC}\; = 800\; kg$$

$$1.260\; T_{AC}\; = 800\; kg$$

$$\boldsymbol{T_{AC} = 634.920\; kg}$$

Remplazando en.

$$T_{BC=}\frac{T_{AC}cos65°}{sen\; 50°}$$

$$T_{BC} \quad \frac{634.920\; cos65°}{sen\; 50°}$$

$$\boldsymbol{T_{BC} = 350.278\; kg}$$

e).- Comprobación:

**1)** $\sum Fx \qquad T_{BC} sen\; 50° - \; T_{AC} cos\; 65° = 0$

$$350.278\; (\text{sen}\; 50°) - 634.920\; (\cos 65°) = 0$$

Satisface la ecuación 1

$$\textbf{2)} \quad \sum Fy = T_{AC} sen\ 65° + T_{BC} cos\ 50° - 800\ kg = 0$$

$$634.920\ (sen\ 65°) + 350.278\ (cos\ 50°) - 800\ kg = 0$$

Satisface la ecuación 2

- **Conclusiones.**

  Como las dos ecuaciones del equilibrio se satisfacen, se concluye que los valores de las tensiones $T_{AC}$ y $T_{BC}$ son correctas.

**Ejemplo de cálculo 3.-** Calcule la magnitud de las tensiones en las cuerdas AC y BC del sistema mostrado si W = 200 lb.

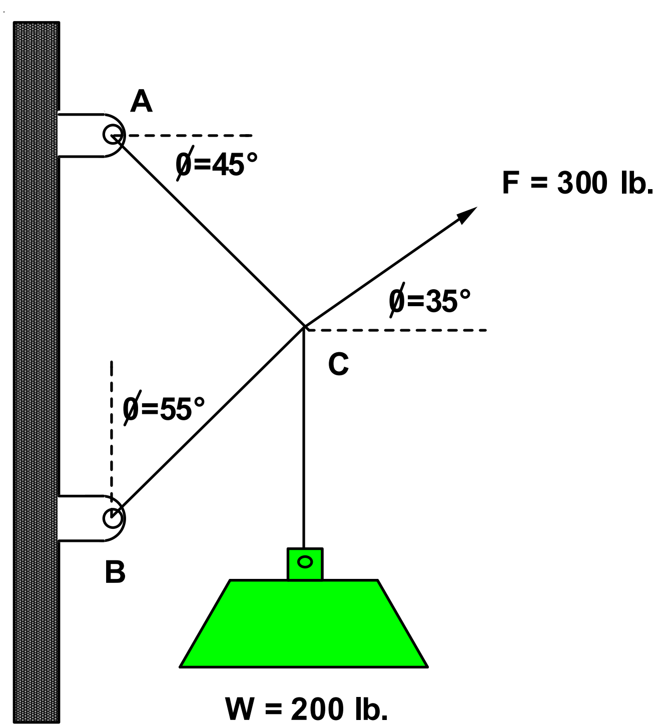



**FIGURA 68.**

- **Datos.**

  Valor del peso W = 200 lb.

  Ángulo director de la tensión $T_{AC}$ ; $\emptyset = 45°$

  Ángulo director de la tensión $T_{BC}$ ; $\emptyset = 55°$

  Módulo de F = 300 lb, ángulo de dirección $\emptyset = 35°$

- **Objetivo.**

  Calcular la magnitud de las tenciones en las cuerdas AC y BC del sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Traslado del sistema de fuerzas a un primer sistema equivalente.

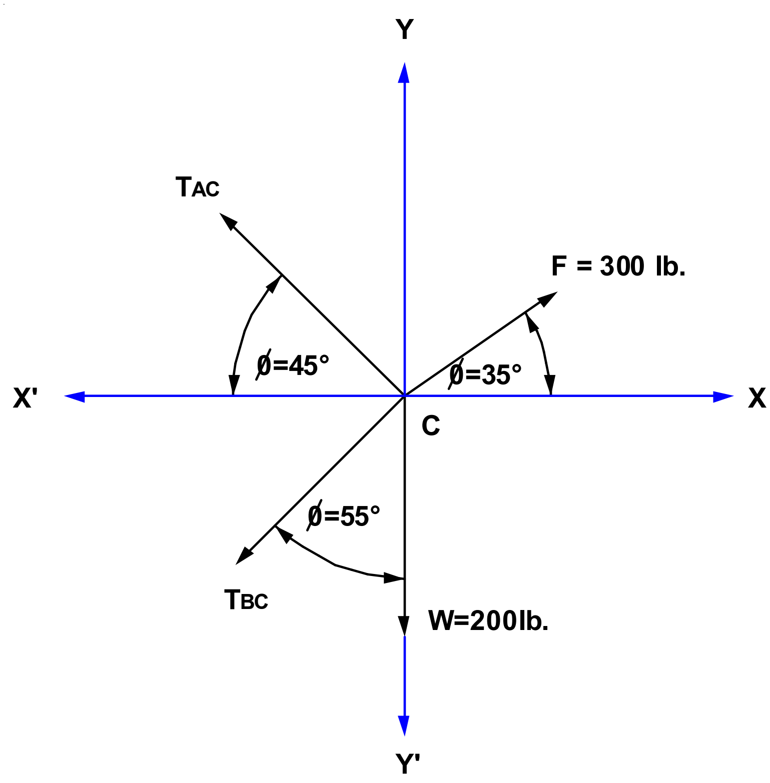



FIGURA 69.

b).- Traslado del sistema de fuerzas a un segundo sistema equivalente.

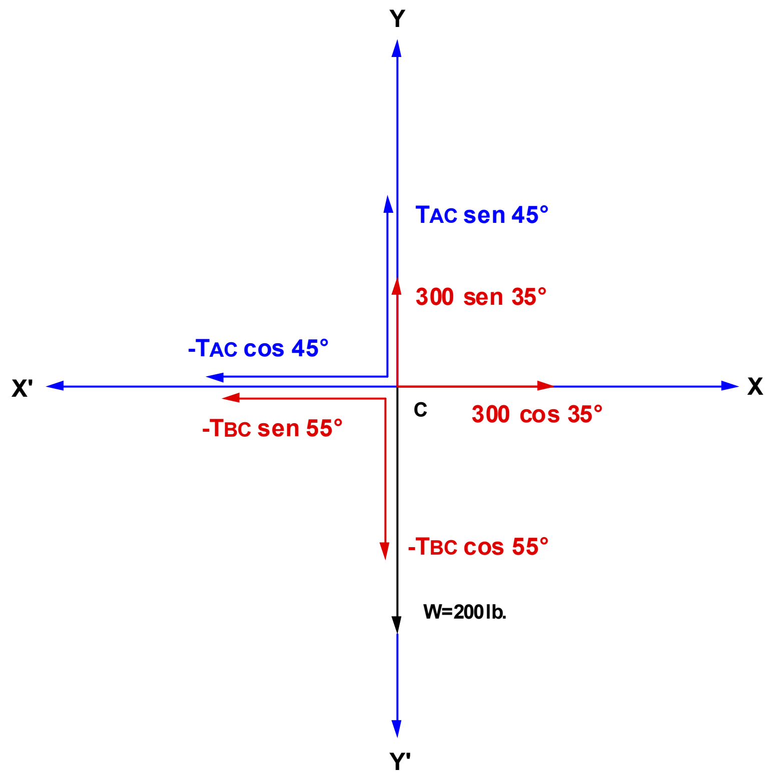



**FIGURA 70.**

c).- Aplicando la primera y segunda ecuación del equilibrio:

$$1) \quad \boldsymbol{\sum Fx = 0}$$

$$\textbf{1)}\ \sum Fx = 300 \cos 35° - T_{AC} cos\ 45° - T_{BC} sen\ 55° = 0$$

$$\textbf{2)} \quad \boldsymbol{\sum Fy = 0}$$

$$\textbf{2)} \quad \sum Fy = T_{AC} sen\ 45° + 300\ sen\ 35° - T_{BC}\ cos\ 55° - 200\ lb = 0$$

d).- Resolviendo el sistema de ecuaciones se tendrá:

De la primera ecuación

$$T_{BC} \operatorname{sen} 55° = 300 \cos 35° - T_{AC} \cos 45°$$

$$T_{BC} = \frac{300 \cos 35° - T_{AC} cos 45°}{sen\ 55°}$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación.

$$\sum Fy = T_{AC} sen\ 45° + 300\ sen\ 35° - T_{BC}\ cos\ 55° - 200\ lb = 0$$

$$\sum Fy = T_{AC} sen\ 45° + 300\ sen\ 35° - \frac{300 \cos 35° - T_{AC} \cos 45°}{sen\ 55°}(cos\ 55°) - 200\ lb = 0$$

Con lo cual.

$$0.707\ T_{AC} + 172.072 - 172.072 + 0.495\ T_{AC} = 200\ lb$$

$$1.202 T_{AC} = 200\ lb$$

$$\boldsymbol{T_{AC} = 166.389\ lb}$$

Remplazando en.

$$T_{BC} = \frac{300 \cos 35° - T_{AC} cos 45°}{sen\ 55°}$$

$$T_{BC} = \frac{300 \cos 35° - 166.389 cos 45°}{sen\ 55°}$$

$$\boldsymbol{T_{BC} = 156.370\ lb}$$

e).- Comprobación:

**1)** $\sum Fx = 300 \cos 35° - T_{AC} cos\ 45° - T_{BC} sen\ 55° = 0$

$$\sum Fx = 300 \cos 35° - 166.389 cos\ 45° - 156.370 sen\ 55° = 0$$

Satisface la ecuación 1

**2)** $\sum Fy = T_{AC} sen\ 45° + 300\ sen\ 35° - T_{BC}\ cos\ 55° - 200\ lb = 0$

**2)** $\sum Fy = 166.389 sen\ 45° + 300\ sen\ 35° - 156.370\ cos\ 55° - 200\ lb = 0$

Satisface la ecuación 2

- **Conclusiones.**

Como las dos ecuaciones del equilibrio se satisfacen, se concluye que los valores de las tensiones $T_{AC}$ y $T_{BC}$ son correctas.

**Ejemplo de cálculo 4.-** Determine el ángulo Ø y el valor de la tensión T, si la reacción en la barra CB = 400 lb.

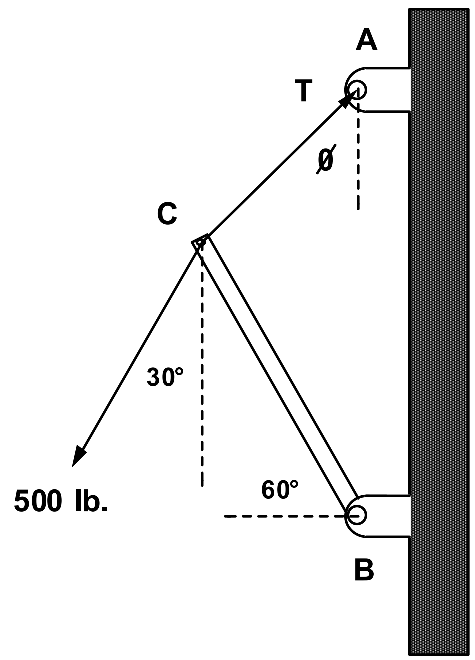



FIGURA 71.

- **Datos.**

  Ángulo director de la tensión T; Ø (Incógnitas)

  Ángulo director de la Fuerza de 500 lb; $\emptyset = 30°$

  Ángulo director de la Reacción CB = 400 lb; $\emptyset = 60°$

- **Objetivo.**

  Determinar el valor de la magnitud de la tención T, y el ángulo Ø.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Traslado del sistema de fuerzas a un primer sistema equivalente.

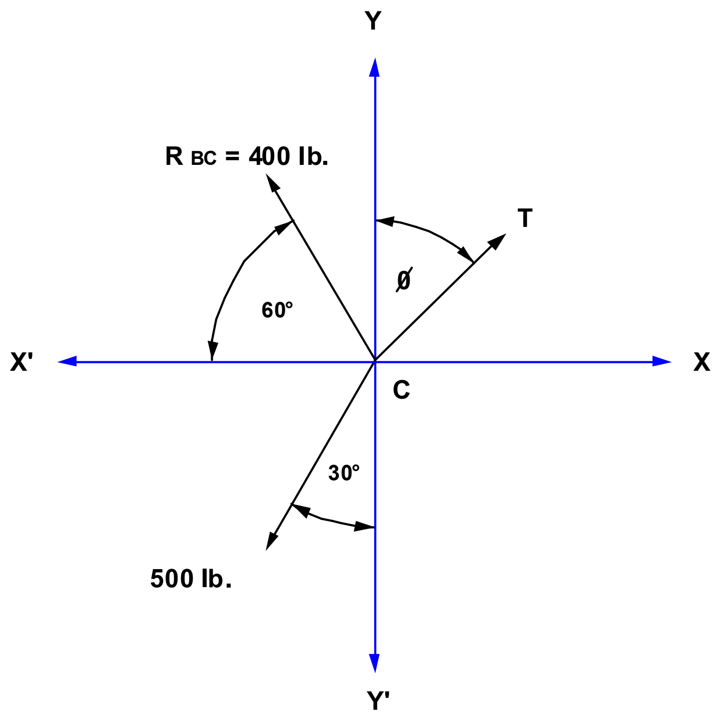



FIGURA 72.

b).- Traslado del sistema de fuerzas a un segundo sistema equivalente.

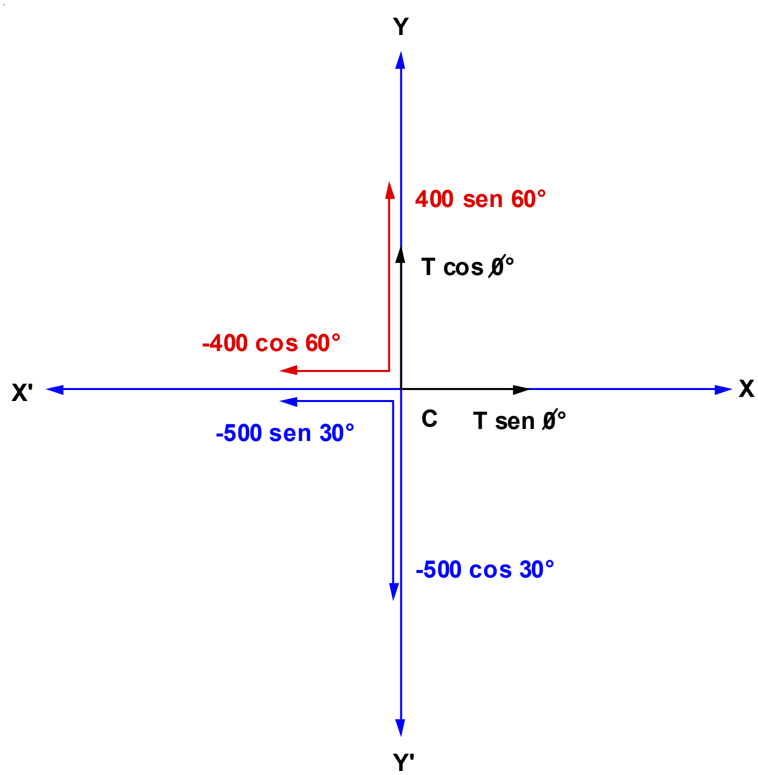



FIGURA 73.

c).- Aplicando la primera y segunda ecuación del equilibrio:

$$\mathbf{1)}\quad \sum \boldsymbol{Fx} = \mathbf{0}$$

**1)** $\sum Fx = \ Tsen\,\text{Ø} - 400\ cos\ 60° - 500\ sen\ 30° = 0$

**2)** $\sum \boldsymbol{Fy} = \mathbf{0}$

**2)** $\sum Fy = \ Tcos\,\text{Ø} + 400\ sen\ 60° - 500\ cos\ 30° = 0$

d).- Resolviendo el sistema de ecuaciones se tendrá:

De la segunda ecuación

$$T = \frac{500\cos 30° - 400\ sen\ 60°}{\cos \text{Ø}\,°}$$

$$T = \frac{86.602}{\cos \text{Ø}}$$

Y sustituyendo en la primera ecuación.

$$\frac{86.602}{\cos \text{Ø}} sen\ \text{Ø} - 400\cos 60° - 500\ sen\ 30° = 0$$

Con lo cual.

$$86.602\ tang\ \text{Ø} = \ 450$$

$$tang\ \text{Ø} = \frac{450}{86.602} = 5.196$$

$$\text{Ø} = \mathbf{79°\ 6'\ 24.02''}$$

Remplazando en.

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathbf{86.602}}{\mathbf{cos\ \text{Ø}}} = \mathbf{458.257\ lb}$$

e).- Comprobación:

$$\mathbf{1)} \sum Fx = \ Tsen\ \text{Ø} - 400\ cos\ 60° - 500\ sen\ 30° = 0$$

$$\mathbf{1)} \sum Fx = \ 458.257\ sen\ \text{Ø} - 400\ cos\ 60° - 500\ sen\ 30° = 0$$

$$550 - 200 - 250 = 0$$

Satisface la ecuación 1

$$\mathbf{2)}\ \sum Fy = \ T cos\ Ø + 400\ sen\ 60° - 500\ cos\ 30° = 0$$

$$\mathbf{2)}\ \sum Fy = \ 458.257\ cos\ Ø + 400\ sen\ 60° - 500\ cos\ 30° = 0$$

$$86.601 + 346.410 - 433.01 = 0$$

$$433.01 - 433.01 = 0$$

Satisface la ecuación 2

- **Conclusiones.**

  Como las dos ecuaciones del equilibrio se satisfacen, se concluye que los valores de la tensión T y el ángulo Ø son correctos.

**Ejemplo de cálculo 5.-** Halle la magnitud de las tensiones en las cuerdas AC y BC del sistema mostrado si W = 2000 N.

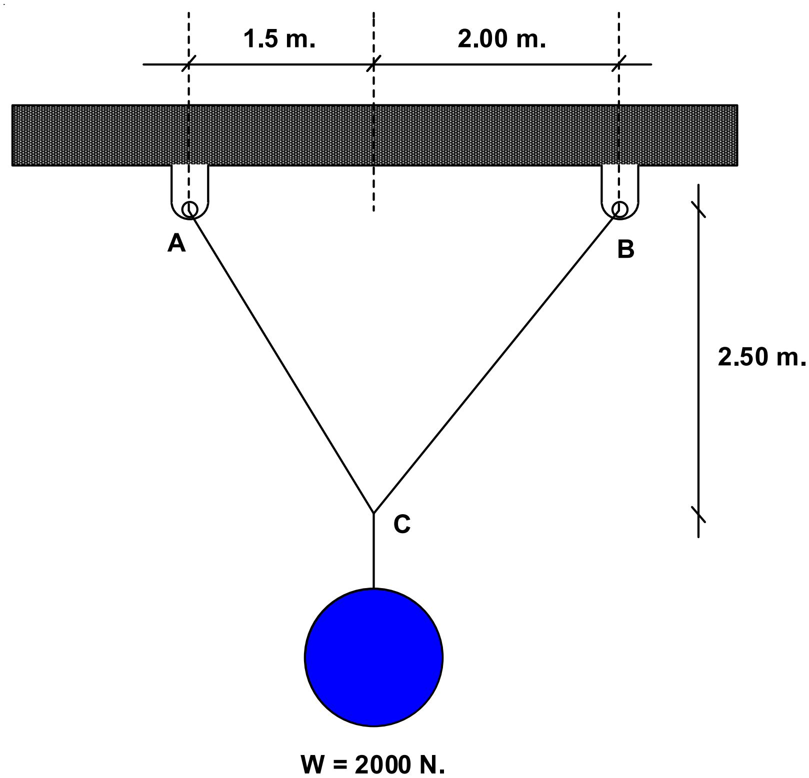



FIGURA 74.

- **Datos.**

  Valor del peso W = 2000 N.

  Ángulo director de la tensión $T_{AC}$ ; no conocido.

  Ángulo director de la tensión $T_{BC}$ ; no conocido.

- **Objetivo.**

  Hallar la magnitud de las tenciones en las cuerdas AC y BC del sistema y sus ángulos directores.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Traslado del sistema de fuerzas a un primer sistema equivalente.

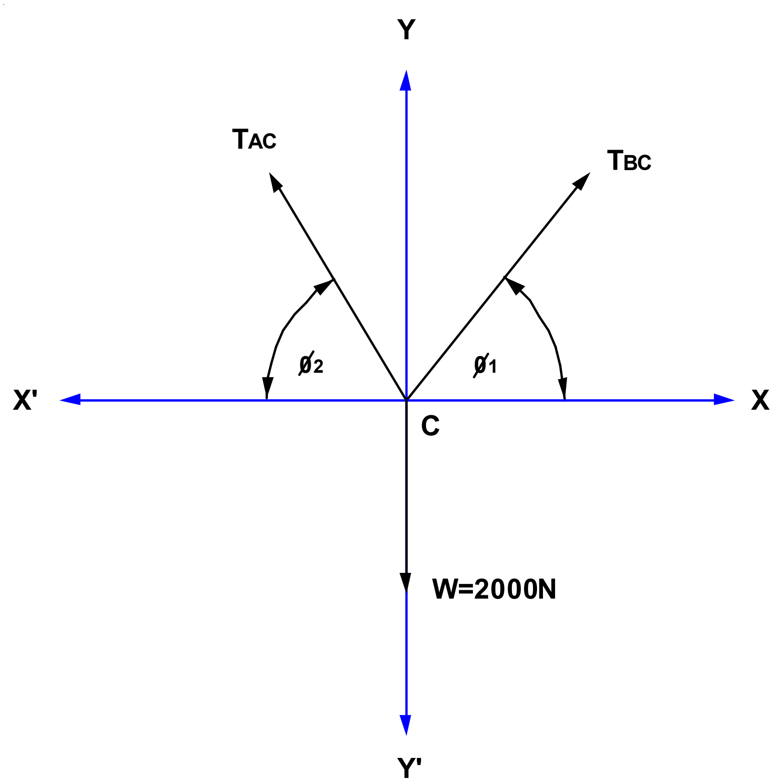



FIGURA 75.

b).- Traslado del sistema de fuerzas a un segundo sistema equivalente.

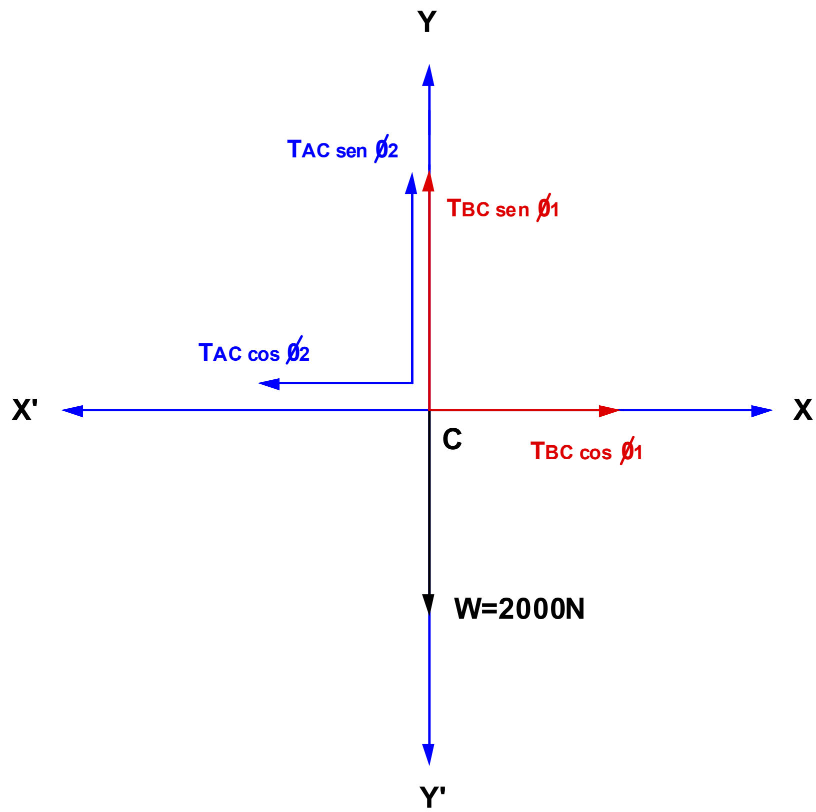



**FIGURA 76.**

c).- Determinación de los ángulos directores de las tensiones.

De la geometría especificada en el ejercicio y aplicando trigonometría fundamental se tiene.

$$tang\ Ø1 = \frac{2.5\ m}{2\ m}$$

$$\mathbf{Ø1 = 51°20'24.69''}$$

$$tang\ Ø2 = \frac{2.5\ m}{1.5\ m}$$

$$\mathbf{Ø2 = 59°\ 2'10.48''}$$

d).- Aplicando la primera y segunda ecuación del equilibrio:

$$1)\quad \sum Fx = 0$$

$$1)\ \sum Fx = T_{BC} cos\ Ø1 - T_{AC}\ cos\ Ø2 = 0$$

$$2)\ \sum Fy \quad 0$$

$$2)\ \sum Fy = T_{AC} sen\ Ø2 + T_{BC}\ sen\ Ø1 - 2000 = 0$$

e).- Resolviendo el sistema de ecuaciones se tendrá:

De la primera ecuación

$$T_{BC} \cos Ø1 = T_{AC} \cos Ø2$$

$$T_{BC} = \frac{T_{AC} \cos Ø2}{\cos Ø1}$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación.

$$\frac{T_{AC} \cos Ø2}{\cos Ø1}\ senØ1 + T_{AC} sen\ Ø2 - 2000\ N = 0$$

Con lo cual.

$$0.643\ T_{AC} + 0.857\ T_{AC} = 2000\ N$$

$$1.5\ T_{AC} = 2000\ N$$

$$\boldsymbol{T_{AC} = 13 \quad .333\ N}$$

Remplazando en.

$$T_{BC} \quad \frac{T_{AC} \cos Ø2}{cos\ Ø1}$$

$$T_{BC} = \frac{1.333 \cos Ø2}{\cos Ø1}$$

$$\boldsymbol{T_{BC} = 1098.126\ N}$$

f).- Comprobación:

$$1)\ \sum Fx \quad T_{BC} cos\ Ø1 - T_{AC}\ cos\ Ø2 = 0$$

$$1098.126\ (\cos\ Ø1) - 1333.333\ (\cos\ Ø2) = 0$$

$$685.993 - 685.993$$

Satisface la ecuación 1

$$2)\ \sum Fy = T_{AC} sen\ Ø2 + T_{BC}\ sen\ Ø1 - 2000 = 0$$

$$1333.333\ (sen\ Ø2) + 1098.126\ (sen\ Ø1) - 2000\ N = 0$$

$$1143.323 + 857.492 - 2000 = 0$$

$$2000 - 2000 = 0$$

Satisface la ecuación 2

- **Conclusiones.**

  Como las dos ecuaciones del equilibrio se satisfacen, se concluye que los valores de las tensiones $T_{AC}$ y $T_{BC}$ son correctas.

**Ejemplo de cálculo 6.-** Calcule la distancia X, para mantener el sistema en equilibrio si F=6000 N. No existe fricción en ninguno de los elementos considerados.

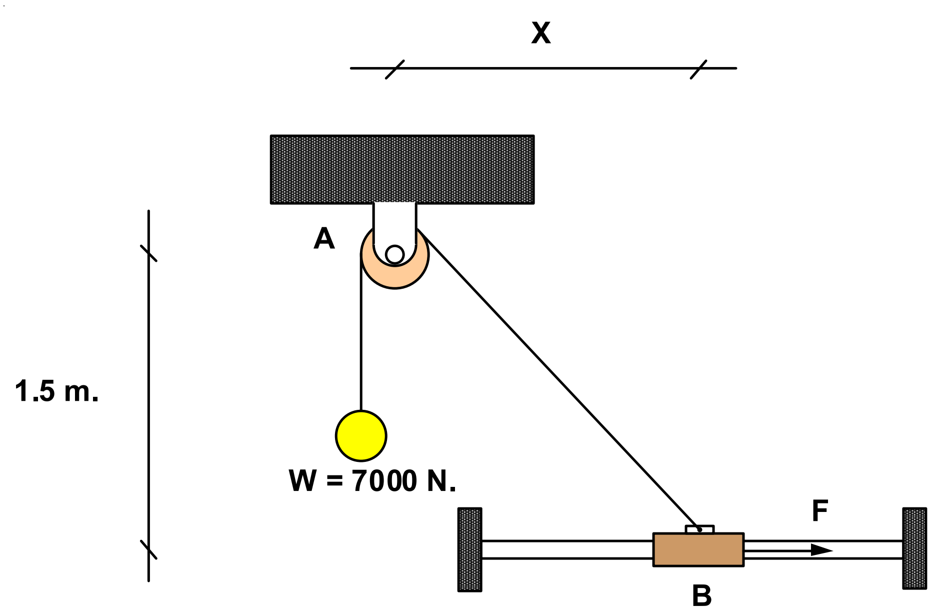



**FIGURA 77.**

- **Datos.**

  Valor del peso W = 7000 N.

  Magnitud de la fuerza $F = 6000\ N$ .

- **Objetivo.**

  Calcular la distancia X, para mantener el sistema en equilibrio.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Traslado del sistema de fuerzas a un primer sistema equivalente.

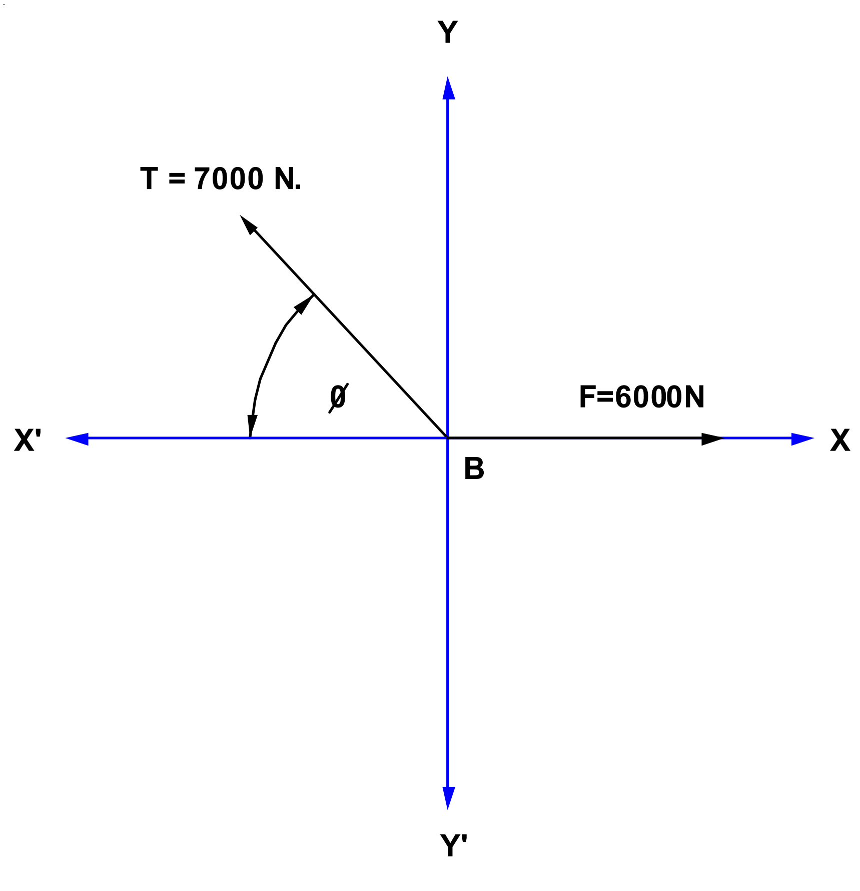



FIGURA 78.

Nota: el valor de T=7000 N, es por el principio de transmisibilidad de fuerzas con respecto a la polea sin fricción.

b).- Traslado del sistema de fuerzas a un segundo sistema equivalente.

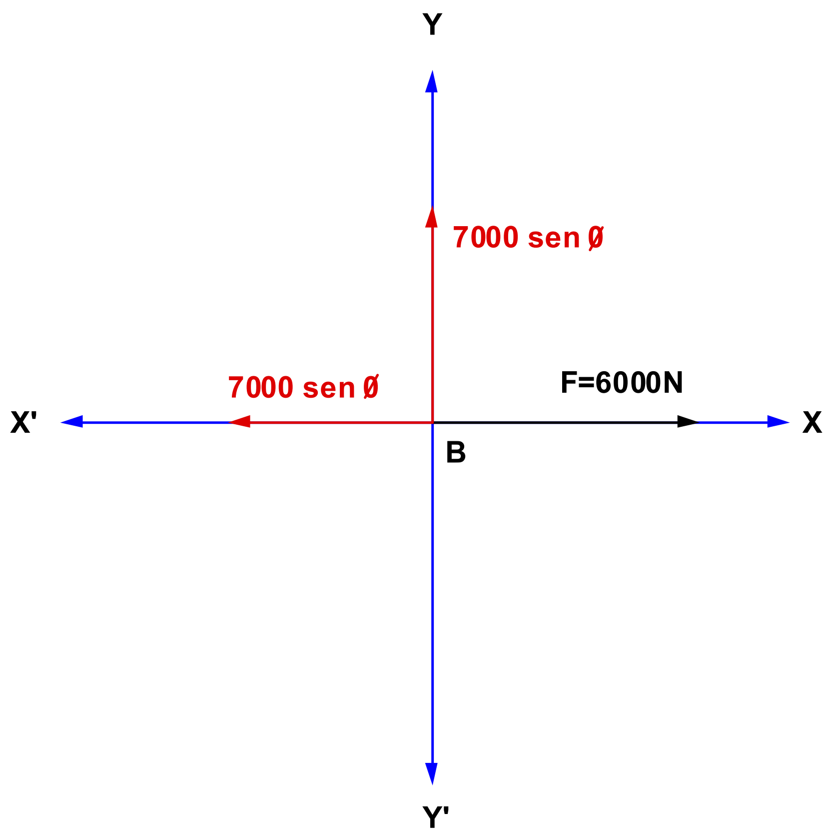



**FIGURA 79.**

c).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio:

$$\mathbf{1)}\quad \sum \boldsymbol{Fx} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{1)}\quad \sum Fx = \ 6000\ N - 7000\ cos\ Ø = 0$$

d).- Resolviendo la ecuación se tendrá:

$$\cos Ø = \frac{6000\ N}{7000\ N} = 0.857$$

$$Ø = 31°\ 0'9.79''$$

e).- Para el valor de X:

$$tang\ Ø = \frac{1.5}{X}$$

$$X = \frac{1.5}{tang\ Ø} = 2.496\ m.$$

f).- Comprobación:

**1)** $\sum Fx = \ 6000\ N - 7000\ cos\ Ø = 0$

**1)** $\sum Fx = \ 6000\ N - 6000\ N = 0$

Satisface la ecuación 1

- **Conclusiones.**

  Como la ecuación del equilibrio se satisface, se concluye que el valor del ángulo director es correcto, y por tanto la distancia X obtenida es la buscada.

**Ejemplo de cálculo 7.-** Determine los valores o magnitudes de las tensiones $T_1$ y $T_2$ del sistema mostrado si la carga es de 1000 kg.

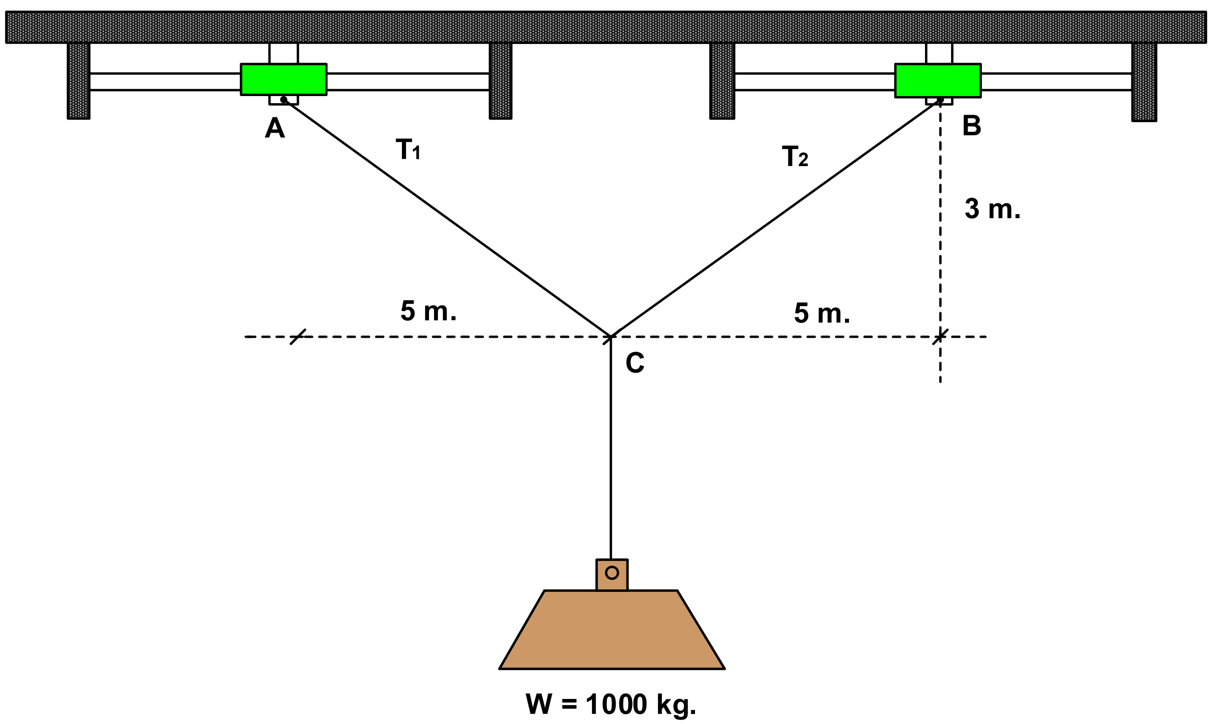



**FIGURA 80.**

- **Datos.**

  Valor del peso W = 1000 kg.

- **Objetivo.**

  Determinar la tensiones $T_1$ y $T_2$ del sistema mostrado.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Traslado del sistema de fuerzas a un primer sistema equivalente.

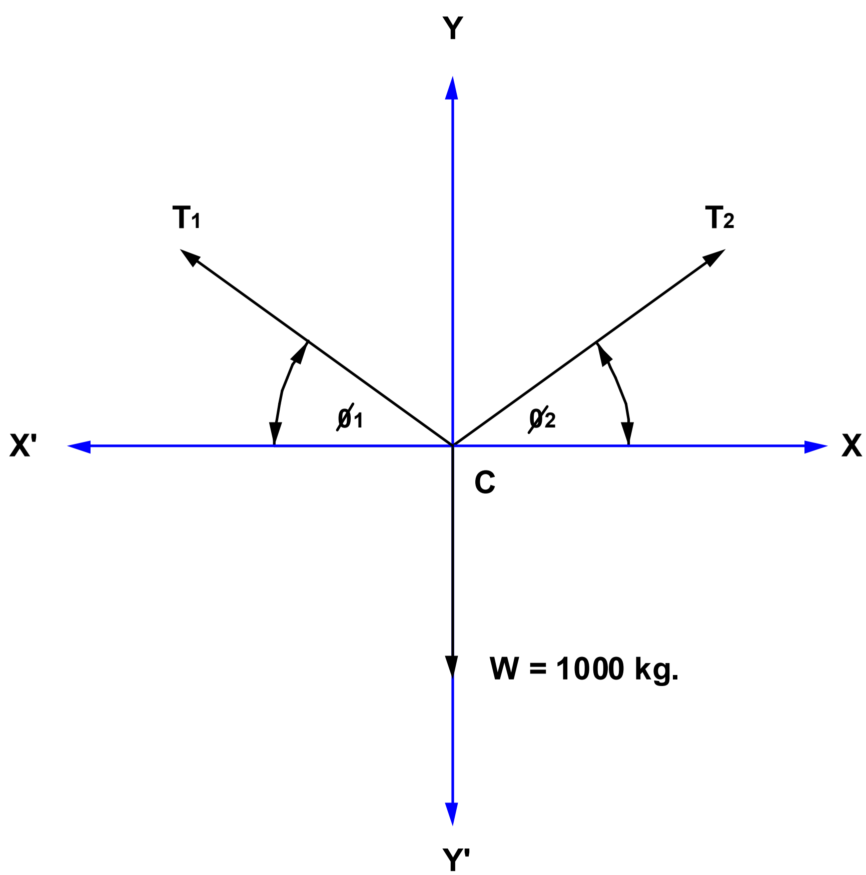



FIGURA 81.

b).- Traslado del sistema de fuerzas a un segundo sistema equivalente.

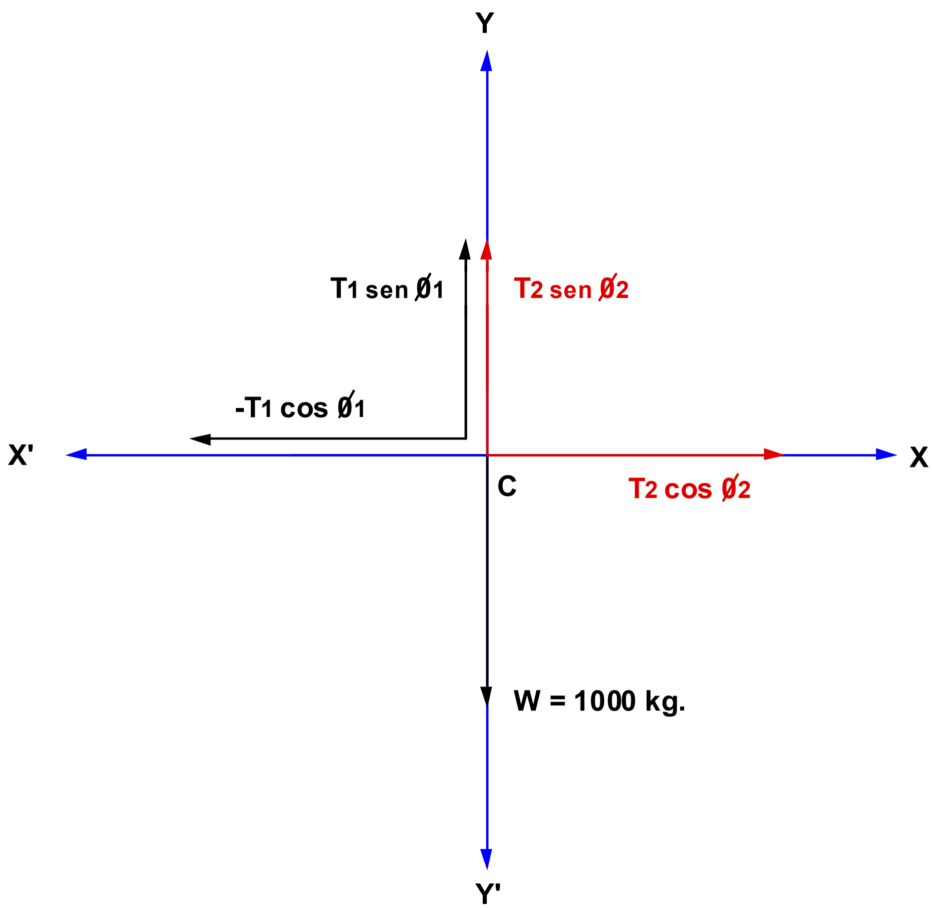



**FIGURA 82.**

c).- Determinando el valor de los ángulos directores, de la geometría del sistema se tendrá:

$$\text{tang}\, Ø1 = \frac{3\ m.}{5\ m.} = 0.6$$

$$Ø1 = Ø2 = 30°\ 57'.52''$$

d).- Aplicando la primera y segunda ecuación del equilibrio:

$$1) \quad \sum Fx = 0$$

$$1) \quad \sum Fx = T_2 cos\, Ø2 - T_1\, cos\, Ø1 = 0$$

$$2) \quad \sum Fy = 0$$

$$2) \quad \sum Fy = T_1 sen\, Ø1 + T_2\, sen\, Ø2 - 1000\, kg = 0$$

e).- Resolviendo el sistema de ecuaciones se tendrá:

De la primera ecuación

$$T_2 \cos Ø2 = T_1 \cos Ø1$$

$$T_2 = \frac{T_1 \cos Ø1}{\cos Ø2}$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación.

$$2) \quad \sum Fy = T_1 sen\, Ø1 + T_2\, sen\, Ø2 - 1000\, kg = 0$$

$$T_1\, senØ1 + \frac{T_1 \cos Ø1}{\cos Ø2} sen\, Ø2 - 1000\, kg = 0$$

Con lo cual.

$$0.514\, T_1 + 0.514\, T_1 = 1000\, kg$$

$$1.028\, T_1 = 1000\, kg$$

$$\boldsymbol{T_1 = 972.76\, kg}$$

Remplazando en.

$$T_2 = \frac{T_1 \cos Ø1}{\cos Ø2}$$

$$T_2 = \frac{972.76 \cos Ø1}{\cos Ø2}$$

$$\boldsymbol{T_2 = 972.76\, kg}$$

f).- Comprobación:

$$1)\ \sum Fx \qquad T_2 cos\ Ø2 - T_1\ cos\ Ø1 = 0$$

$$972.76\ (\cos\ Ø2) - 972.76\ (\cos\ Ø1) = 0$$

$$834.134 - 834.134 = 0$$

Satisface la ecuación 1

$$2)\ \sum Fy =\ T_1 sen\ Ø1 + T_2\ sen\ Ø2 - 1000\ kg \qquad 0$$

$$972.76\ (sen\ Ø1) + 972.76\ (sen\ Ø2) - 2000\ N = 0$$

$$500 + 500 - 1000 = 0$$

$$1000 - 1000 = 0$$

Satisface la ecuación 2

- **Conclusiones.**

  Por la simetría planteada en el sistema de fuerzas original, era una conclusión evidente que la magnitud de las dos tenciones tenía que ser igual para conservar el sistema en equilibrio.

## 2.4 FUERZAS EN EL ESPACIO.

La temática abordada en los capítulos anteriores ha considerado hasta el momento sistemas de fuerzas únicamente en el plano bidimensional, en el presente estudio trataremos sobre sistemas de fuerzas cuyas líneas de acción se encuentren inmersas en el espacio tridimensional, cabe indicar que no existirá ninguna teoría nueva, simplemente se tendrá que considerar en los ejercicios la existencia de una componente adicional de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo.

### 2.4.1 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA EN ESPACIOS TRIDIMENSIONALES.

Consideremos por ejemplo, una fuerza F que actúa en el origen de un sistema referencial espacial, como se entiende que conocemos la magnitud de este vector, se requiere definir en primer término la dirección de F, para lo cual se traza el plano vertical OBAC en el cual estará contenido el vector, de esta manera la dirección con respecto al eje vertical "Y" de F, está definida por el ángulo $\theta_y$ que forma el vector F con el mencionado eje.

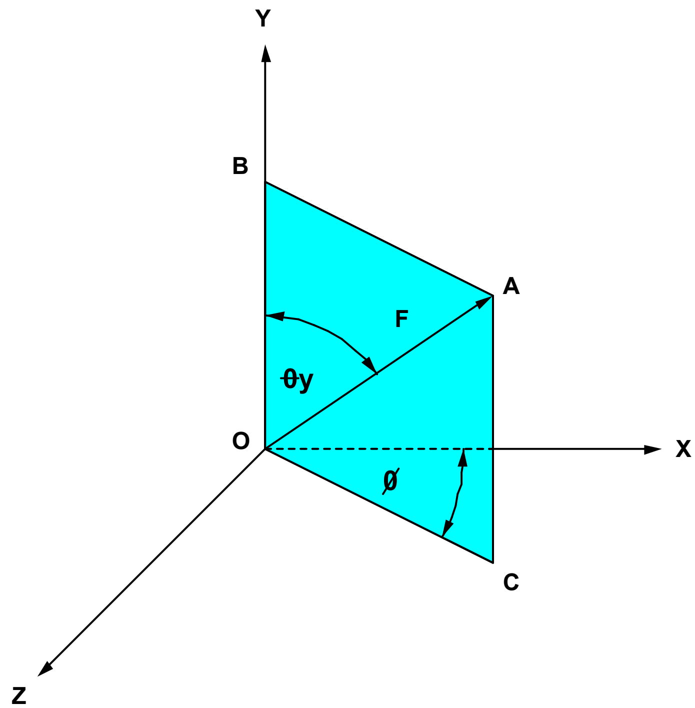



FIGURA 83.

Ahora bien, de esta manera se puede obtener dos componentes de la fuerza F, una con respecto al eje “Y”, y la otra con respecto al plano “XZ”, referidas al ángulo director $\theta_y$ de F.

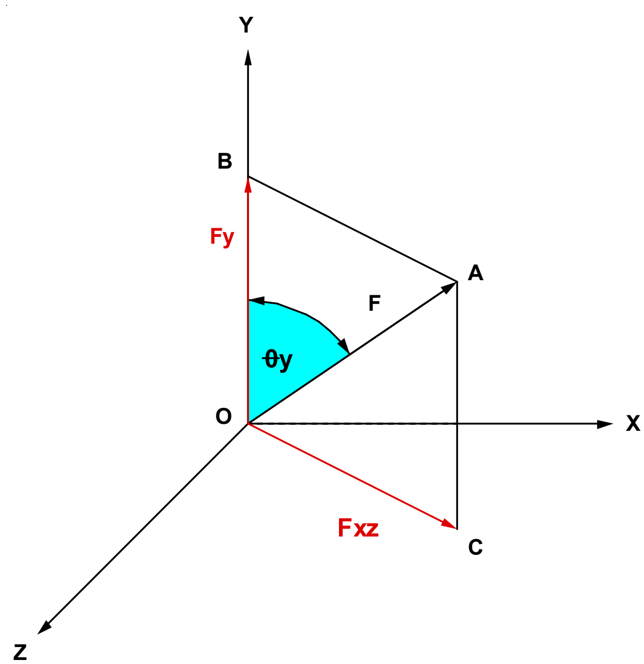



FIGURA 84.

Los valores de estas componentes serán:

$$F_y = F \cos \Theta_y \qquad \text{y} \qquad F_{xz} = F\ sen\ \Theta_y$$

Para definir ahora las componentes con respecto a los ejes "X" y "Z" tenemos que considerar el ángulo director Ø de Fxz con respecto a "X":

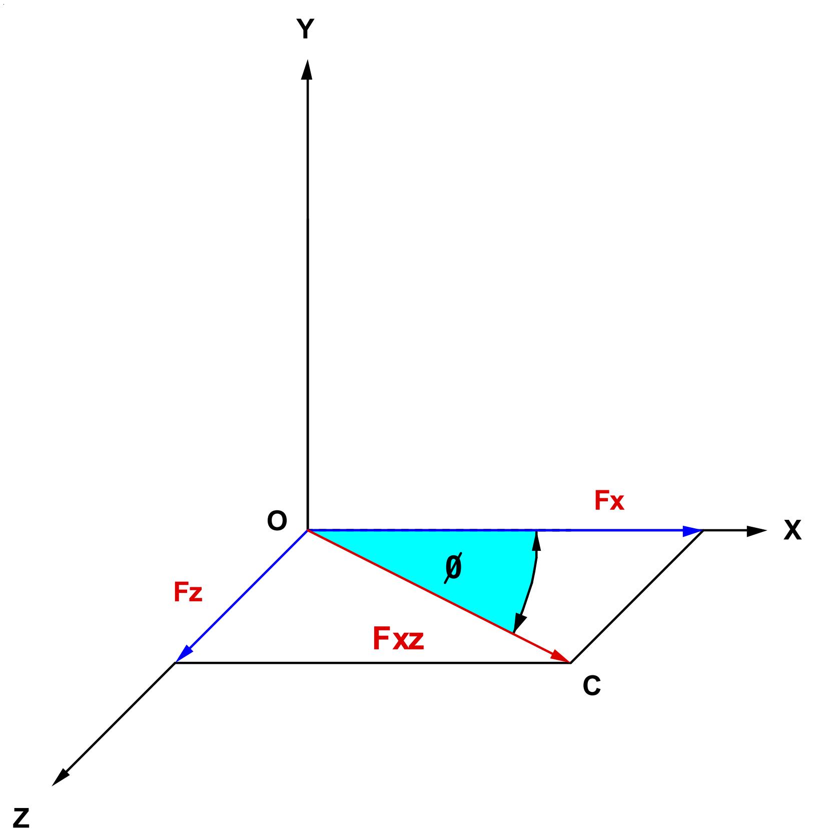



**FIGURA 85.**

De esta manera, la componente $F_x$ será:

$$F_x = F_{xz} \cos \emptyset = F\ sen\ \Theta_y \cos \emptyset$$

Y la componente $F_z$:

$$F_z = F_{xz}\ \text{sen}\ \emptyset = F\ sen\ \Theta_y\ \text{sen}\ \emptyset$$

Por lo tanto, la fuerza F, se ha descompuesto en sus tres componentes rectangulares vectoriales $F_x, F_y, y\ F_z$.

En caso de desconocer la magnitud de F, se aplicará la siguiente relación:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad \textit{(11)}$$

Ahora se podrá apreciar la relación geométrica entre F, y sus componentes rectangulares en la siguiente figura.

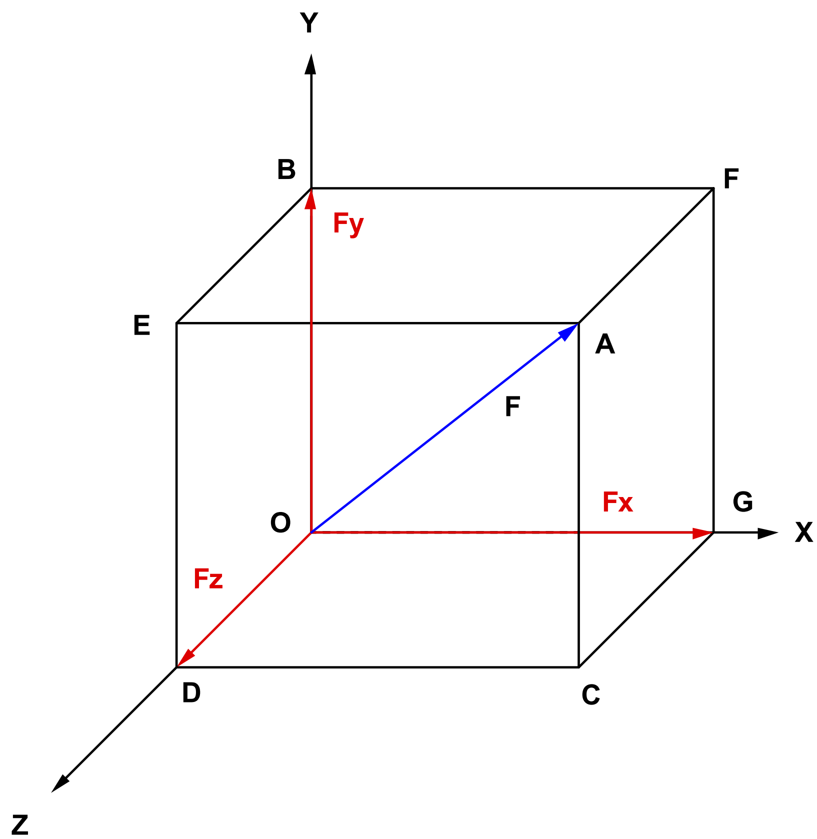



**FIGURA 86.**

Donde la magnitud de F corresponde con la diagonal del cuerpo tridimensional mostrado en la figura es decir $\overline{\mathrm{OA}}$.

## 2.4.2 COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR.

En un sistema referencial espacial orto normal, se denominan cosenos directores de un vector F, al valor de los cosenos de los ángulos que forma el vector F con los vectores de la base.

En las siguientes figuras se han trazado la fuerza F, sus componentes rectangulares y los ángulos directores con respecto a cada uno de los ejes.

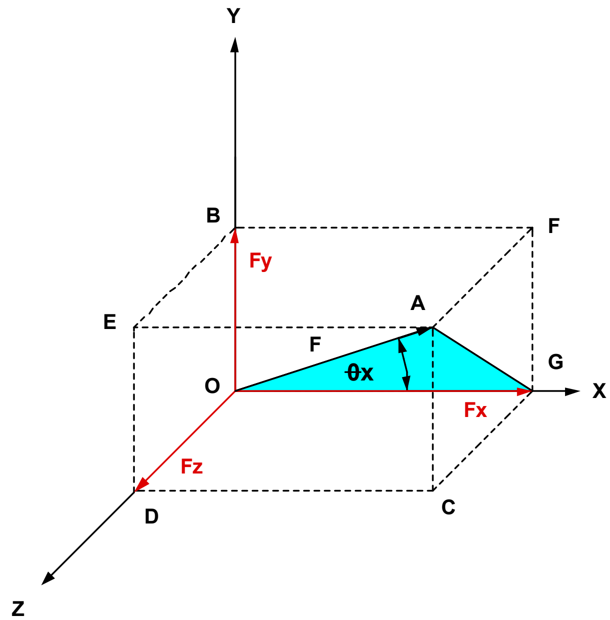



FIGURA 87.

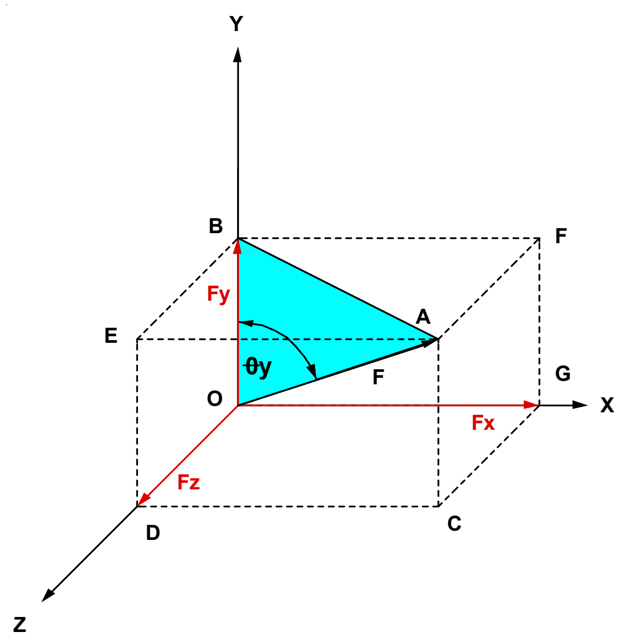



FIGURA 88.

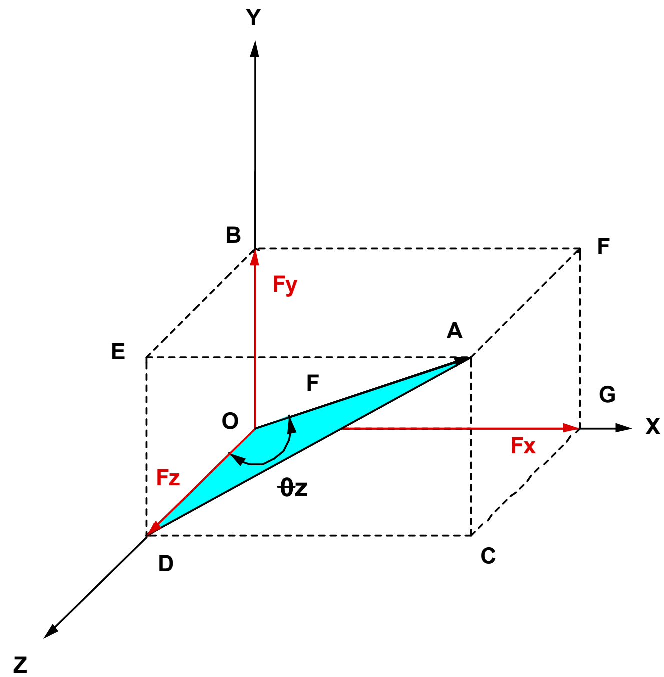



**FIGURA 89.**

De esta manera las componentes rectangulares de F, definidas en función de sus ángulos directores serán:

$$F_x = Fcos\Theta_x$$

$$F_y = Fcos\Theta_y$$

$$F_z = Fcos\Theta_z$$

Donde los cosenos de $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$ son los cosenos directores de la fuerza F.

Con la utilización de vectores unitarios $i, j, k$, que discurren en dirección de sus respectivos ejes referenciales, se puede expresar ahora F en la siguiente forma:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

O también

$$F = F cos\Theta_x i + F cos\Theta_y j + F cos\Theta_z k$$

Conocidos los valores de las magnitudes de las componentes rectangulares $F_x$ , $F_y$ , $y$, $F_z$ de un vector F, se puede determinar la magnitud del vector, así como los valores de sus ángulos directores de la siguiente manera:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Y

$$\cos\Theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\Theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\Theta_z = \frac{F_z}{F} \qquad \textbf{\textit{(12)}}$$

**Ejemplo de cálculo 1.-** Dadas las magnitudes de las componentes rectangulares de un vector $F_x = 50\ N$, $F_y = 80\ N$ , $y$ , $F_z = -40\ N$. Determine la magnitud o módulo del vector F y, calcular el valor de los ángulos $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$ , que forma el vector con los ejes coordenados espaciales.

- **Datos.**

  $F_x = 50\ N, F_y = 80\ N\ , F_z = -40\ N$

- **Objetivo.**

  Determinar el módulo del vector F.
  Calcular el valor de los ángulos directores $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Valoración del módulo del vector:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F = \sqrt{(50N)^2 + (80N)^2 + (-40N)^2}$$

$$F = \sqrt{2500\ N^2 + 6400\ N^2 + 1600\ N^2}$$

$$F = \sqrt{10500N^2}$$

$$F = 102.469\ N$$

b).- Determinación de los ángulos directores:

$$\cos \Theta_x = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos \Theta_x = \frac{50\ N}{102.469\ N}$$

$$\Theta_x = cos^{-1}\ (\ 0.487\ )$$

$$\boldsymbol{\Theta_x = 60°\ 51'23.08''}$$

$$\cos \Theta_y = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos \Theta_y = \frac{80\ N}{102.469\ N}$$

$$\Theta_y = cos^{-1}\ (\ 0.780\ )$$

$$\boldsymbol{\Theta_y = 38°\ 44'21.93''}$$

$$\cos \Theta_z = \frac{F_z}{F}$$

$$\cos \Theta_z = \frac{-40\ N}{102.469\ N}$$

$$\Theta_z = cos^{-1}\ (\ -0.390\ )$$

$$\boldsymbol{\Theta_z = 112°\ 57'16.2''}$$

**Ejemplo de cálculo 2.-** Dadas las magnitudes de las componentes rectangulares de un vector $F_x = -90\ N,\ F_y = 100\ N\ ,y\ ,\ F_z = \ -70\ N$. Halle la magnitud o módulo del vector F y, calcular el valor de los ángulos $\Theta_x\ ,\Theta_y\ ,\Theta_z$ , que forma el vector con los ejes coordenados espaciales.

- **Datos.**

$F_x = -90\ N, F_y = 100\ N\ \ ,F_z = \ -70\ N$

- **Objetivo.**

  Hallar el módulo del vector F.
  Calcular el valor de los ángulos directores $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Valoración del módulo del vector:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$F = \sqrt{(-90N)^2 + (100N)^2 + (-70N)^2}$$

$$F = \sqrt{8100\ N^2 + 10000\ N^2 + 4900\ N^2}$$

$$F = \sqrt{23000N^2}$$

$$\boldsymbol{F = 151.657\ N}$$

  b).- Determinación de los ángulos directores:

$$\cos\Theta_x = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos\Theta_x = \frac{-90\ N}{151.657\ N}$$

$$\Theta_x = cos^{-1}\ (\ -0.593\ )$$

$$\boldsymbol{\Theta_x = 126° \ 22' \ 12.6''}$$

$$\cos\Theta_y = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos\Theta_y = \frac{100\ N}{151.657\ N}$$

$$\Theta_y = cos^{-1}\ (\ 0.659\ )$$

$$\boldsymbol{\Theta_y = 48° \ 46'34.85''}$$

$$\cos\Theta_z = \frac{F_z}{F}$$

$$\cos \Theta_z = \frac{-70\ N}{151.657\ N}$$

$$\Theta_z = cos^{-1}\,(\,-0.461\,)$$

$$\Theta_z = \mathbf{117^{\circ}\,27'5.96''}$$

### 2.4.3 FUERZAS DEFINIDAS POR LAS COORDENADAS DE DOS PUNTOS.

Se considera ahora el caso, cuando la magnitud del vector F no está definido por un valor numérico explícito, sino por las coordenadas rectangulares de los puntos inicial y terminal del vector en el espacio, como se puede apreciar en la siguiente gráfica.

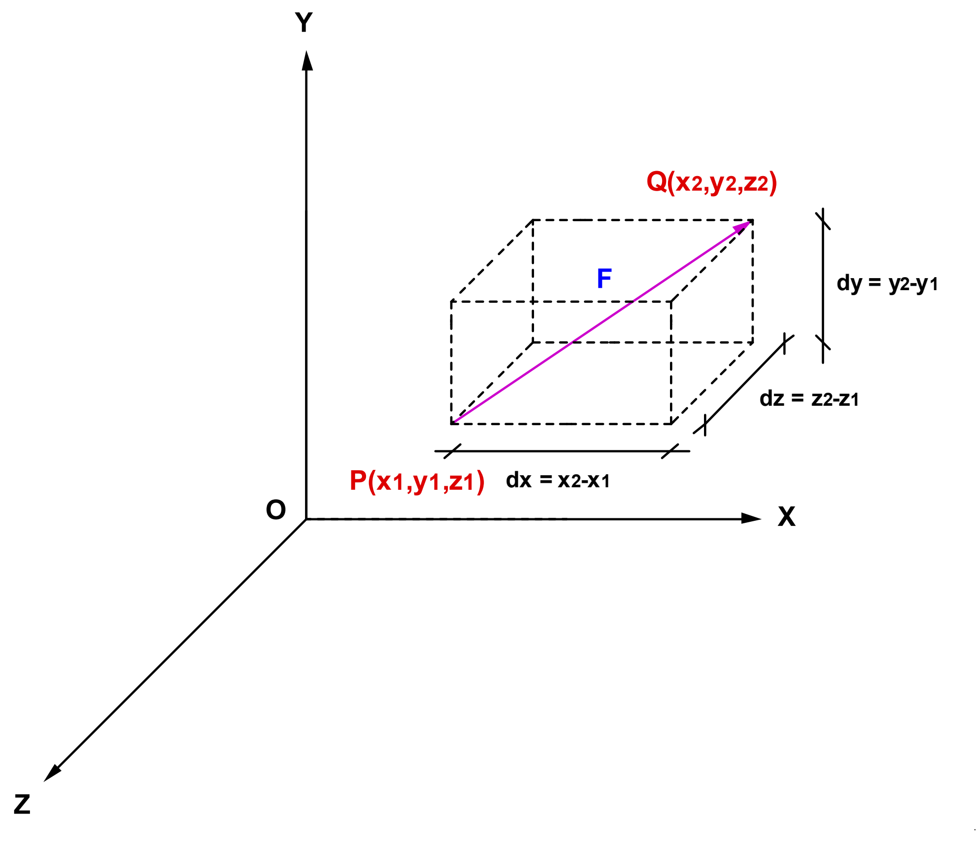



**FIGURA 90.**

Recordemos que, el objetivo es determinar la magnitud del vector F, por lo tanto considerando la diagonal del sólido mostrado en la figura, como un segmento rectilíneo dirigido (sección 3.2), se establece en primer término los valores de las distancias $d_x\,, d_y\,, y, d_z$ (sección 3,2,1), con respecto al sistema de referencia tridimensional.

Por lo tanto

$$d_x = (x_2 - x_1) \qquad d_y = (y_2 - y_1) \qquad d_z = (z_2 - z_1)$$

Lo cual nos permite determinar la magnitud buscada que será:

$$F = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$ que es equivalente a $$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Los ángulos directores $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$ serán determinados por las relaciones.

$$\cos\Theta_x = \frac{d_x}{F} \qquad \cos\Theta_y = \frac{d_y}{F} \qquad \cos\Theta_z = \frac{d_z}{F} \quad \textit{(13)}$$

**Ejemplo de cálculo 3.-** Los puntos inicial y final de F son respectivamente P (1, -2, 3), y, Q (-5, 6, -3). Determine la magnitud de F en Newton y los ángulos directores del vector.

- **Datos.**

  Coordenadas del punto inicial P (1, -2, 3)

  Coordenadas del punto terminal Q (-5, 6, -3)

- **Objetivo.**

  Determinar el módulo del vector F.
  Calcular el valor de los ángulos directores $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Cálculo de las distancias $d_x$ , $d_y$ , $d_z$

$$d_x = (x_2 - x_1)$$

$$d_x = (-5 - (1))$$

$$d_x = (-6)$$

$$d_y = (y_2 - \ y_1)$$

$$d_y = (6 \ - (-2))$$

$$d_y = (8)$$

$$d_z = (z_2 - \ z_1)$$

$$d_z = (-3 \ - (3))$$

$$d_z = (-6)$$

De esta manera:

$$F = \sqrt{d_x^2 + \ d_y^2 + \ d_z^2}$$

$$F = \sqrt{(-6)^2 + \ (8)^2 + \ (-6)^2}$$

$$F = \sqrt{36 + 64 + 36}$$

$$F = \sqrt{136}$$

$$\boldsymbol{F = 11.66} \textbf{ N.}$$

b).- Determinación de los ángulos directores:

$$\cos \Theta_x = \frac{d_x}{F}$$

$$\cos \Theta_x = \frac{-6}{11.66}$$

$$\cos \Theta_x = -0.514$$

$$\Theta_x = cos^{-1} \left( -0.514 \right)$$

$$\boldsymbol{\Theta_x = 120° \ 55' \ 50.2''}$$

$$\cos \Theta_y = \frac{d_y}{F}$$

$$\cos \Theta_y = \frac{8}{11.66}$$

$$\cos \Theta_y = 0.686$$

$$\Theta_y = cos^{-1} \left( 0.686 \right)$$

$$\Theta_y = \mathbf{46° \; 41' 8.51''}$$

$$\cos \Theta_z = \frac{d_z}{F}$$

$$\cos \Theta_z = \frac{-6}{11.66}$$

$$\cos \Theta_z = -0.514$$

$$\Theta_z = cos^{-1}\,(\,-0.514\,)$$

$$\Theta_z = \mathbf{120° \; 55' \; 50.2''}$$

### 2.4.4 EJERCICIOS RELACIONADOS CON SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO.

**Ejemplo de cálculo 1.-** El tensor de un poste de luz PQ está anclado en a tierra mediante un gancho P como se muestra en la figura, la tensión en el alambre es de 3000 N. Determine las componentes rectangulares de la fuerza que actúa en el gancho y los ángulos directores de la misma.

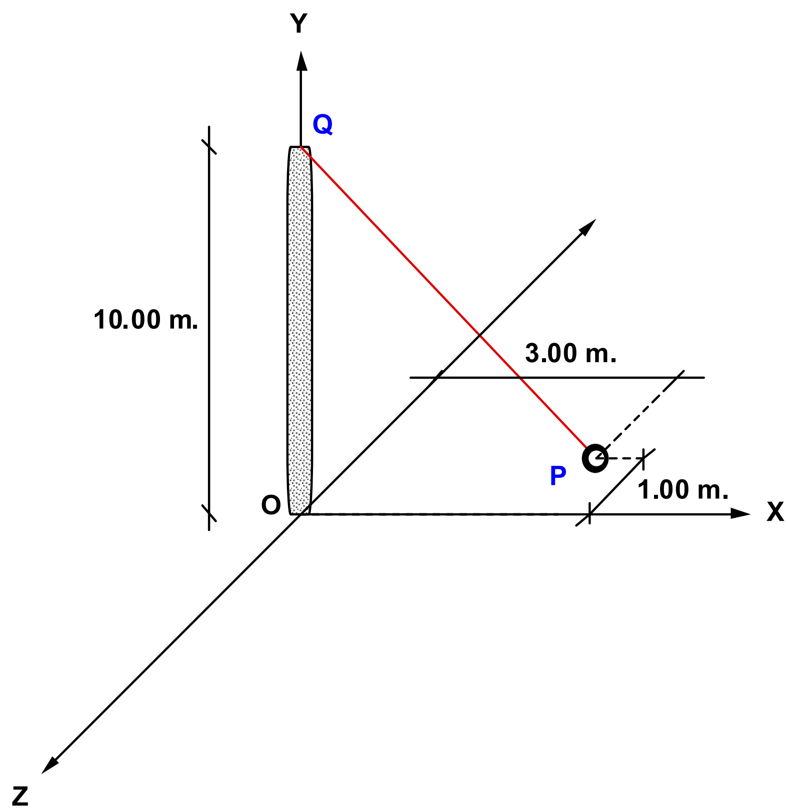



FIGURA 91.

- **Datos.**

  Tensión en el alambre 3000 N.

- **Objetivo.**

  Determinar las componentes rectangulares de la fuerza en el gancho P.
  Calcular el valor de los ángulos directores $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$ que definen la dirección de la fuerza.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar componentes de la fuerza dirigida de P a Q, **lo que define signos.**

$$d_x = -3.00\, m. \qquad d_y = \ 10.00\, m. \qquad d_z = 1.00\, m.$$

Lo que permite establecer la distancia de PQ de la siguiente manera.

$$PQ = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$PQ = \sqrt{(-3)^2 + (10)^2 + (1)^2}$$

$$PQ = \sqrt{9 + 100 + 1}$$

$$PQ = \sqrt{110}$$

$$\boldsymbol{PQ = 10.488\, m.}$$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ expresado en términos de sus unitarios será

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -(3.00\ \mathrm{m})\mathbf{i} + (10.00\ \mathrm{m})\mathbf{j} + (1.00\ \mathrm{m})\mathbf{k}$$

Al incluir el vector unitario λ se tendrá

$$F = F\lambda = F\ \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \qquad \textbf{\textit{(14)}}$$

$$F = F\lambda = (3000N)\ \frac{\overrightarrow{PQ}}{PQ}$$

$$F = F\lambda = (3000N)\ \frac{\overrightarrow{PQ}}{(10.488\ m.)}$$

$$F = F\lambda = \ \ 3000N)\ \frac{-(3.00\text{ m})\mathbf{i} + \ (10.00\text{ m})\mathbf{j} + \ (1.00\text{ m})\mathbf{k}}{(10.488\ m.)}$$

$$\text{F} = \ -(858.123\ N)\mathbf{i} + \ (2860.411\ N)\mathbf{j} + \ (286.041\ N)\mathbf{k}$$

De esta manera las componentes buscadas para la fuerza serán:

$$\boldsymbol{F_x = \ -858.123\ N} \qquad \boldsymbol{F_y = 2860.411\ N} \qquad \boldsymbol{F_z = 286.041\ N}$$

b).- Para determinar el valor de los ángulos directores $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$ que definen la dirección de la fuerza, se tendrá.

$$\cos\Theta_x = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos\Theta_x = \frac{-858.123\ N}{3000\ N}$$

$$\cos\Theta_x = \ -0.286$$

$$\Theta_x = \ cos^{-1}\ (\ -0.286)$$

$$\boldsymbol{\Theta_x = 106°\ 37'7.08''}$$

$$\cos\Theta_y = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos\Theta_y = \frac{2860.411\ N}{3000\ N}$$

$$\cos\Theta_y = \ 0.953$$

$$\Theta_y = \ cos^{-1}\ (\ 0.953\ )$$

$$\boldsymbol{\Theta_y = 17°\ 38'9.94''}$$

$$\cos\Theta_z = \frac{F_z}{F}$$

$$\cos\Theta_z = \frac{286.041\ N}{3000\ N}$$

$$\cos\Theta_z = \ 0.0953$$

$$\Theta_z = \ cos^{-1}\ (\ 0.0953)$$

$$\boldsymbol{\Theta_z = 84°\ 31'53.09''}$$

**Ejemplo de cálculo 2.-** Una barda colocada en un parterre, esta sostenida mediante dos cables CA y CB como se muestra en la figura, anclados a tierra mediante un mecanismo de sujeción en C, las tensiones son 1200 N y 1600 N respectivamente. Calcule la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables sobre el anclaje C.

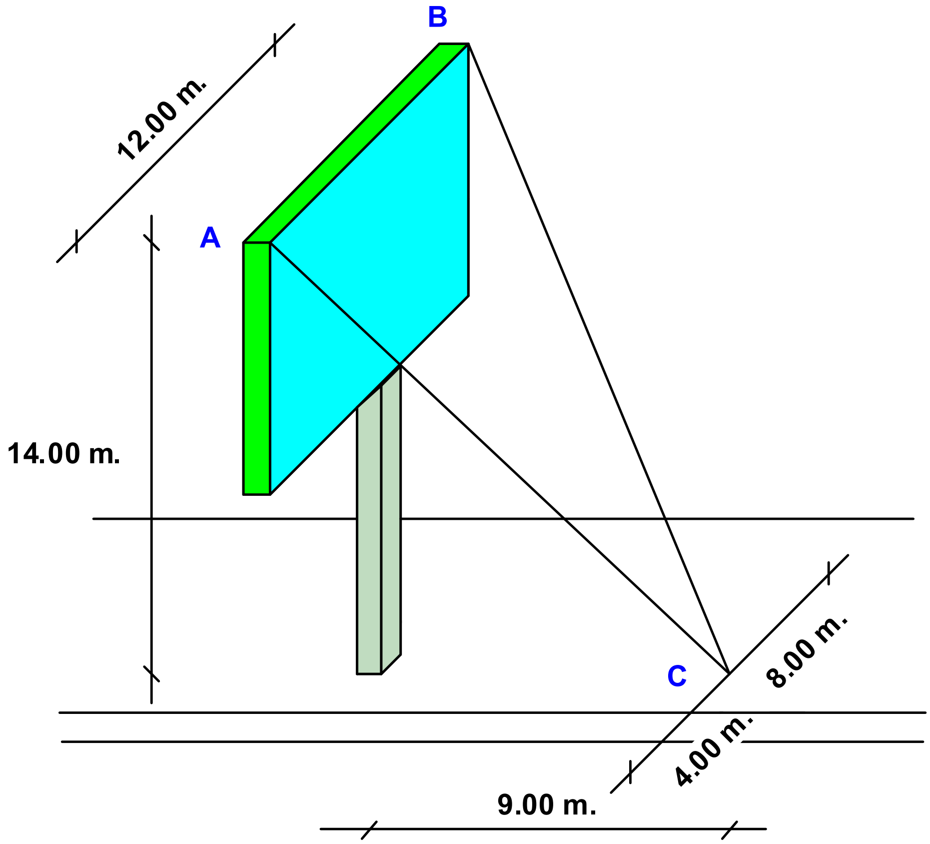



**FIGURA 92.**

- **Datos.**

  Tensión en el cable CA = 1200 N, tensión en el cable CB = 1600 N.

- **Objetivo.**

  Calcular la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables sobre el anclaje C.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes y magnitudes de los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ en el sentido indicado.

De la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{CA} = -(9\text{ m})\mathbf{i} + (14\text{ m})\mathbf{j} + (4\text{ m})\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{CB} = -(9\text{ m})\mathbf{i} + (14\text{ m})\mathbf{j} - (8\text{ m})\mathbf{k}$$

Lo que permite establecer las distancia de CA y CB de la siguiente manera.

$$CA = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$CA \quad \sqrt{(-9)^2 + (14)^2 + (4)^2}$$

$$CA = \sqrt{81 + 196 + 16}$$

$$CA = \sqrt{293}$$

$$\boldsymbol{CA = 1\ \ .117\ m.}$$

$$CB = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$CB = \sqrt{(-9)^2 + (14)^2 + (-8)^2}$$

$$CB = \sqrt{81 + 196 + 64}$$

$$CB = \sqrt{341}$$

$$\boldsymbol{CB = 18.466\ m.}$$

Al incluir el vector unitario λ se tendrá

$$T_{CA} = T_{CA}\lambda = T_{CA}\ \frac{\overrightarrow{CA}}{CA}$$

$$T_{CA} = T_{CA}\lambda = (1200\ N)\ \frac{\overrightarrow{CA}}{CA}$$

$$T_{CA} = T_{CA}\lambda = (1200N)\ \frac{\overrightarrow{CA}}{(17.117\ m.)}$$

$$T_{CA} = T_{CA}\lambda = (1200N)\ \frac{-(9\text{ m})\mathbf{i} + (14\text{ m})\mathbf{j} + (4\text{ m})\mathbf{k}}{(17.117\ m.)}$$

$$T_{CA} = -(630.951\ \text{N})\mathbf{i} + (981.480\ \text{N})\mathbf{j} + (280.422\ \text{N})\mathbf{k}$$

De igual manera con respecto a $T_{CB}$

$$T_{CB} = T_{CB}\lambda = T_{CB}\ \frac{\overrightarrow{CB}}{CB}$$

$$T_{CB} = T_{CB}\lambda = (1600\ N)\ \frac{\overrightarrow{CB}}{CB}$$

$$T_{CB} = T_{CB}\lambda = (1600N)\ \frac{\overrightarrow{CB}}{(18.466\ m.)}$$

$$T_{CB} = T_{CB}\lambda = (1600N)\ \frac{-(9\ \text{m})\mathbf{i} + (14\ \text{m})\mathbf{j} + (-8\ \text{m})\mathbf{k}}{(18.466\ m.)}$$

$$T_{CB} = -(779.811\ \text{N})\mathbf{i} + (1213.040\ \text{N})\mathbf{j} - (693.165\ \text{N})\mathbf{k}$$

b).- Calcular la resultante de las fuerzas.

La resultante de las fuerzas del sistema se determina de la siguiente forma

$$R = T_{CA} + T_{CB}$$

$$T_{CA} = -(630.951\ \text{N})\mathbf{i} + (981.480\ \text{N})\mathbf{j} + (280.422\ \text{N})\mathbf{k}$$

$$T_{CB} = -(779.811\ \text{N})\mathbf{i} + (1213.040\ \text{N})\mathbf{j} - (693.165\ \text{N})\mathbf{k}$$

$$R = -(1410.762\ \text{N})\mathbf{i} + (2194.520\ \text{N})\mathbf{j} - (412.743\ \text{N})\mathbf{k}$$

c).- Determinar la magnitud de la resultante R.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$R = \sqrt{(-1410.762)^2 + (2194.520)^2 + (-412.743)^2}$$

$$\boldsymbol{R = 2641.311\ N}$$

d).- Para determinar el valor de los ángulos directores $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$ que definen la dirección de la resultante, se tendrá.

$$\cos\Theta_x = \frac{R_x}{R}$$

$$\cos \Theta_x = \frac{-1410.762\ N}{2641.311\ N}$$

$$\cos \Theta_x = -0.534$$

$$\Theta_x = cos^{-1}\ (-0.534)$$

$$\Theta_x = \mathbf{122° \ 16'34''}$$

$$\cos \Theta_y = \frac{R_y}{R}$$

$$\cos \Theta_y = \frac{2194.520\ N}{2641.311\ N}$$

$$\cos \Theta_y = 0.830$$

$$\Theta_y = cos^{-1}\ (\ 0.830\ )$$

$$\Theta_y = \mathbf{33° \ 54'4.54''}$$

$$\cos \Theta_z = \frac{R_z}{R}$$

$$\cos \Theta_z = \frac{-412.743\ N}{2641.311\ N}$$

$$\cos \Theta_z = -0.156$$

$$\Theta_z = cos^{-1}\ (-0.156)$$

$$\Theta_z = \mathbf{98° \ 58'29.27''}$$

**Ejemplo de cálculo 3.-** El poste mostrado en la figura, se fija a tierra utilizando los tensores AB, AC, y, AD, cuyas tensiones son respectivamente 2500 N, 1800 N, y, 1000 N. Calcule la magnitud y dirección de la resultante de las tres fuerzas ejercidas por los cables.

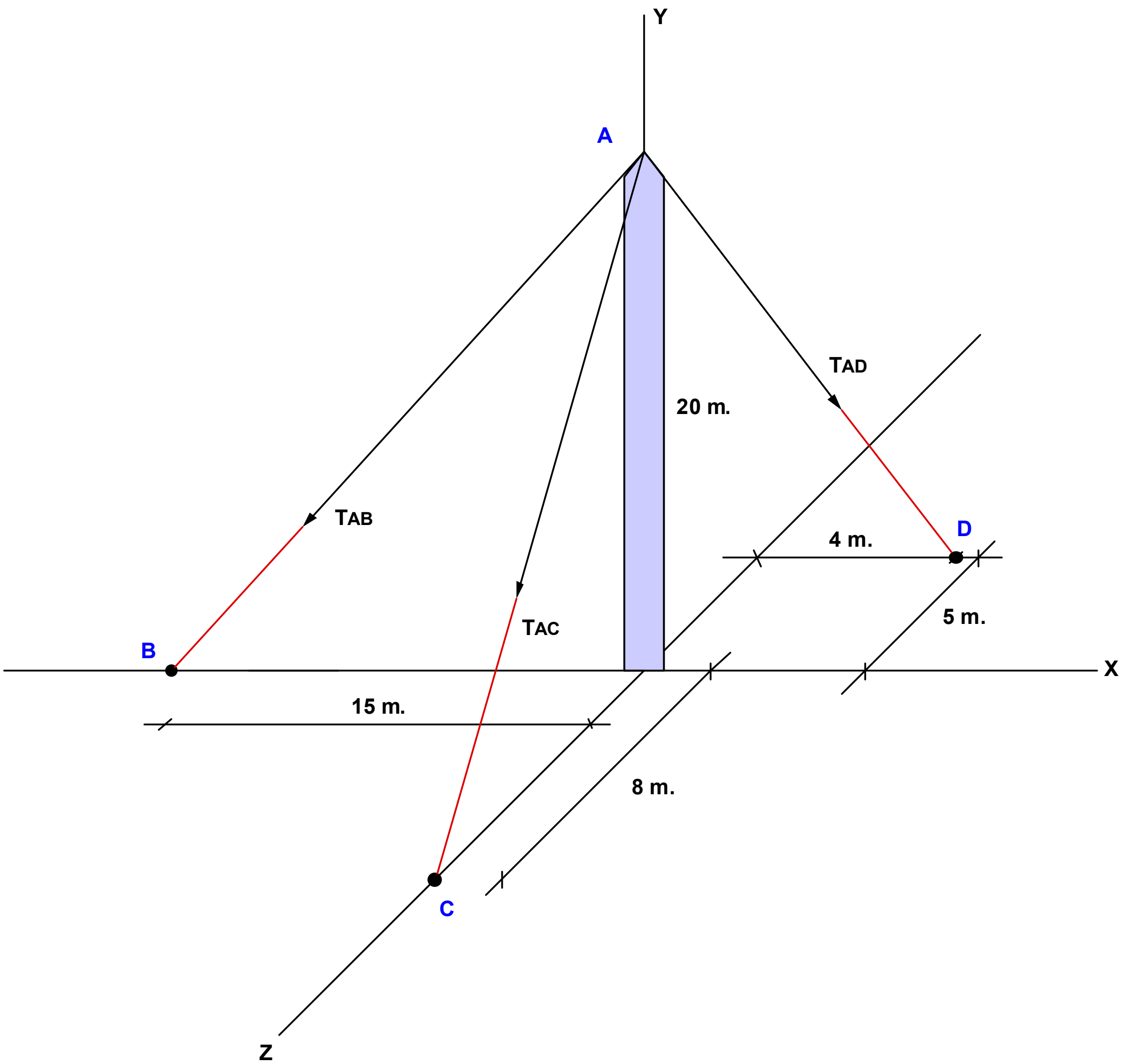



FIGURA 93.

- **Datos.**

  Tensiones en los cables: $T_{AB} = 2500\ N,\ T_{AC} = 1800\ N,\ T_{AD} = 1000\ N.$

- **Objetivo.**

  Calcular la magnitud y dirección de la resultante de las tres fuerzas ejercidas por los cables.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes y magnitudes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{AB} = -(15\text{ m})\mathbf{i} - (20\text{ m})\mathbf{j} + (0\text{ m})\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (0\text{ m})\mathbf{i} - (20\text{ m})\mathbf{j} + (8\text{ m})\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = +(4\text{ m})\mathbf{i} - (20\text{ m})\mathbf{j} - (5\text{ m})\mathbf{k}$$

Lo que permite establecer las distancia de AB, AC y, AD de la siguiente manera.

$$AB = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$AB = \sqrt{(-15)^2 + (-20)^2 + (0)^2}$$

$$AB \quad \sqrt{225 + 400 + 0}$$

$$AB \quad \sqrt{625}$$

$$\boldsymbol{AB = 2 \quad m.}$$

$$AC = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$AC = \sqrt{(0)^2 + (-20)^2 + (8)^2}$$

$$AC = \sqrt{0 + 400 + 64}$$

$$AC \quad \sqrt{464}$$

$$\boldsymbol{AC = 2 \ \ .540\ m.}$$

$$AD \quad \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$AD \quad \sqrt{(4)^2 + (-20)^2 + (-5)^2}$$

$$AD \quad \sqrt{16 + 400 + 25}$$

$$AD \quad \sqrt{441}$$

$$\boldsymbol{AD = 2 \ \ .00\ m.}$$

Al incluir el vector unitario λ se tendrá

$$T_{AB} = T_{AB}\lambda = T_{AB}\,\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

$$T_{AB} = T_{AB}\lambda = (2500\ N)\ \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

$$T_{AB} = T_{AB}\lambda = (2500N)\ \frac{\overrightarrow{AB}}{(25\ m.)}$$

$$T_{AB} = T_{AB}\lambda = (2500N)\ \frac{-(15\ \mathrm{m})\mathbf{i} - (20\ \mathrm{m})\mathbf{j} + (0\ \mathrm{m})\mathbf{k}}{(25\ m.)}$$

$$T_{AB} = -(1500\ \mathrm{N})\mathbf{i} - (2000\ \mathrm{N})\mathbf{j} + (0\ \mathrm{N})\mathbf{k}$$

De igual manera con respecto a $T_{AC}$

$$T_{AC} = T_{AC}\lambda = T_{AC}\ \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$T_{AC} = T_{AC}\lambda = (1800\ N)\ \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$T_{AC} = T_{AC}\lambda = (1800N)\ \frac{\overrightarrow{AC}}{(21.540\ m.)}$$

$$T_{AC} = T_{AC}\lambda = (1800N)\ \frac{(0\ \mathrm{m})\mathbf{i} - (20\ \mathrm{m})\mathbf{j} + (8\ \mathrm{m})\mathbf{k}}{(21.540\ m.)}$$

$$T_{AC} = (0\ \mathrm{N})\mathbf{i} - (1671.309\ \mathrm{N})\mathbf{j} + (668.523\ \mathrm{N})\mathbf{k}$$

Con respecto a $T_{AD}$

$$T_{AD} = T_{AD}\lambda = T_{AD}\ \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$$

$$T_{AD} = T_{AD}\lambda = (1000\ N)\ \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$$

$$T_{AD} = T_{AD}\lambda = (1000N)\ \frac{\overrightarrow{AD}}{(21.000\ m.)}$$

$$T_{AD} = T_{AD}\lambda = (1000N)\ \frac{(4\ m)\mathbf{i} - (20\ m)\mathbf{j} - (5\ m)\mathbf{k}}{(21.000\ m.)}$$

$$T_{AD} = (190.476\text{ N})\mathbf{i} - (952.380\text{ N})\mathbf{j} - (238.095\text{ N})\mathbf{k}$$

b).- Calcular la resultante de las fuerzas.

La resultante de las fuerzas del sistema se determina de la siguiente forma

$$R = T_{AB} + T_{AC} + T_{AD}$$

$$T_{AB} = -(1500\text{ N})\mathbf{i} - (2000\text{ N})\mathbf{j} + (0\text{ N})\mathbf{k}$$

$$T_{AC} = (0\text{ N})\mathbf{i} - (1671.309\text{ N})\mathbf{j} + (668.523\text{ N})\mathbf{k}$$

$$T_{AD} = (190.476\text{ N})\mathbf{i} - (952.380\text{ N})\mathbf{j} - (238.095\text{ N})\mathbf{k}$$

$$R = -(1309.524\text{ N})\mathbf{i} - (4623.689\text{ N})\mathbf{j} + (430.428\text{ N})\mathbf{k}$$

c).- Determinar la magnitud de la resultante R.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$R = \sqrt{(-1309.524)^2 + (-4623.689)^2 + (430.428)^2}$$

$$\boldsymbol{R = 4824.792\ N}$$

d).- Para determinar el valor de los ángulos directores $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$ que definen la dirección de la resultante, se tendrá.

$$\cos\Theta_x = \frac{R_x}{R}$$

$$\cos\Theta_x = \frac{-1309.524\ N}{4824.792\ N}$$

$$\cos\Theta_x = -0.271$$

$$\Theta_x = cos^{-1}(-0.271)$$

$$\boldsymbol{\Theta_x = 105°\ 43'25.6''}$$

$$\cos\Theta_y = \frac{R_y}{R}$$

$$\cos\Theta_y = \frac{-\ 4623.689\ N}{4824.792\ N}$$

$$\cos\Theta_y = -0.958$$

$$\Theta_y = cos^{-1}\,(-0.958\,)$$

$$\boldsymbol{\Theta_y = 163° \, 20'7.54''}$$

$$\cos\Theta_z = \frac{R_z}{R}$$

$$\cos\Theta_z = \frac{430.428\,N}{4824.792\,N}$$

$$\cos\Theta_z = 0.0892$$

$$\Theta_z = cos^{-1}\,(\,0.0892)$$

$$\boldsymbol{\Theta_z = 84° \, 52'56.69''}$$

**Ejemplo de cálculo 4.-** La repisa mostrada en la figura está sostenida por las cuerdas QP y RP, cuyas tensiones son 800 lb, y 600 lb, respectivamente. Determine la magnitud y dirección de la resultante del sistema en P.

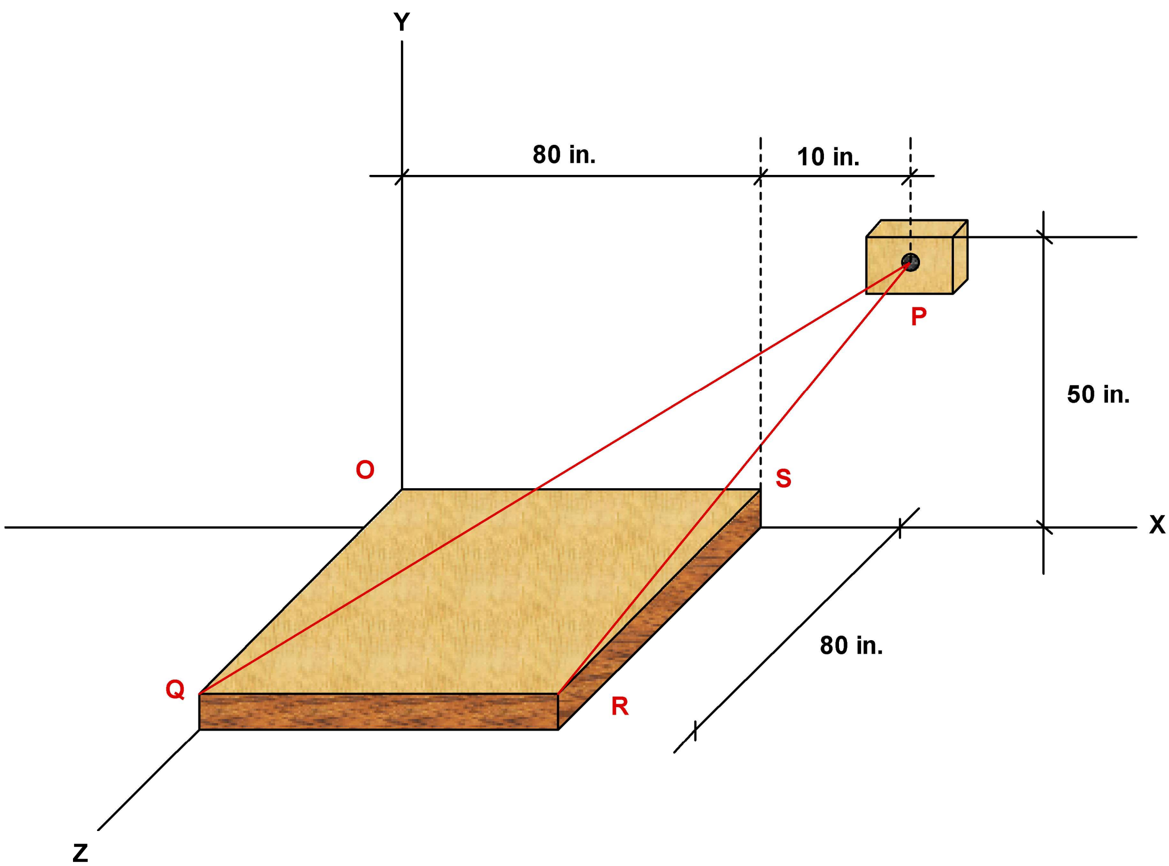



**FIGURA 94.**

- **Datos.**

  Tensiones en las cuerdas: $T_{QP} = 800\ lb,\ T_{RP} = 600\ lb$

- **Objetivo.**

  Determinar la magnitud y dirección de la resultante de las dos fuerzas ejercidas por las cuerdas en P.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes y magnitudes de los vectores $\overrightarrow{QP}\ \overrightarrow{RP}$, de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{QP} = -(90\ \mathrm{in})\mathbf{i} - (50\ \mathrm{in})\mathbf{j} + (80\ \mathrm{in})\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{RP} = -(10\ \mathrm{in})\mathbf{i} - (50\ \mathrm{in})\mathbf{j} + (80\ \mathrm{in})\mathbf{k}$$

Lo que permite establecer las distancia de AB, AC y, AD de la siguiente manera.

$$QP = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$QP \quad \sqrt{(-90)^2 + (-50)^2 + (80)^2}$$

$$QP \quad \sqrt{8100 + 2500 + 6400}$$

$$QP \quad \sqrt{17000}$$

$$\boldsymbol{QP = 13\ \ .384\ in.}$$

$$RP = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$RP = \sqrt{(-10)^2 + (-50)^2 + (80)^2}$$

$$RP = \sqrt{100 + 2500 + 6400}$$

$$RP \quad \sqrt{9000}$$

$$\boldsymbol{RP = 9\ \ .868\ in.}$$

Al incluir el vector unitario λ se tendrá

$$T_{QP} = T_{QP}\lambda = T_{QP}\ \frac{\overrightarrow{QP}}{QP}$$

$$T_{QP} = T_{QP}\lambda = (800\ lb)\ \frac{\overrightarrow{QP}}{QP}$$

$$T_{QP} = T_{QP}\lambda = (800\ lb\ \ \frac{\overrightarrow{QP}}{(130.384\ \ in.)}$$

$$T_{QP} = T_{QP}\lambda = (800\ lb\ \ \frac{-(90\ \mathrm{in})\mathbf{i} - (50\ \mathrm{in})\mathbf{j} + (80\ \mathrm{in})\mathbf{k}}{(130.384\ in.)}$$

$$T_{QP} = -(552.214\ lb)\mathbf{i} - (306.786\ lb)\mathbf{j} + (490.857\ lb)\mathbf{k}$$

De igual manera con respecto a $T_{RP}$

$$T_{RP} = T_{RP}\lambda = T_{RP}\ \frac{\overrightarrow{RP}}{RP}$$

$$T_{RP} = T_{RP}\lambda = (600\ in)\ \frac{\overrightarrow{RP}}{RP}$$

$$T_{RP} = T_{RP}\lambda = (600\ lb\ \ \frac{\overrightarrow{RP}}{(94.868\ in.)}$$

$$T_{RP} = T_{RP}\lambda = (600\ lb)\ \frac{(-10\ in)\mathbf{i} - (50\ in)\mathbf{j} + (80\ in)\mathbf{k}}{(94.868\ in.)}$$

$$T_{RP} = -(63.245\ lb)\mathbf{i} - (316.228\ lb)\mathbf{j} + (505.966\ lb)\mathbf{k}$$

b).- Calcular la resultante de las fuerzas.

La resultante de las fuerzas del sistema se determina de la siguiente forma

$$R = T_{QP} + T_{RP}$$

$$T_{QP} = -(552.214\ lb)\mathbf{i} - (306.786\ lb)\mathbf{j} + (490.857\ lb)\mathbf{k}$$

$$T_{RP} = -(63.245\ lb)\mathbf{i} - (316.228\ lb)\mathbf{j} + (505.966\ lb)\mathbf{k}$$

$$R = -(615.459\ lb)\mathbf{i} - (623.014\ lb)\mathbf{j} + (996.823\ lb)\mathbf{k}$$

c).- Determinar la magnitud de la resultante R.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$R = \sqrt{(-615.459)^2 + (-623.014)^2 + (996.823)^2}$$

$$\boldsymbol{R = 1326.873\ lb}$$

d).- Para determinar el valor de los ángulos directores $\Theta_x$ , $\Theta_y$ , $\Theta_z$ que definen la dirección de la resultante, se tendrá.

$$\cos\Theta_x = \frac{R_x}{R}$$

$$\cos\Theta_x = \frac{-615.459\ lb}{1326.873\ lb}$$

$$\cos\Theta_x = -0.463$$

$$\Theta_x = cos^{-1}\ (-0.463)$$

$$\boldsymbol{\Theta_x = 117°\ 34'51.1''}$$

$$\cos\Theta_y = \frac{R_y}{R}$$

$$\cos\Theta_y = \frac{-623.014\ lb}{1326.873\ lb}$$

$$\cos\Theta_y = -0.469$$

$$\Theta_y = cos^{-1}\ (-0.469\ )$$

$$\boldsymbol{\Theta_y = 117°\ 58'9.85''}$$

$$\cos\Theta_z = \frac{R_z}{R}$$

$$\cos\Theta_z = \frac{996.823\ lb}{1326.873\ lb}$$

$$\cos\Theta_z = 0.751$$

$$\Theta_z = cos^{-1}\ (0.751)$$

$$\boldsymbol{\Theta_z = 41°\ 19'22.53''}$$

### 2.4.5 EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO.

Las condiciones necesarias y suficientes que permiten determinar el equilibrio estático de una partícula en sistemas referenciales espaciales, se fundamentan en la aplicación de las siguientes ecuaciones, denominadas “ecuaciones del equilibrio”.

$$\text{a)}\ \sum Fx = 0 \qquad \textit{(15)}$$

Esta ecuación de equilibrio manifiesta que, la resultante de todas las componentes de las fuerzas del sistema que actúan sobre una partícula en sentido del eje “x” en relación a su sistema de referencia, tiene que ser igual a cero.

$$b)\ \sum Fy = 0 \qquad \textit{(16)}$$

Esta ecuación de equilibrio manifiesta que, la resultante de todas las componentes de las fuerzas del sistema que actúan sobre una partícula en sentido del eje “y” en relación a su sistema de referencia, tiene que ser igual a cero.

$$c)\ \sum Fz = 0 \qquad \textit{(17)}$$

Esta ecuación de equilibrio manifiesta que, la resultante de todas las componentes de las fuerzas del sistema que actúan sobre una partícula en sentido del eje “z” en relación a su sistema de referencia, tiene que ser igual a cero.

Cuando las tres ecuaciones se satisfacen de manera simultánea, se dirá entonces que la partícula se encuentra en equilibrio, es importante indicar además que en problemas relacionados no pueden intervenir más de tres incógnitas.

Cuando se trate de resolver ejercicios de aplicación, los casos más comunes serán: determinar las tres componentes de una misma fuerza, o el cálculo de la magnitud de tres fuerzas, cada una con dirección conocida.

### 2.4.6 RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO.

**Ejemplo de cálculo 1.-** El bloque Q cuya masa es de 400 kg se sostiene mediante la acción de dos cuerdas CA y CB como se muestra en la figura, mediante la aplicación de una fuerza horizontal F mantiene la posición mostrada. Calcule la magnitud de F para mantener el sistema en equilibrio y el valor de las tensiones en las cuerdas.

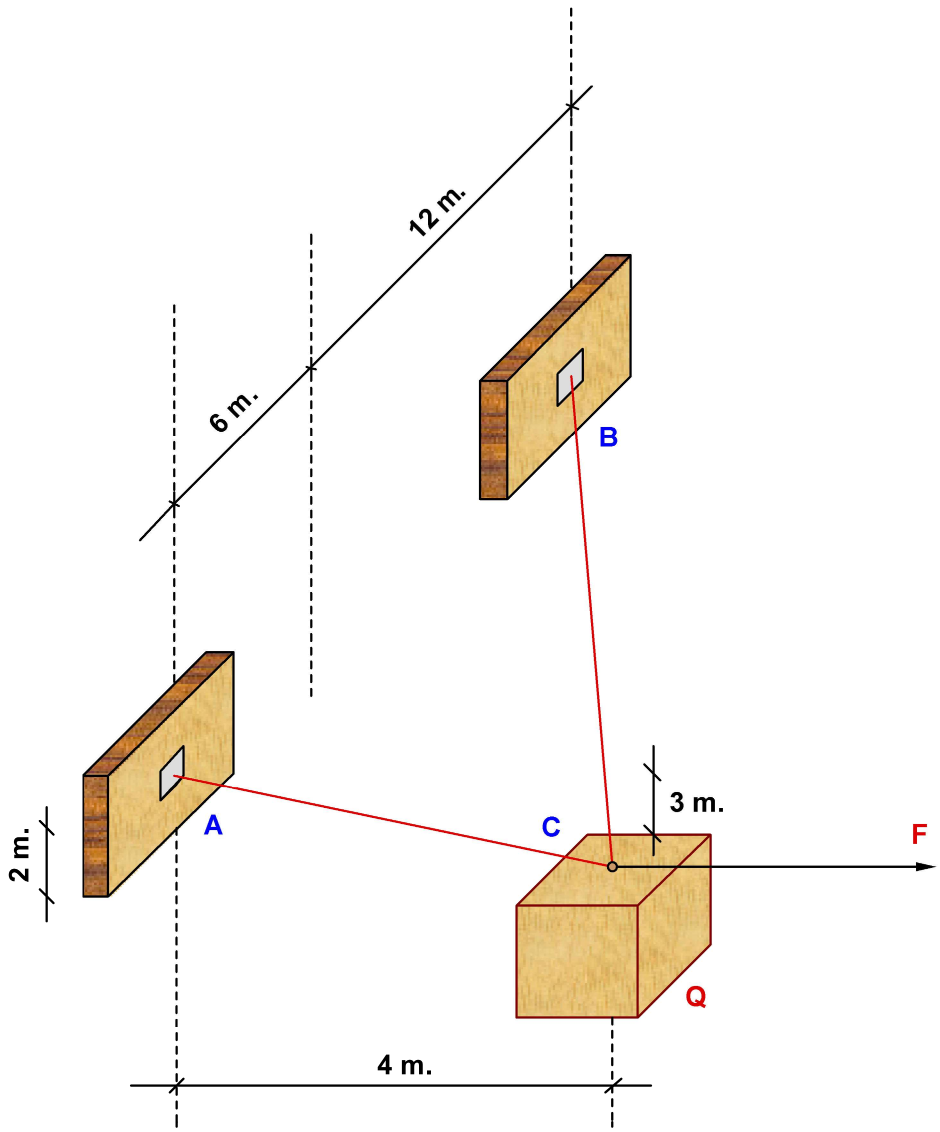



**FIGURA 95.**

- **Datos.**

  Masa del cuerpo suspendido Q = 400 kg.

- **Objetivo.**

  Calcular la magnitud de las tensiones CA y CB, y la magnitud de la fuerza horizontal F.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes de los vectores $\overrightarrow{CA}\ y\ \overrightarrow{CB}$ del sistema, en función de sus unitarios a lo largo de las líneas CA y CB del sistema.

$$\overrightarrow{CA} = -(4\ \mathrm{m})\mathbf{i} + (5\ \mathrm{m})\mathbf{j} + (6\ \mathrm{m})\mathbf{k}$$

$$CA = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$CA = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2 + (6)^2}$$

$$CA = \sqrt{16 + 25 + 36}$$

$$CA = \sqrt{77}$$

$$\boldsymbol{CA = 8.774\ m.}$$

$$\boldsymbol{T_{CA}} = T_{CA}\lambda_{CA} = T_{CA}\ \frac{\overrightarrow{CA}}{CA}$$

$$\boldsymbol{T_{CA}} = T_{CA}\lambda_{CA} = \frac{-(4\ \mathrm{m})T_{CA}\mathbf{i} + (5\ \mathrm{m})T_{CA}\mathbf{j} + (6\ \mathrm{m})T_{CA}\mathbf{k}}{(8.774\ \mathrm{m})}$$

$$\boldsymbol{T_{CA}} = -(0.455\ )T_{CA}\mathbf{i} + (0.569\ )T_{CA}\mathbf{j} + (0.683\ )T_{CA}\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{CB} = -(4\ \mathrm{m})\mathbf{i} + (5\ \mathrm{m})\mathbf{j} + (-12\ \mathrm{m})\mathbf{k}$$

$$CB = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$CB = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2 + (-12)^2}$$

$$CB = \sqrt{16 + 25 + 144}$$

$$CB = \sqrt{185}$$

$$\boldsymbol{CB = 13.601\ m.}$$

$$\boldsymbol{T_{CB}} = T_{CB}\lambda_{CB} = T_{CB}\ \frac{\overrightarrow{CB}}{CB}$$

$$\boldsymbol{T_{CB}} = T_{CB}\lambda_{CB} = \frac{-(4\text{ m})T_{CB}\mathbf{i} + (5\text{ m})T_{CB}\mathbf{j} + (-12\text{ m})T_{CB}\mathbf{k}}{(13.601\text{ m})}$$

$$\boldsymbol{T_{CB}} = -(0.294\ )T_{CB}\mathbf{i} + (0.367\ )T_{CB}\mathbf{j} - (0.882\ )T_{CB}\mathbf{k}$$

b).- En relación al peso del bloque Q cuya masa es de 400 kg se tendrá.

Como el peso está dado por la relación $P = mg$.

$$P = mg$$

$$P = (400\ kg)(9.81\frac{m}{seg^2})$$

$$\boldsymbol{P = 3924\ N}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{P} = (0\text{ N})\text{P}\mathbf{i} - (3924\text{ N})\text{P}\mathbf{j} + (0\text{ N})\text{P}\mathbf{k}$$

c).- En relación a la fuerza horizontal F se tendrá.

$$\mathbf{F} = \text{F}\mathbf{i} + (0\text{ N})\text{F}\mathbf{j} + (0\text{ N})\text{F}\mathbf{k}$$

d).- Por lo antes expuesto las ecuaciones de equilibrio son

$$1)\ \sum Fx = -0.455T_{CA} - 0.294T_{CB} + F = 0$$

$$2)\ \sum Fy \quad 0.569T_{CA} + 0.367T_{CB} - 3924 = 0$$

$$3)\ \sum Fz = 0.683T_{CA} - 0.882T_{CB} = 0$$

e).- Resolviendo el sistema

$$T_{CA} = \frac{0.882}{0.683}T_{CB} = 1.291T_{CB} \qquad en\ 2)$$

$$0.569(\ 1.291T_{CB}) + 0.367\ T_{CB} - 3924 = 0$$

$$0.734\ T_{CB} + 0.367\ T_{CB} = 3924$$

$$1.101\, T_{CB} = 3924$$

$$\boldsymbol{T_{CB} = 3564.032\ N}$$

$$T_{CA} = 1.291\, T_{CB}$$

$$T_{CA} = 1.291\ (\ 3564.032\ N\ )$$

$$\boldsymbol{T_{CA} = 4601.165\ N}$$

$$F = 0.455\ (\ 4601.165\ N) + 0.294\ (\ 3564.032\ N)$$

$$\boldsymbol{F = 3141.355\ N}$$

**Ejemplo de cálculo 2.-** La carga mostrada en la figura, se sostiene mediante las cuerdas PA, PB, y PC, si se conoce que la tensión en la cuerda PB es de 1200 N. Determine el peso de la carga.

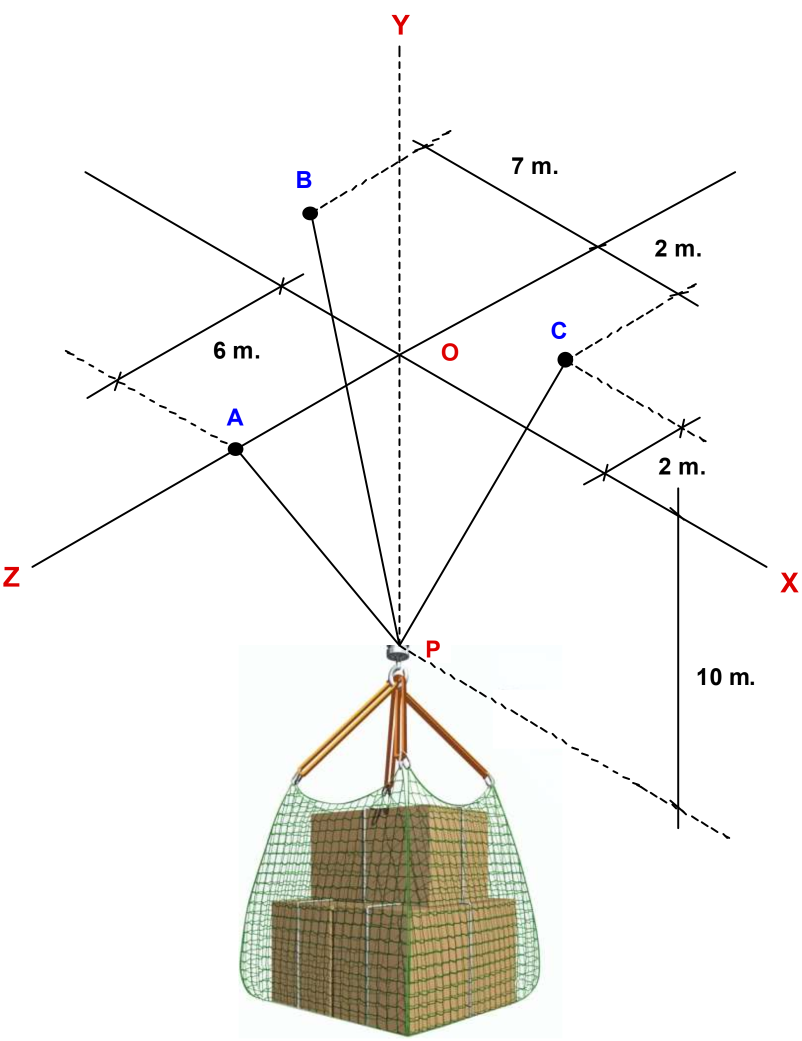



FIGURA 96.

- **Datos.**

  Tensión en la cuerda PB = 1200N.

- **Objetivo.**

  Determinar el peso de la carga mostrada en el sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes de los vectores $\overrightarrow{PA}$ ,$\overrightarrow{PB}$, y, $\overrightarrow{PC}$, en función de sus unitarios a lo largo de las líneas PA, PB y PC del sistema.

$$\overrightarrow{PA} = (0\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} + (6\text{ m})\mathbf{k}$$

$$PA = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$PA \quad \sqrt{(0)^2 + (10)^2 + (6)^2}$$

$$PA \quad \sqrt{0 + 100 + 36}$$

$$PA \quad \sqrt{136}$$

$$\boldsymbol{PA = 11.661\ m.}$$

$$\boldsymbol{T_{PA}} = T_{PA}\lambda_{PA} = T_{PA}\,\frac{\overrightarrow{PA}}{PA}$$

$$\boldsymbol{T_{PA}} = T_{PA}\lambda_{PA} = \frac{(0\text{ m})T_{PA}\mathbf{i} + (10\text{ m})T_{PA}\mathbf{j} + (6\text{ m})T_{PA}\mathbf{k}}{(11.661\text{ m})}$$

$$\boldsymbol{T_{PA}} = (0)T_{PA}\mathbf{i} + (0.857)T_{PA}\mathbf{j} + (0.514)T_{PA}\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PB} = -(7\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} - (2\text{ m})\mathbf{k}$$

$$PB = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$PB \quad \sqrt{(-7)^2 + (10)^2 + (-2)^2}$$

$$PB \quad \sqrt{49 + 100 + 4}$$

$$PB \quad \sqrt{153}$$

$$\boldsymbol{PB \qquad .369\ m.}$$

$$\boldsymbol{T_{PB}} = T_{PB}\lambda_{PB} = T_{PB}\ \frac{\overrightarrow{PB}}{PB}$$

$$\boldsymbol{T_{PB}} = T_{PB}\lambda_{PB} = \frac{(-7\text{ m})T_{PB}\mathbf{i} + (10\text{ m})T_{PB}\mathbf{j} - (2\text{ m})T_{PB}\mathbf{k}}{(12.369\text{ m})}$$

$$\boldsymbol{T_{PB}} = -(0.565)T_{PB}\mathbf{i} + (0.808\ )T_{PB}\mathbf{j} - (0.161\ )T_{PB}\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PC} = (2\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} - (2\text{ m})\mathbf{k}$$

$$PC \quad \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$PC \quad \sqrt{(2)^2 + (10)^2 + (-2)^2}$$

$$PC \quad \sqrt{4 + 100 + 4}$$

$$PC \quad \sqrt{108}$$

$$\boldsymbol{PC = 10.392\ m.}$$

$$\boldsymbol{T_{PC}} = T_{PC}\lambda_{PC} = T_{PC}\ \frac{\overrightarrow{PC}}{PC}$$

$$\boldsymbol{T_{PC}} = T_{PC}\lambda_{PC} = \frac{(2\text{ m})T_{PC}\mathbf{i} + (10\text{ m})T_{PC}\mathbf{j} - (2\text{ m})T_{PC}\mathbf{k}}{(10.392\text{ m})}$$

$$\boldsymbol{T_{PC}} = (0.192)T_{PC}\mathbf{i} + (0.962\ )T_{PC}\mathbf{j} - (0.192\ )T_{PC}\mathbf{k}$$

b).- Por lo antes expuesto las ecuaciones de equilibrio son.

$$1)\ \sum Fx = -0.565T_{PB} + 0.192T_{PC} = 0$$

$$2)\ \sum Fy = 0.857T_{PA} + 0.808T_{PB} + 0.962T_{PC} - P = 0$$

$$3)\ \sum Fz = 0.514T_{PA} - 0.161T_{PB} - 0.192T_{PC} = 0$$

c).- Resolviendo el sistema y considerando que tensión en la cuerda PB = 1200N, se tendrá.

De 1)

$$-0.565(1200N) + 0.192T_{PC} = 0$$

$$T_{PC} = \frac{678N}{0.192}$$

$$\boldsymbol{T_{PC} = 3531.250\ N}$$

Reemplazando en la tercera ecuación los valores de $T_{PB}$ $y$ $T_{PC}$, se obtiene.

$$0.514T_{PA} - 0.161(1200\ N) - 0.192(3531.250\ N) = 0$$

$$0.514T_{PA} = 871.2\ N$$

$$T_{PA} = \frac{871.2N}{0.514}$$

$$\boldsymbol{T_{PA} = 1694.941\ N}$$

Para el cálculo de P tenemos, de la segunda ecuación.

$$0.857(1694.941\ N) + 0.808(1200\ N) + 0.962(3531.250\ N) - P = 0$$

$$\boldsymbol{P = 5819.226\ N}$$

**Ejemplo de cálculo 3.-** La carga mostrada en la figura 94, se sostiene mediante las cuerdas PA, PB, y PC, si se conoce que la tensión en la cuerda PA es de 2000 N. Halle el peso de la carga.

- **Datos.**

  Tensión en la cuerda PA = 2000N.

- **Objetivo.**

  Hallar el peso de la carga mostrada en el sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes de los vectores $\overrightarrow{PA}$ ,$\overrightarrow{PB}$, y, $\overrightarrow{PC}$, en función de sus unitarios a lo largo de las líneas PA, PB y PC del sistema.

$$\overrightarrow{PA} = (0\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} + (6\text{ m})\mathbf{k}$$

$$PA = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$PA \quad \sqrt{(0)^2 + (10)^2 + (6)^2}$$

$$PA \quad \sqrt{0 + 100 + 36}$$

$$PA = \sqrt{136}$$

$$\boldsymbol{PA = 11.661\ m.}$$

$$\overrightarrow{PB} = -(7\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} - (2\text{ m})\mathbf{k}$$

$$PB \quad \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$PB \quad \sqrt{(-7)^2 + (10)^2 + (-2)^2}$$

$$PB \quad \sqrt{49 + 100 + 4}$$

$$PB = \sqrt{153}$$

$$\boldsymbol{PB = 1\ \ .369\ m.}$$

$$\boldsymbol{T_{PB}} = T_{PB}\lambda_{PB} = T_{PB}\ \frac{\overrightarrow{PB}}{PB}$$

$$\boldsymbol{T_{PB}} = T_{PB}\lambda_{PB} = \frac{(-7\text{ m})T_{PB}\mathbf{i} + (10\text{ m})T_{PB}\mathbf{j} - (2\text{ m})T_{PB}\mathbf{k}}{(12.369\text{ m})}$$

$$\boldsymbol{T_{PB}} = -(0.565)T_{PB}\mathbf{i} + (0.808\ )T_{PB}\mathbf{j} - (0.161\ )T_{PB}\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PC} = (2\text{ m})\mathbf{i} + (10\text{ m})\mathbf{j} - (2\text{ m})\mathbf{k}$$

$$PC \quad \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$PC \quad \sqrt{(2)^2 + (10)^2 + (-2)^2}$$

$$PC = \sqrt{4 + 100 + 4}$$

$$PC \quad \sqrt{108}$$

$$\boldsymbol{PC = 1\ \ .392\ m.}$$

$$\boldsymbol{T_{PC}} = T_{PC}\lambda_{PC} = T_{PC}\ \frac{\overrightarrow{PC}}{PC}$$

$$\boldsymbol{T_{PC}} = T_{PC}\lambda_{PC} = \frac{(2\text{ m})T_{PC}\mathbf{i} + (10\text{ m})T_{PC}\mathbf{j} - (2\text{ m})T_{PC}\mathbf{k}}{(10.392\text{ m})}$$

$$\boldsymbol{T_{PC}} = (0.192)T_{PC}\mathbf{i} + (0.962\,)T_{PC}\mathbf{j} - (0.192\,)T_{PC}\mathbf{k}$$

b).- Por lo antes expuesto las ecuaciones de equilibrio son.

$$1)\ \sum Fx \quad -0.565T_{PB} + 0.192T_{PC} = 0$$

$$2)\ \sum Fy = 0.857T_{PA} + 0.808T_{PB} + 0.962T_{PC} - P = 0$$

$$3)\ \sum Fz \quad 0.514T_{PA} - 0.161T_{PB} - 0.192T_{PC} = 0$$

c).- Resolviendo el sistema y considerando que tensión en la cuerda PA = 2000N, se tendrá.

De 3)

$$0.514(2000\ N) - 0.161T_{PB} - 0.192T_{PC} = 0$$

$$1028\ N - 0.161T_{PB} - 0.192T_{PC} = 0$$

Despejando de la primera ecuación $T_{PC}$ y sustituyendo en la anterior se logra.

$$T_{PC} = \frac{0.565T_{PB}}{0.192}$$

$$T_{PC} = 2.942T_{PB}$$

$$1028\ N - 0.161T_{PB} - 0.192(2.942T_{PB}) = 0$$

$$1028\ N - 0.161T_{PB} - 0.564T_{PB} = 0$$

$$1028\ N - 0.725T_{PB} = 0$$

$$T_{PB} = \frac{1028\ N}{0.725}$$

$$\boldsymbol{T_{PB} = 1417.931\ N}$$

$$T_{PC} = 2.942T_{PB}$$

$$T_{PC} = 2.942(1417.931\ N)$$

$$\boldsymbol{T_{PC} = 4171.553\ N}$$

Para la determinación del peso se tiene sustituyendo en 2)

$$0.857T_{PA} + 0.808T_{PB} + 0.962T_{PC} - P = 0$$

$$0.857(2000\ N) + 0.808(1417.931\ N) + 0.962(4171.553\ N) - P = 0$$

$$1714\ N + 1145.688\ N) + 4013.033\ N) - P = 0$$

$$\boldsymbol{P = 687\ \ .721\ N}$$

**Ejemplo de cálculo 4.-** La carga mostrada en la figura 94, se sostiene mediante las cuerdas PA, PB, y PC, si se conoce que la tensión en la cuerda PC es de 1800 N. determine el peso de la carga.

- **Datos.**

  Tensión en la cuerda PC = 1800N.

- **Objetivo.**

  Determinar el peso de la carga mostrada en el sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**
  a).- Como las ecuaciones del equilibrio no varían, se muestra la resolución del sistema de ecuaciones de equilibrio.

$$1)\ \ \sum Fx = \ -0.565T_{PB} + 0.192T_{PC} = 0$$

$$2)\ \ \sum Fy = \ 0.857T_{PA} + 0.808T_{PB} + 0.962T_{PC} - P = 0$$

$$3)\ \ \sum Fz \qquad 0.514T_{PA} - 0.161T_{PB} - 0.192T_{PC} = 0$$

Reemplazando el valor dato de la tensión en la ecuación 1)

$$-0.565T_{PB} + 0.192(1800\ N) = 0$$

$$-0.565T_{PB} + 345.600\ N = 0$$

$$T_{PB} = \frac{345.600\ N}{0.565}$$

$$\boldsymbol{T_{PB} = 61\ \ .681\ N}$$

Sustituyendo en 3)

$$0.514T_{PA} - 0.161(611.681\ N) - 0.192(1800\ N) = 0$$

$$0.514T_{PA} - 98.480\ N - 345.600\ N = 0$$

$$0.514T_{PA} - 444.08\ N = 0$$

$$T_{PA} = \frac{444.08\ N}{0.514}$$

$$\boldsymbol{T_{PA} = 836.968\ N}$$

Para la determinación del peso reemplazando ahora en 2)

$$0.857(836.968\ N) + 0.808(611.681\ N) + 0.962(1800\ N) - P = 0$$

$$717.281\ N + 494.238\ N + 1731.600\ N - P = 0$$

$$2943.119\ N - P = 0$$

$$\boldsymbol{P = 2943.119\ N}$$

**Ejemplo de cálculo 5.-** La carga mostrada en la figura 94, se sostiene mediante las cuerdas PA, PB, y PC, si se conoce que el peso de la carga es de 5000 N. Calcule las tensiones en las cuerdas.

- **Datos.**

  Peso de la carga mostrada P = 5000N.

- **Objetivo.**

  Calcular las tensiones de las cuerdas PA, PB, y PC.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Como las ecuaciones del equilibrio no varían, se muestra la resolución del sistema de ecuaciones de equilibrio.

$$\text{1)}\ \ \sum Fx = -0.565T_{PB} + 0.192T_{PC} = 0$$

$$\text{2)}\ \ \sum Fy = 0.857T_{PA} + 0.808T_{PB} + 0.962T_{PC} - P = 0$$

$$\text{3)}\ \ \sum Fz = 0.514T_{PA} - 0.161T_{PB} - 0.192T_{PC} = 0$$

Por lo tanto, incluyendo el valor del peso P de la carga, la segunda ecuación queda

$$\text{2)}\ \ \sum Fy = 0.857T_{PA} + 0.808T_{PB} + 0.962T_{PC} - 5000\ N = 0$$

Despejando de 1) PB en función de PC

$$-0.565T_{PB} + 0.192T_{PC} = 0$$

$$T_{PB} = \frac{0.192T_{PC}}{0.565}$$

Sustituyendo este valor en 2) y 3) respectivamente

$$2)\quad \sum Fy = 0.857T_{PA} + 0.808\left(\frac{0.192}{0.565}T_{PC}\right) + 0.962\,T_{PC} - 5000\,N = 0$$

$$3)\quad \sum Fz = 0.514T_{PA} - 0.161\,(\frac{0.192}{0.565}T_{PC}) - 0.192T_{PC} = 0$$

$$2)\quad \sum Fy = 0.857T_{PA} + 0.274\,T_{PC} + 0.962\,T_{PC} - 5000\,N = 0$$

$$3)\quad \sum Fz = 0.514T_{PA} - 0.0547T_{PC} - 0.192T_{PC} = 0$$

$$2)\quad \sum Fy = 0.857T_{PA} + 1.236\,T_{PC} - 5000\,N = 0$$

$$3)\quad \sum Fz = 0.514T_{PA} - 0.246T_{PC} = 0$$

Despejando de 3) $T_{PA}$ en función de $T_{PC}$

$$T_{PA} = \frac{0.245T_{PC}}{0.514}$$

Y sustituyendo en 2)

$$0.857\frac{0.245T_{PC}}{0.514} + 1.236\,T_{PC} - 5000\,N = 0$$

$$0.406T_{PC} + 1.236\,T_{PC} - 5000\,N = 0$$

$$1.642\,T_{PC} - 5000\,N = 0$$

$$T_{PC} = \frac{5000\,N}{1.642}$$

$$\boldsymbol{T_{PC} = 3045.066\,N}$$

$$T_{PA} = \frac{0.245T_{PC}}{0.514}$$

$$T_{PA} = \frac{0.245(3045.066)}{0.514}$$

$$\boldsymbol{T_{PA} = 1451.441\,N}$$

$$T_{PB} = \frac{0.192(3045.066)}{0.565}$$

$$T_{PB} = 10\quad .783\ N$$

**Ejemplo de cálculo 6.-** Un globo aerostático de observación está anclado mediante tres cuerdas en B, C, y, D como se muestra en la figura. Determine la magnitud de la fuerza vertical F ejercida por el globo en el punto A, si se conoce que la tensión en la cuerda AD es igual a 400 N.

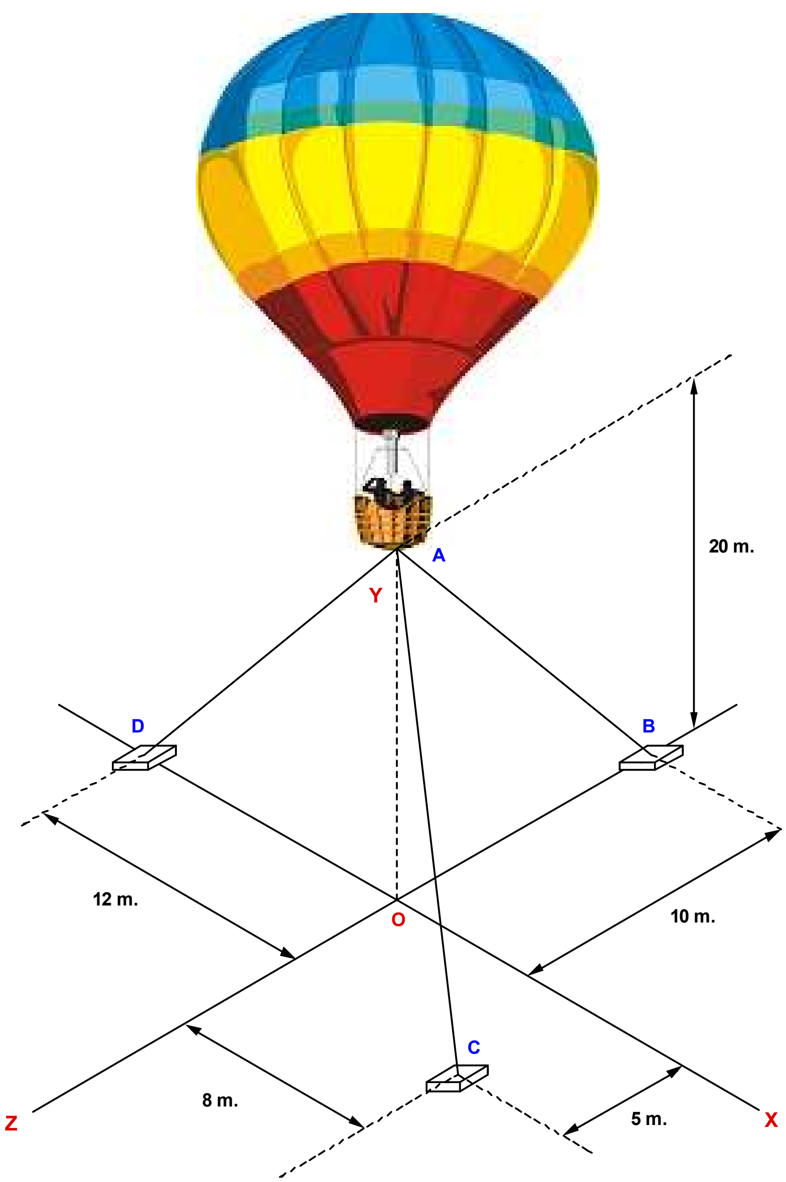



FIGURA 97.

- **Datos.**

  Tensión en la cuerda AD = 400N.

- **Objetivo.**

  Determinar la magnitud de la fuerza F, ejercida por el globo sobre el sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes de los vectores $\overrightarrow{AD}$ ,$\overrightarrow{AC}$ , y, $\overrightarrow{AB}$, en función de sus unitarios a lo largo de las líneas AD, AC y AB del sistema.

$$\overrightarrow{AD} = (-12\text{ m})\mathbf{i} + (-20\text{ m})\mathbf{j} + (0\text{ m})\mathbf{k}$$

$$AD \quad \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$AD \quad \sqrt{(-12)^2 + (-20)^2 + (0)^2}$$

$$AD \quad \sqrt{144 + 400 + 0}$$

$$AD \quad \sqrt{544}$$

$$\boldsymbol{AD = 2\ \ .323\ m.}$$

$$\overrightarrow{AC} = (8\text{ m})\mathbf{i} + (-20\text{ m})\mathbf{j} + (5\text{ m})\mathbf{k}$$

$$AC \quad \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$AC \quad \sqrt{(8)^2 + (-20)^2 + (5)^2}$$

$$AC \quad \sqrt{64 + 400 + 25}$$

$$AC \quad \sqrt{489}$$

$$\boldsymbol{AC = 22.113\ m.}$$

$$\overrightarrow{AB} = (0\text{ m})\mathbf{i} + (-20\text{ m})\mathbf{j} + (-10\text{ m})\mathbf{k}$$

$$AB = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$AB = \sqrt{(0)^2 + (-20)^2 + (-10)^2}$$

$$AB \quad \sqrt{0 + 400 + 100}$$

$$AB \quad \sqrt{500}$$

$$\boldsymbol{AB = 2\ \ .360\ m.}$$

$$\boldsymbol{T_{AD}} = T_{AD}\lambda_{AD} = T_{AD}\ \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$$

$$\boldsymbol{T_{AD}} = T_{AD}\lambda_{AD} = \frac{(-12\ \mathrm{m})T_{AD}\mathbf{i} + (-20\ \mathrm{m})T_{AD}\mathbf{j} + (0\ \mathrm{m})T_{AD}\mathbf{k}}{(23.323\ \mathrm{m})}$$

$$\boldsymbol{T_{AD}} = -(0.514)T_{AD}\mathbf{i} - (0.857\ )T_{AD}\mathbf{j} + (0)T_{AD}\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{T_{AC}} = T_{AC}\lambda_{AC} = T_{AC}\ \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$\boldsymbol{T_{AC}} = T_{AC}\lambda_{AC} = \frac{(8\ \mathrm{m})T_{AC}\mathbf{i} + (-20\ \mathrm{m})T_{AC}\mathbf{j} + (5\ \mathrm{m})T_{AC}\mathbf{k}}{(22.113\ \mathrm{m})}$$

$$\boldsymbol{T_{AC}} = (0.361)T_{AC}\mathbf{i} - (0.904\ )T_{AC}\mathbf{j} + (0.226)T_{AC}\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{T_{AB}} = T_{AB}\lambda_{AB} = T_{AB}\ \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

$$\boldsymbol{T_{AB}} = T_{AB}\lambda_{AB} = \frac{(0\ \mathrm{m})T_{AB}\mathbf{i} + (-20\ \mathrm{m})T_{AB}\mathbf{j} + (-10\ \mathrm{m})T_{AB}\mathbf{k}}{(22.360\ \mathrm{m})}$$

$$\boldsymbol{T_{AB}} = (0)T_{AB}\mathbf{i} - (0.894\ )T_{AB}\mathbf{j} - (0.447)T_{AB}\mathbf{k}$$

b).- Por lo antes expuesto las ecuaciones de equilibrio son.

$$\mathit{1)}\ \sum Fx = -0.514T_{AD} + 0.361T_{AC} = 0$$

$$\mathit{2)}\ \sum Fy = -0.857T_{AD} - 0.904T_{AC} - 0.894T_{AB} + F = 0$$

$$\mathit{3)}\ \sum Fz \quad 0.226T_{AC} - 0.447T_{AB} = 0$$

c).- Resolviendo el sistema y considerando que tensión en la cuerda AD = 400N se tendrá.

De 1)

$$-0.514\,T_{AD} + 0.361\,T_{AC} = 0$$

$$-0.514(400\,N) + 0.361\,T_{AC} = 0$$

$$T_{AC} = \frac{205.600N}{0.361}$$

$$\boldsymbol{T_{AC} = 569.529\,N}$$

Sustituyendo el valor en 3)

$$0.226T_{AC} - 0.447\,T_{AB} = 0$$

$$0.226(569.529\,N) - 0.447\,T_{AB} = 0$$

$$T_{AB} = \frac{128.713\,N}{0.447}$$

$$\boldsymbol{T_{AB} = 287.948\,N}$$

Sustituyendo los valores calculados en 2) se tiene.

$$-0.857T_{AD} - 0.904T_{AC} - 0.894T_{AB} + F = 0$$

$$-0.857(400\,N) - 0.904(569.529\,N) - 0.894(287.948\,N) + F = 0$$

$$-342.8\,N - 514.854\,N - 257.425\,N + F = 0$$

$$-1115.079\,N + F = 0$$

$$\boldsymbol{F = 111\ \ .079\,N}$$

# UNIDAD 3

## ANÁLISIS DEL CUERPO RIGIDO.

# UNIDAD 3

## ANÁLISIS DEL CUERPOR RIGIDO.

## CONTENIDOS.


**3.1 ANÁLISIS DEL CUERPO RIGIDO.**

3.1.1 PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

3.1.1.1 LA REGLA DE LA MANO DERECHA.

3.1.1.2 PROPIEDADES DEL PRODUCTO CRUZ.

**3.2 PRODUCTO VECTORIAL EN TÉRMINOS DE COMPONENTES RECTANGULARES.**

**3.3 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN DETERMINADO PUNTO DE APLICACIÓN.**

3.3.1 DEFINICIÓN.

3.3.2 CONSIDERACIONES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA.

**3.4 TEOREMA DE VARIGNON.**

**3.5 COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA.**

**3.6 RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS, ANÁLISIS DEL CUERPO RÍGIDO.**

**3.7 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.**

3.7.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR.

3.7.2 ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES DADOS.

3.7.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UN PRODUCTO PUNTO.

3.7.4 VECTORES ORTOGONALES.

**3.8 PRODUCTO TRIPLE MIXTO DE TRES VECTORES.**

**3.9 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DETERMINADO.**

**3.10 MOMENTO DE UN PAR DE FUERZAS.**

**3.11 PARES EQUIVALENTES DE FUERZAS.**

**3.12 SUMA DE PARES.**

**3.13 DESCOMPONIENDO UNA FUERZA CONOCIDA EN OTRA EN UN PUNTO DETERMINADO O, Y UN PAR.**

**3.14 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.**

**3.15 REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS APLICADAS A UN CUERPO, A UNA FUERZA Y UN PAR EQUIVALENTE.**

**3.16 REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UN TORSOR.**

**3.17 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.**

**3.18 EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS EN DOS DIMENSIONES.**

3.18.1 TABLA DE REACCIONES EN APOYOS Y CONEXIONES.

**3.19 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.**

## RESULTADOS DE APRENDIZAJE.

**ANALIZAR Y EJECUTAR EJERCICIOS QUE INVOLUCREN EL CÁLCULO DEL EQUILIBRIO DE CUERPOS RIGIDOS, BAJO SISTEMAS DE FUERZAS APLICADAS AL CUERPO.**

## 3.1 ANÁLISIS DEL CUERPO RIGIDO.

### 3.1.1 PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, comúnmente denominado producto "cruz" (por la utilización de un aspa o cruz) o también conocido como "producto vectorial Gibbs", se traduce en un nuevo vector $\vec{V}$, que resulta **perpendicular o normal** al plano que contiene los dos vectores que se multiplican, y cuyo sentido varía de acuerdo al ángulo formado entre ellos.

La magnitud del vector $\vec{V}$, está definida entonces por la siguiente expresión

$$\vec{V} = \vec{P}\vec{Q}\, sen\, \theta \qquad \textbf{\textit{(18)}}$$

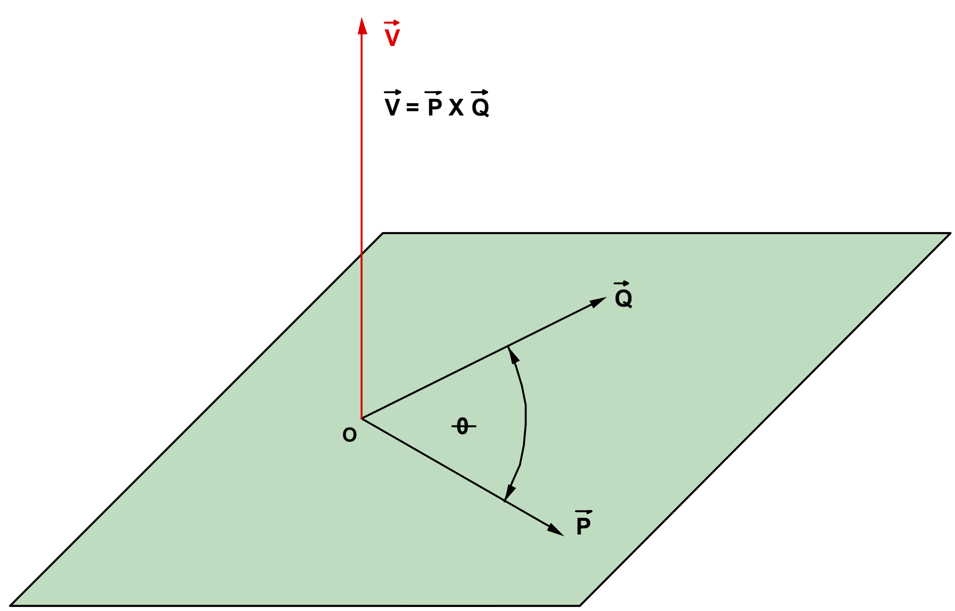



**FIGURA 98.**

La dirección de $\vec{V}$ estará dada por la regla de la mano derecha.

### 3.1.1.1 LA REGLA DE LA MANO DERECHA.

La regla de la mano derecha, es un mecanismo nemotécnico que permite orientar espacialmente de una manera sencilla y práctica, la dirección que adopta el vector resultado de un producto vectorial, como los movimientos vectoriales lineales.

Consiste en girar la mano derecha en forma de puño siguiendo el sentido de los vectores que se desea multiplicar, la dirección que adopte el pulgar será entonces la dirección de la fuerza resultante del producto vectorial.

Por ejemplo, en la figura 96, se desea encontrar la dirección del vector $\vec{V}$, que resulta de realizar el producto vectorial de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, entonces, si aplicamos la regla de la mano derecha el sentido de consideración va de $\vec{P}$ a $\vec{Q}$ por lo que se puede observar que el pulgar apunta hacia arriba, indicándonos que la dirección por lo tanto del vector $\vec{V}$ será de igual manera en esa dirección.

**FIGURA 99**[15]

De lo anotado anteriormente se desprende que, los tres vectores $\vec{P}$, $\vec{Q}$, y $\vec{V}$, forman lo que se denomina una triada a mano derecha.

El vector $\vec{V}$ que satisface todas las condiciones antes expuestas, y las cuales lo definen de manera única, representan el producto vectorial de $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, o producto cruz de $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, representado por la expresión

$$\boldsymbol{\vec{V} = \vec{P}\, x\, \vec{Q}} \qquad \textit{(19)}$$

Cuando $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ tienen la misma dirección, o direcciones opuestas su producto cruz será igual a cero, porque el valor del seno del ángulo de 0° y 180° es igual a cero.

El valor o magnitud del vector resultante del producto vectorial de $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, representa geométricamente el área del paralelogramo cuyos lados tienen una magnitud igual al módulo de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, como se muestra en la siguiente gráfica.

[15] http://cluster-divulgacioncientifica.blogspot.com/2010/03/la-regla-de-la-mano-derecha.html

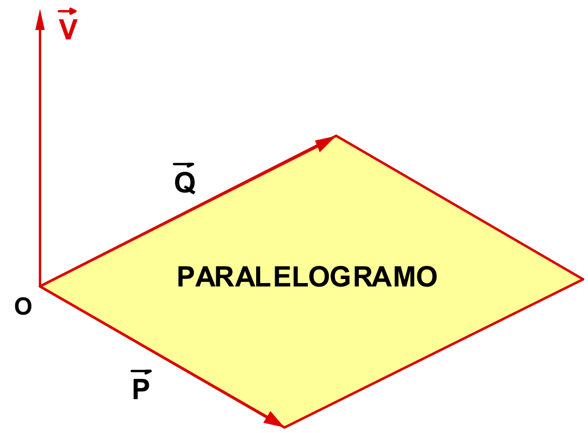



**FIGURA 100**

De esta forma y de manera general se podrá decir entonces que el producto vectorial entre dos vectores se establece como la siguiente relación

$$|\vec{u}\,x\,\vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,sen\,\theta \quad (20)$$

El área del paralelogramo definido por los vectores será

$$A = |\vec{u}|\,h = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,sen\,\theta = |\vec{u}\,x\,\vec{v}| \quad (21)$$

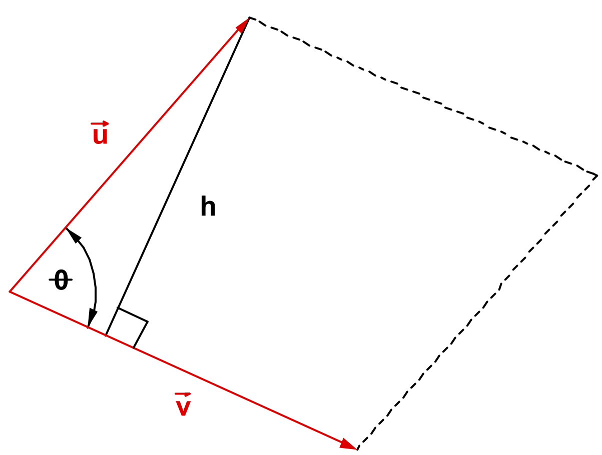



**FIGURA 101**

### 3.1.1.2 PROPIEDADES DEL PRODUCTO CRUZ.

$$\vec{u}\,x\,\vec{v} = -(\vec{v}x\,\vec{u}) \quad \text{PROPIEDAD ANTICONMUTATIVA.}$$

$$\vec{u}\,x\,(\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}\,x\,\vec{v}) + (\vec{u}\,x\,\vec{w}) \quad \text{PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.}$$

$$(\vec{u}\,x\,\vec{v})\,x\,\vec{w} \neq \vec{u}\,x\,(\vec{v}\,x\,\vec{w}) \quad \text{PROPIEDAD ASOCIATIVA.}$$

**Ejemplo de cálculo 1.-** Dos vectores coplanarios en "xz", tienen magnitudes de $\vec{P}$ = 8 unidades y $\vec{Q}$ = 10 unidades, el ángulo que forma el vector $\vec{Q}$ con el eje "x" es de 25° y el ángulo formado entre ellos es de 30°. Calcule el producto vectorial $\vec{V} = \vec{P}\ x\ \vec{Q}$

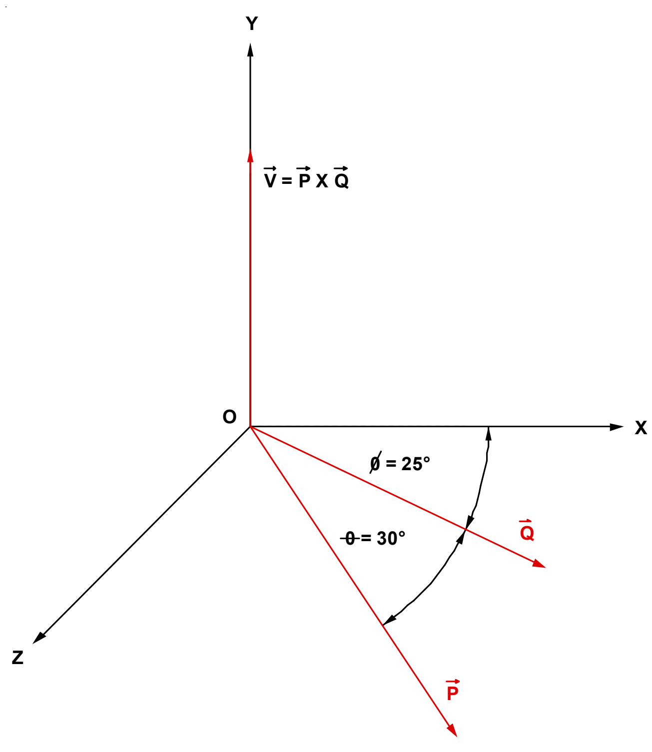



FIGURA 102

- **Datos.**

  Magnitudes de $\vec{P}$ = 8 unidades y $\vec{Q}$ = 10 unidades, el ángulo que forma el vector $\vec{Q}$ con el eje "x" es de 25° y el ángulo formado entre ellos es de 30°

- **Objetivo.**

  Calcular el producto vectorial $\vec{V} = \vec{P}\ x\ \vec{Q}$

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Aplicando la relación (20) se tendrá

$$|\vec{u}\ x\ \vec{v}| = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ sen\ \theta$$

$$|\vec{P}\ x\ \vec{Q}| = |\vec{P}|\ |\vec{Q}|\ sen\ \theta$$

$$|\vec{P}\ x\ \vec{Q}| = |8\ u|\ |10\ u|\ sen\ 30°$$

$$|\vec{P}\ x\ \vec{Q}| = 40\ u$$

- **Conclusiones.**

  Como se considera el producto direccionado de $\vec{P}$ a $\vec{Q}$, aplicando la regla de la mano derecha el vector $\vec{V}$ estará dirigido hacia arriba.

**Ejemplo de cálculo 2.-** Dos vectores coplanarios en “xz”, tienen magnitudes de $\vec{P}$ = 10 unidades y $\vec{Q}$ = 15 unidades, el ángulo que forma el vector $\vec{Q}$ con el eje “x” es de 20° y el ángulo formado entre ellos es de 40°. Determine el producto vectorial $\vec{V} = \vec{Q}\ x\ \vec{P}$

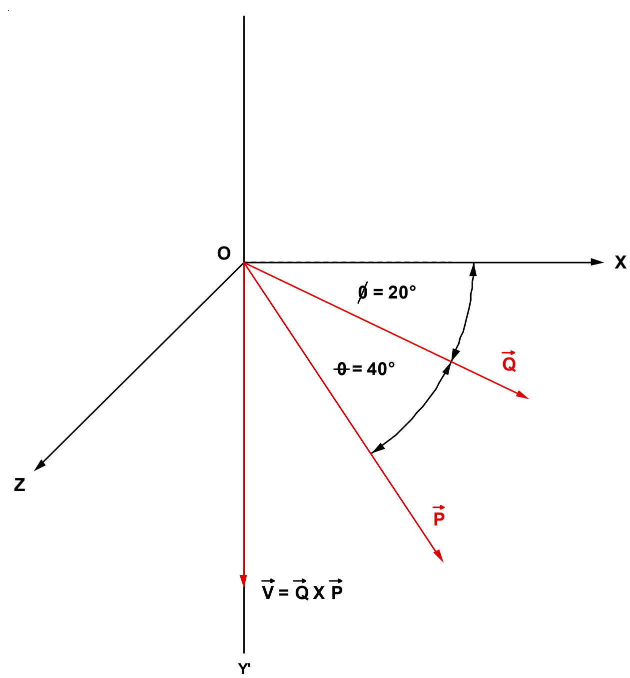



FIGURA 103

- **Datos.**

Magnitudes de $\vec{P}$ = 10 unidades y $\vec{Q}$ = 15 unidades, el ángulo que forma el vector $\vec{Q}$ con el eje "x" es de 20° y el ángulo formado entre ellos es de 40°

- **Objetivo.**

Determinar el producto vectorial $\vec{V} = \vec{Q}\ x\ \vec{P}$

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Aplicando la relación (20) se tendrá

$$|\vec{\boldsymbol{u}}\ \boldsymbol{x}\ \vec{\boldsymbol{v}}| = |\vec{\boldsymbol{u}}|\ |\vec{\boldsymbol{v}}|\ \boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{\theta}$$

$$\left|\vec{Q}\ x\ \vec{P}\right| = \left|\vec{Q}\right|\left|\vec{P}\right| sen\ \theta$$

$$\left|\vec{Q}\ x\ \vec{P}\right| = |15\ u|\ |10\ u|\ sen\ 40°$$

$$\left|\vec{\boldsymbol{Q}}\ \boldsymbol{x}\ \vec{\boldsymbol{P}}\right| = \mathbf{96.418}\ \boldsymbol{u}$$

- **Conclusiones.**

Como se considera el producto direccionado de $\vec{Q}$ a $\vec{P}$, aplicando la regla de la mano derecha el vector $\vec{V}$ estará dirigido hacia abajo.

## 3.2 PRODUCTO VECTORIAL EN TÉRMINOS DE COMPONENTES RECTANGULARES.

Consideremos los vectores unitarios en un sistema referencial tridimensional.

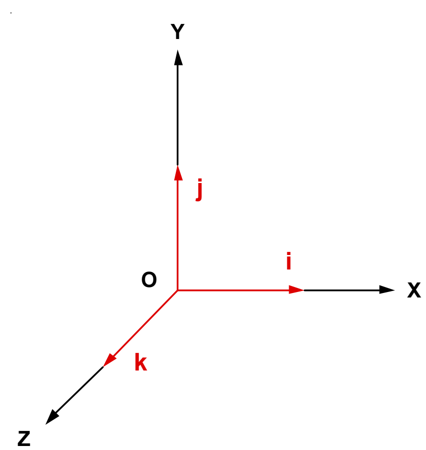



**FIGURA 104**

Aplicando el producto vectorial a cada par de vectores, considerando que su módulo es igual a la unidad y además, que cada par está contenido en un plano a la vez, se tendrá por ejemplo en el caso de los productos $\vec{\imath}$ x $\vec{\jmath}$ ; y, $\vec{\jmath}$ x $\vec{\imath}$:

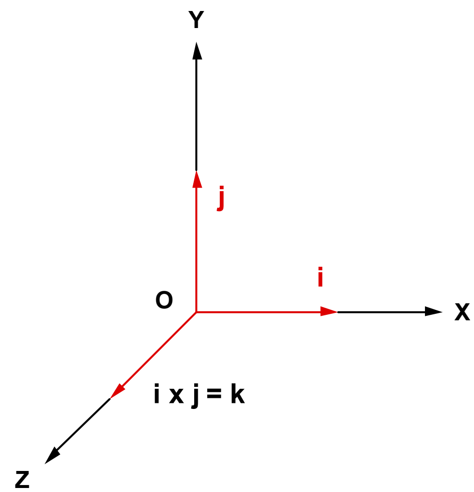



FIGURA 105

$$|\vec{\boldsymbol{u}}\ \boldsymbol{x}\ \vec{\boldsymbol{v}}| = |\vec{\boldsymbol{u}}|\ |\vec{\boldsymbol{v}}|\ \boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{\theta}$$

$$|\vec{\imath}\ x\ \vec{\jmath}| = |\vec{\imath}|\ |\vec{\jmath}|\ sen\ \theta$$

$$|\vec{\imath}\ x\ \vec{\jmath}| = |\vec{\imath}|\ |\vec{\jmath}|\ sen\ 90°$$

$$|\vec{\imath}\ x\ \vec{\jmath}| = k$$

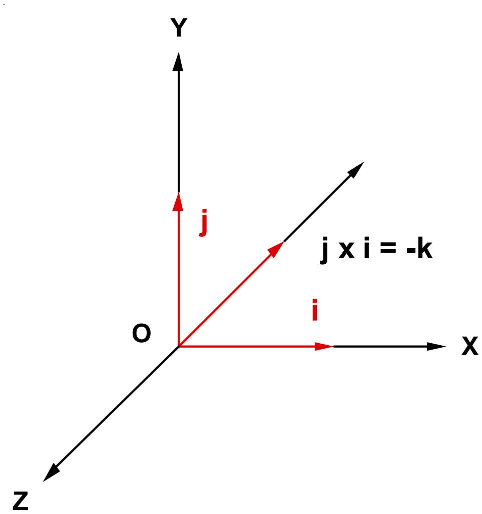



FIGURA 106

$$|\vec{\boldsymbol{u}}\ \boldsymbol{x}\ \vec{\boldsymbol{v}}| = |\vec{\boldsymbol{u}}|\ |\vec{\boldsymbol{v}}|\ \boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{\theta}$$

$$|j\ x\ \vec{\imath}| = |\vec{\jmath}|\ |\vec{\imath}|\ sen\ \theta$$

$$|\vec{j}\, x\, \vec{i}| = |\vec{j}|\, |\vec{i}|\, sen\, 90°$$

$$|\vec{j}\, x\, \vec{i}| = -k$$

De esta manera y considerando ahora todas las relaciones para los diversos pares de vectores unitarios de tiene

$$\vec{i}\,\vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j}\,\vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j}\,\vec{k} = \vec{i} \qquad k\,\vec{j} = -\vec{i}$$

$$k\,\vec{i} = j \qquad i\,\vec{k} = -j$$

Además el producto vectorial de cada vector por sí mismo nos da como resultado

$$\vec{i}\,\vec{i} = 0 \qquad \vec{j}\,\vec{j} = 0 \qquad \vec{k}\,\vec{k} = 0$$

De lo anotado anteriormente se desprende la siguiente convención de signos

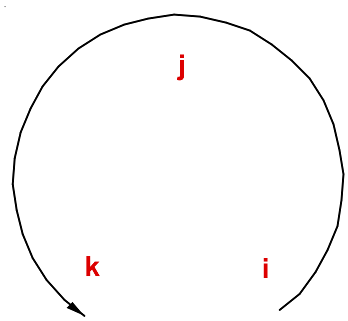



**FIGURA 107**

El producto de dos vectores unitarios será considerado positivo, si el orden del producto entre ellos se genera en el sentido contrario al de las manecillas de un reloj.

En general, **el producto vectorial $\vec{V}$ de dos vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ en término de sus componentes rectangulares** se obtendrá como sigue.

$$\vec{V} = \vec{P}\, X\, \vec{Q} = \left( P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k} \right) X \left(Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}\, \right)$$

Lo que nos lleva a la solución del siguiente determinante

$$\vec{V} = \vec{P}\, X\, \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad \textbf{\textit{(22)}}$$

**Ejemplo de cálculo 3.-** Determine el producto vectorial de los vectores $\vec{P} = (\,3{,}5{,}2\,)\ y\ \ \vec{Q} = (\,1, -1, 3\,)$

- **Datos.**

  Vectores $\vec{P} = (\,3{,}5{,}2\,)\ y\ \ \vec{Q} = (\,1, -1, 3\,)$

- **Objetivo.**

  Determinar el producto vectorial $\vec{V} = \vec{P}\ x\ \vec{Q}$

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Construir el determinante de acuerdo con 22)

$$\vec{V} = \vec{P}\,x\,\vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

  b).- Cálculo del determinante

$$\vec{V} = \vec{P}\,x\,\vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{P}\,x\,\vec{Q} = [(5)(3) - (-1)(2)]\vec{\imath} - [(3)(3) - (1)(2)]\vec{\jmath} + [(3)(-1) - (1)(5)]\vec{k}$$

$$\vec{P}\,x\,\vec{Q} = [(15) - (-2)]\vec{\imath} - [(9) - (2)]\vec{\jmath} + [(-3) - (5)]\vec{k}$$

$$\vec{P}\,x\,\vec{Q} = [17]\vec{\imath} - [7]\vec{\jmath} + [-8]\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{P}\,x\,\vec{Q} = 17^{\rightarrow} - 7\vec{\jmath} - 8\vec{k}}$$

**Ejemplo de cálculo 4.-** Dados los vectores $\vec{P} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ y $\vec{Q} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. Halle el producto vectorial de dichos vectores y comprobar si el vector hallado es ortogonal a los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.

- **Datos.**

  Vectores $\vec{P} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ y $\vec{Q} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$

- **Objetivo.**

Hallar el producto vectorial $\vec{V} = \vec{P}\ x\ \vec{Q}$ y, demostrar que el vector hallado es ortogonal a $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Construir el determinante de acuerdo con 22)

$$\vec{V} = \vec{P}\, x\, \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

b).- Cálculo del determinante

$$\vec{V} = \vec{P}\, x\, \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{P}\, x\, \vec{Q} = [(-1)(1) - (1)(1)]\vec{\imath} - [(3)(1) - (1)(1)]\vec{\jmath} + [(3)(1) - (1)(-1)]\vec{k}$$

$$\vec{P}\, x\, \vec{Q} = [(-1) - (1)]\vec{\imath} - [(3) - (1)]\vec{\jmath} + [(3) - (-1)]\vec{k}$$

$$\vec{P}\, x\, \vec{Q} = [-2]\vec{\imath} - [2]\vec{\jmath} + [4]\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{P}\, x\, \vec{Q} = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}}$$

c).- Demostrar que el vector hallado es ortogonal a $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.
Con respecto al vector al vector $\vec{P}$

$(-2, -2, 4)(3, -1, 1) = \mathbf{-6 + 2 + 4 = 0}$ Cumple.

Con respecto al vector al vector $\vec{Q}$

$(-2, -2, 4)(1, 1, 1) = \mathbf{-2 - 2 + 4 = 0}$ Cumple.

**Ejemplo de cálculo 5.-** Dados los vectores $\vec{P} = (\,4, 2, -1\,)\ y\ \ \vec{Q} = (\,1, 3, 2\,)$. Calcule el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.

- **Datos.**

Vectores $\vec{P} = (\,4, 2, -1\,)\ y\ \ \vec{Q} = (\,1, 3, 2\,)$

- **Objetivo.**

  Calcular el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Construir el determinante de acuerdo con 22)

$$\vec{P}\ x\ \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

  b).- Cálculo del determinante

$$\vec{P}\ x\ \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{P}\ x\ \vec{Q} = [(2)(2)-(3)(-1)]\vec{\imath} - [(4)(2)-(1)(-1)]\vec{\jmath} + [(4)(3)-(1)(2)]\vec{k}$$

$$\vec{P}\ x\ \vec{Q} = [(4)-(-3)]\vec{\imath} - [(8)-(-1)]\vec{\jmath} + [(12)-(2)]\vec{k}$$

$$\vec{P}\ x\ \vec{Q} = [7]\vec{\imath} - [9]\vec{\jmath} + [10]\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{P}\ x\ \vec{Q} = 7\vec{\imath} - 9\vec{\jmath} + 10\vec{k}}$$

$$A = \sqrt{7^2 + (-9)^2 + 10^2}$$

$$\boldsymbol{A = 15.165\ u^2}$$

## 3.3 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN DETERMINADO PUNTO DE APLICACIÓN.

### 3.3.1 DEFINICIÓN.

El momento de una fuerza $F$, denotado por $\boldsymbol{M_o}$, con respecto a un punto de aplicación determinado O, es una magnitud vectorial, que se define como el producto vectorial del vector de posición $r$ del punto de aplicación de la fuerza, por la magnitud del vector fuerza, también se lo conoce por momento dinámico o sencillamente momento, ocasionalmente se lo suele llamar torque, del latín “torquere” (retorcer).

$$\boldsymbol{M_o = r\ X\ F} \qquad \textit{(23)}$$

Ahora bien, si se representa por $\theta$ el ángulo entre las líneas de acción del vector posición $r$ y la fuerza $F$ el momento $M_o$ se definirá por la siguiente expresión.

$$\boldsymbol{M_o = r\,F\,sen\,\theta = Fd} \quad \textit{(24)}$$

En esta relación "$d$" representa el valor del denominado **brazo de palanca de la fuerza $\boldsymbol{F}$**, es decir la distancia perpendicular existente entre la línea de acción del vector $F$ y el punto de aplicación O.

## 3.3.2 CONSIDERACIONES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA.

El momento de una fuerza $F$, denotado por $\boldsymbol{M_o}$ , con respecto a un punto de aplicación determinado, requiere de una comprensión adecuada de su significado físico, de la correcta evaluación de la magnitud del momento, es decir del cálculo de su módulo, y de la dirección y sentido del momento de producido por la fuerza.

Para una mejor comprensión se incluyen los siguientes ejemplos.

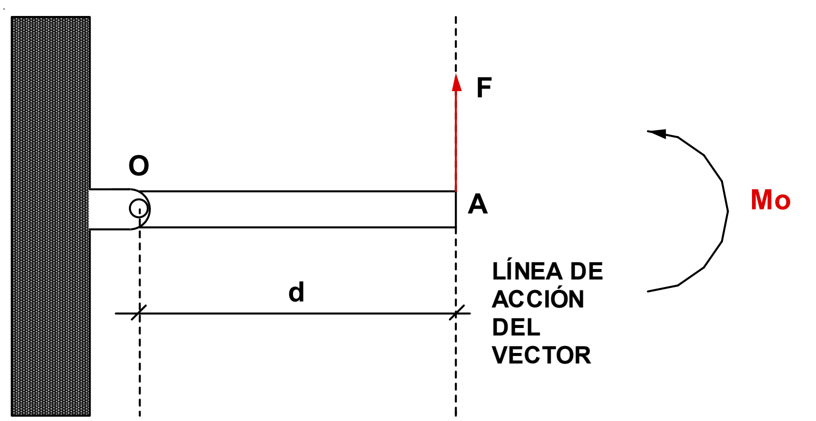



**FIGURA 108**

En la barra articulada en O de la figura 105, se puede observar la aplicación de la fuerza $F$ en el extremo A, dirigida hacia arriba, y la línea de acción de la fuerza en línea discontinua, por lo tanto, el módulo del momento $Mo$ será el producto de la magnitud de la fuerza $F$ por la distancia al punto de aplicación o brazo de palanca $d$, es decir $\boldsymbol{M_o = Fd}$, la dirección perpendicular al plano que contiene la fuerza $F$ y el punto, y finalmente, el sentido que está mostrado al lado derecho, contrario al de las manecillas del reloj, y por tanto considerado como positivo.

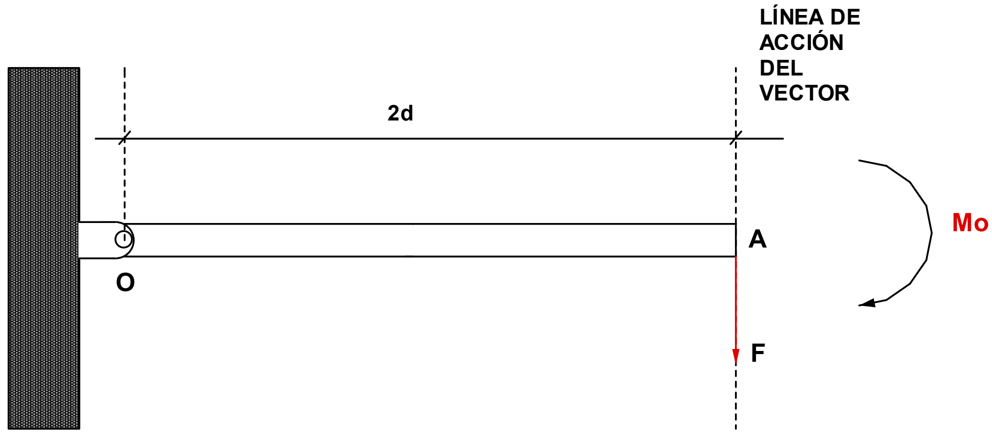



**FIGURA 109**

En la barra articulada en O de la figura 106, cuya longitud es el doble de la anterior $2d$, se puede observar la aplicación de la fuerza $F$ en el extremo A, dirigida hacia abajo, y la línea de acción de la fuerza en línea discontinua, por lo tanto, el módulo del momento $Mo$ será el producto de la magnitud de la fuerza $F$ por la distancia al punto de aplicación o brazo de palanca $2d$, es decir $\boldsymbol{M_o = F2d}$, la dirección perpendicular al plano que contiene la fuerza $F$ y el punto, y finalmente, el sentido que está mostrado al lado derecho, a favor de las manecillas del reloj, y por tanto considerado como negativo.

Además es importante indicar que, si en el segundo ejemplo, el momento se define por $\boldsymbol{M_o = F2d}$, es decir $\boldsymbol{M_o = 2Fd}$, implica que si el valor de $F$ es el mismo en los dos casos, la magnitud del momento será entonces el doble del anterior, por lo que depende de la longitud del brazo de palanca, por ello es fácil comprobar que resulta más fácil abrir una puerta desde su extremo, que si la fuerza se aplica cercana a las bisagras.

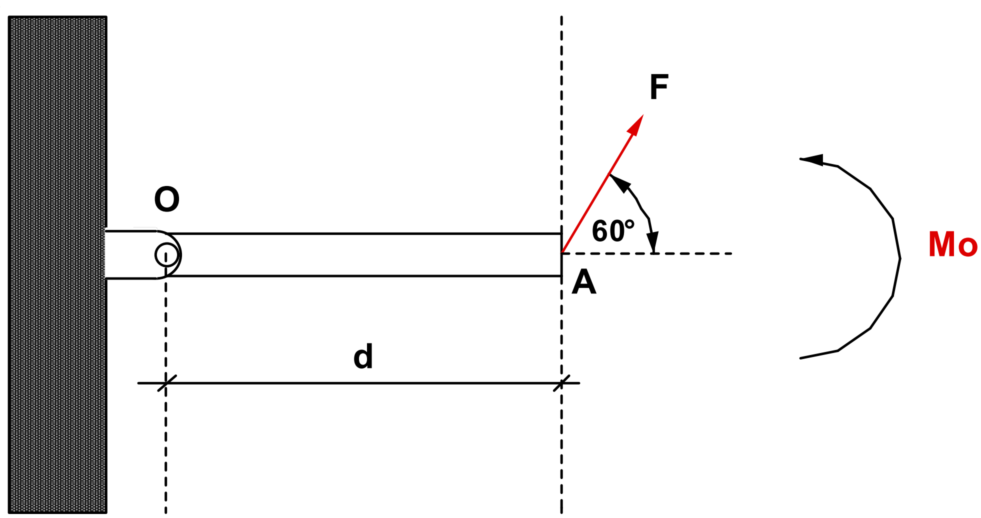



**FIGURA 110**

En la barra articulada en O de la figura 107, cuya longitud es $d$, se puede observar la aplicación de la fuerza $F$ en el extremo A, misma que forma un ángulo de 60° con la horizontal, en este caso, al descomponer $F$ en sus componentes rectangulares se tendrá, $F_x = F \cos 60°$ y $F_Y = F\, sen\, 60°$, sin embargo, la línea de acción de la componente horizontal pasa por el punto de aplicación o centro de momentos, razón por la cual $d = 0$ y en consecuencia el momento $Mo$ producido por ella es nulo, de esta manera únicamente será la componente vertical de $F$ la que produzca momento con respecto a O, su valor entonces estará determinado por la siguiente expresión $\boldsymbol{M_o = F\, sen\, 60°\, d}$, la dirección será perpendicular al plano que contiene la componente vertical de la fuerza y el punto, y finalmente, el sentido que está mostrado al lado derecho, en contra de las manecillas del reloj, y por tanto considerado como positivo.

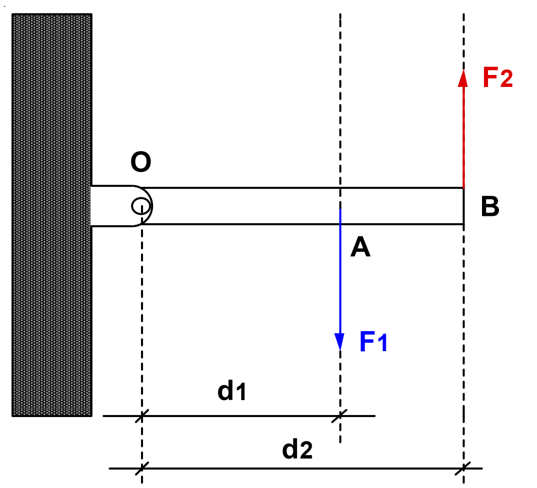



**FIGURA 111**

En la barra articulada en O de la figura 108, cuyo peso es despreciable, se muestra la aplicación de dos fuerzas $F_1\, y\, F_2$ cuyas distancias con respecto al punto de aplicación O son $d_1\, y\, d_2$ respectivamente, de lo anotado anteriormente se desprende entonces que, los momentos generados por la aplicación de las fuerzas con respecto a O serán $M_1 = F_1 d_1$ y $M_2 = F_2 d_2$, entonces para que la barra esté en equilibrio se deberá cumplir la siguiente condición $-M_1 + M_2 = 0$ es decir $-F_1 d_1 + F_2 d_2 = 0$.

Finalmente se establece de manera gráfica la siguiente convención de signos para el sentido del momento de una fuerza, aplicado a un determinado punto O, o centro de momentos.

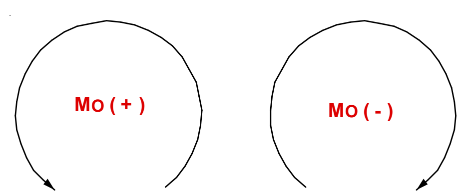



**FIGURA 112**

Finalmente se analiza las unidades para el momento de una fuerza, en el sistema Internacional SI, donde la fuerza esta expresada en newtons (N) y la distancia en metros (m), el momento estará expresado en newtons-metro; En el sistema inglés donde la fuerza está expresada en libras (lb) y la distancia en pies (ft) o pulgadas (in), el momento se expresará en libras-pie, o libras-pulgada.

## 3.4 TEOREMA DE VARIGNON.

Este teorema fue descubierto por el matemático Simón Stevin a inicios del siglo XVII, sin embargo su forma definitiva se debe al francés P. Varignon, quien lo enuncio en 1687, su enunciado es el que a continuación se indica: "El momento con respecto a un punto dado O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto O[16]"

## 3.5 COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA.

Cuando se considera una fuerza en el sistema tridimensional o espacial, es extremadamente útil el descomponer la fuerza en sus componentes rectangulares x,y,z a partir de su punto de aplicación, de tal manera que permita hallar los momentos particulares $M_x, M_y, y\ M_z$ de la siguiente manera.

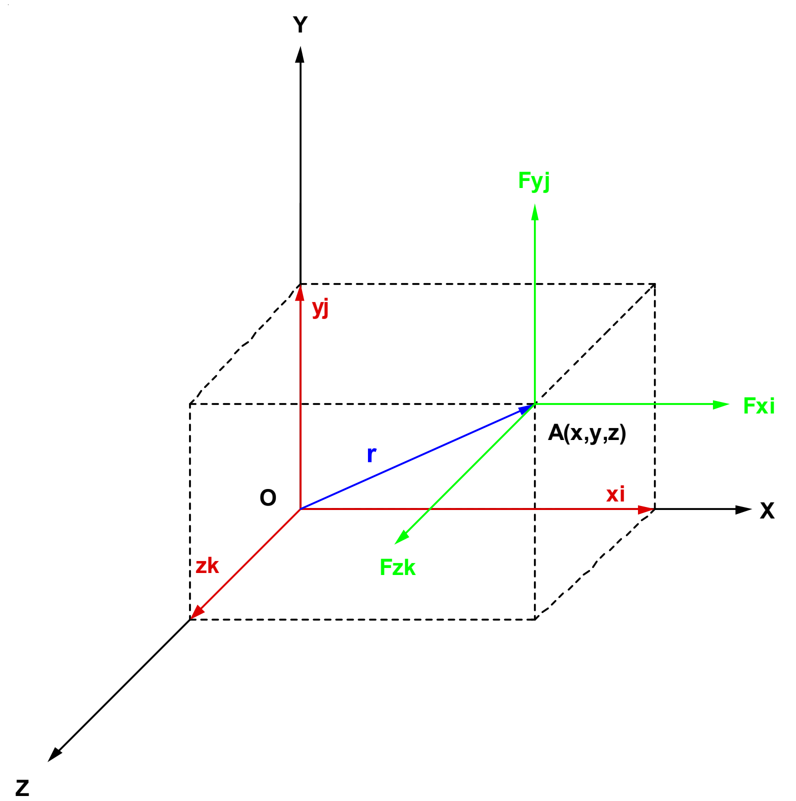



**FIGURA 113**

[16] http://educacionjegg.blogspot.com/2012/09/teorema-de-varignon.html

$$M_x = yF_z - zF_y$$

$$M_y = yF_x - zF_z$$

$$M_z = yF_y - zF_x$$

## 3.6 RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS, ANÁLISIS DEL CUERPO RÍGIDO.

**Ejemplo de cálculo 6.-** Una fuerza de 200 N. se aplica en la barra AB, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza F con respecto al punto A.

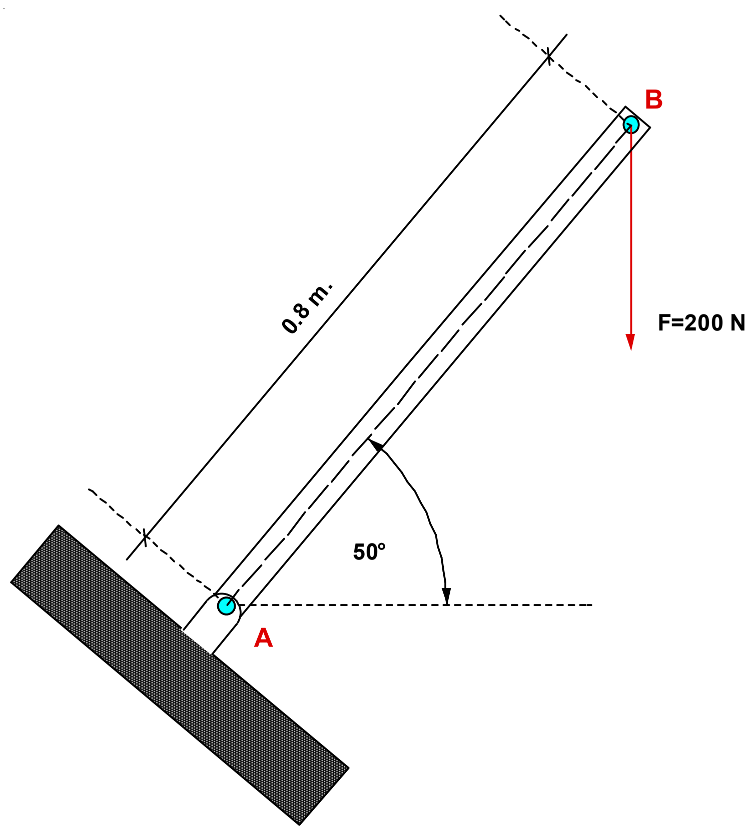



**FIGURA 114**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerza F = 200 N, longitud de la barra = 0.8 m, ángulo de inclinación 50° con respecto a la horizontal.

- **Objetivo.**

Determinar la magnitud del momento producido por la fuerza F con respecto al punto de aplicación de momentos A.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Diagrama donde se muestra la línea de acción de la fuerza aplicada, y la posición del brazo de palanca "d" de la fuerza F sobre el punto de aplicación de momentos A.

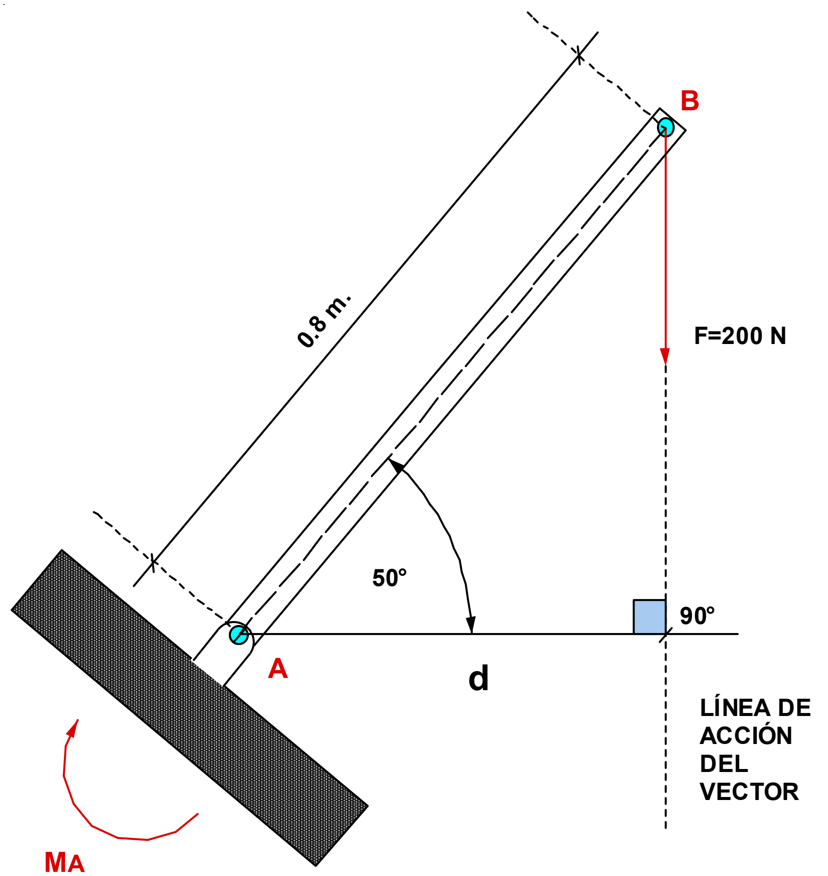



FIGURA 115

b).- Como se indicó anteriormente, el brazo de palanca de la fuerza es la perpendicular o normal levantada desde el punto de aplicación de momentos hacia la línea de acción de la fuerza aplicada F, por lo tanto su magnitud será:

$$\cos 50° = \frac{d}{0.8\ m.}$$

$$d = (\ 0.8\ m.)(\cos 50°)$$

$$\boldsymbol{d = 0.514\ m.}$$

c).- La magnitud del momento será por lo tanto:

$$M_o = Fd$$

$$M_A = (200\ N.)(0.514\ m.)$$

$$\boldsymbol{M_A = 102.800\ Nm.}$$

d).- De acuerdo con la convención de signos establecida, y considerando que el sentido del mismo es a favor de las manecillas del reloj y por tanto negativo se tendrá que el vector $M_A$ será.

$$\boldsymbol{M_A = -102.800\ Nm.}$$

**Ejemplo de cálculo 7.-** Una fuerza de 200 N. se aplica en la barra AB, como se muestra en la figura. Halle el momento de la fuerza F con respecto al punto A.

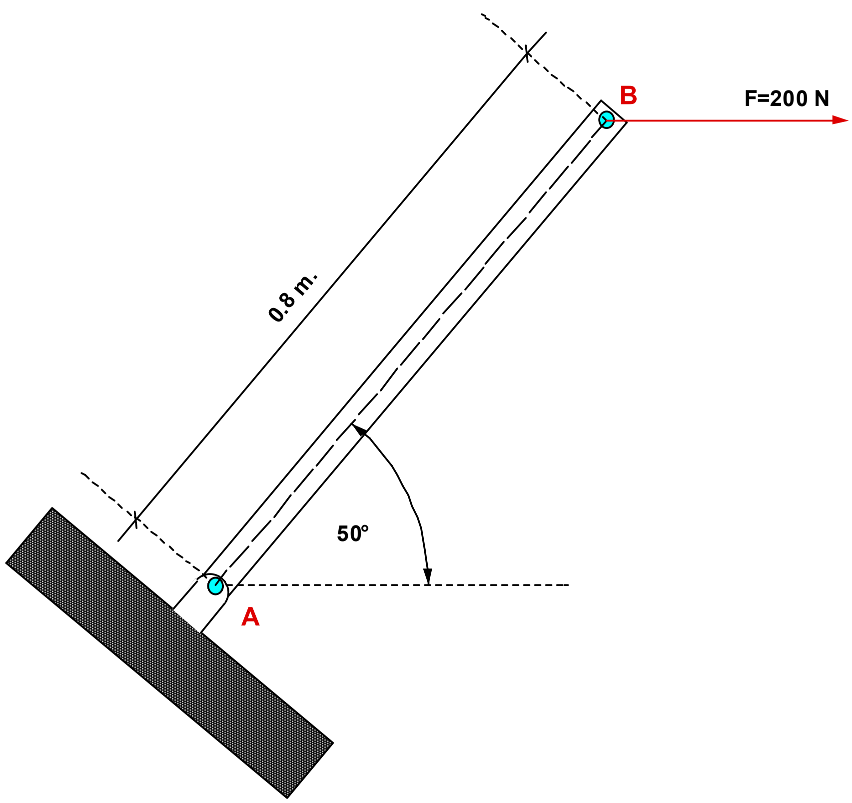



**FIGURA 116**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerza F = 200 N, longitud de la barra = 0.8 m, ángulo de inclinación 50° con respecto a la horizontal.

- **Objetivo.**

  Hallar la magnitud del momento producido por la fuerza F con respecto al punto de aplicación de momentos A.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Diagrama donde se muestra la línea de acción de la fuerza aplicada, y la posición del brazo de palanca "d" de la fuerza F sobre el punto de aplicación de momentos A.

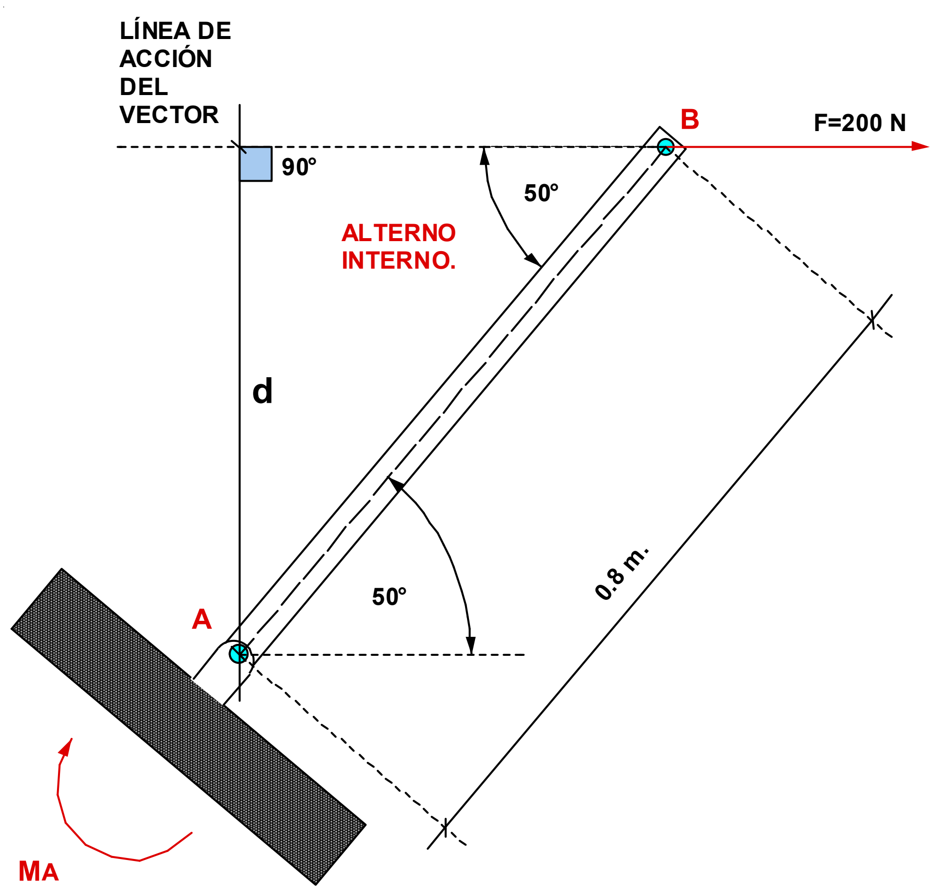



**FIGURA 117**

b).- Como se indicó anteriormente, el brazo de palanca de la fuerza es la perpendicular o normal levantada desde el punto de aplicación de momentos hacia la línea de acción de la fuerza aplicada F, por lo tanto su magnitud será:

$$\operatorname{sen} 50° = \frac{d}{0.8\ m.}$$

$$d = (\ 0.8\ m.)(\operatorname{sen} 50°)$$

$$\boldsymbol{d = 0.612\ m.}$$

c).- La magnitud del momento será por lo tanto:

$$M_o = Fd$$

$$M_A = (200\ N.)(0.612\ m.)$$

$$\boldsymbol{M_A = 122.400\ Nm.}$$

d).- De acuerdo con la convención de signos establecida, y considerando que el sentido del mismo es a favor de las manecillas del reloj y por tanto negativo se tendrá que el vector $M_A$ será.

$$\boldsymbol{M_A = -122.400\ Nm.}$$

**Ejemplo de cálculo 8.-** Una fuerza de 200 N. se aplica en la barra AB, como se muestra en la figura. Calcule el momento de la fuerza F con respecto al punto A.

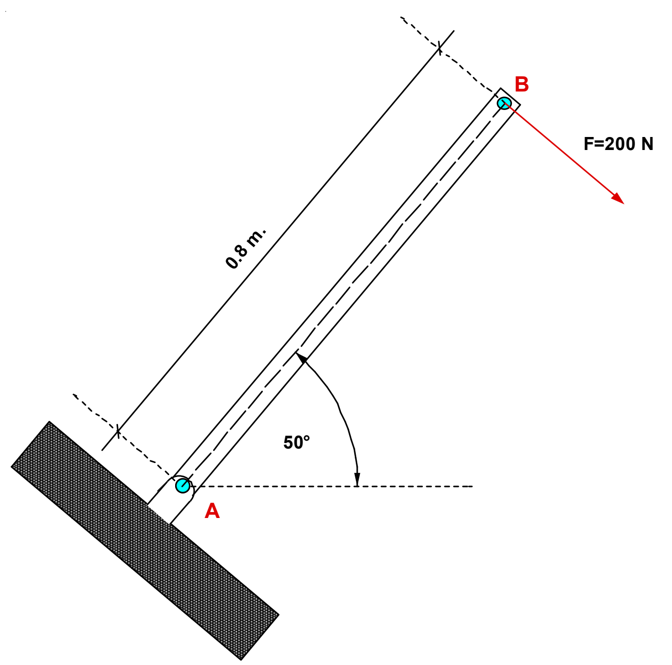



FIGURA 118

- **Datos.**

Magnitud de la fuerza F = 200 N, longitud de la barra = 0.8 m, ángulo de inclinación 50° con respecto a la horizontal.

- **Objetivo.**

Calcular la magnitud del momento producido por la fuerza F con respecto al punto de aplicación de momentos A.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Diagrama donde se muestra la línea de acción de la fuerza aplicada, y la posición del brazo de palanca “d” de la fuerza F sobre el punto de aplicación de momentos A.

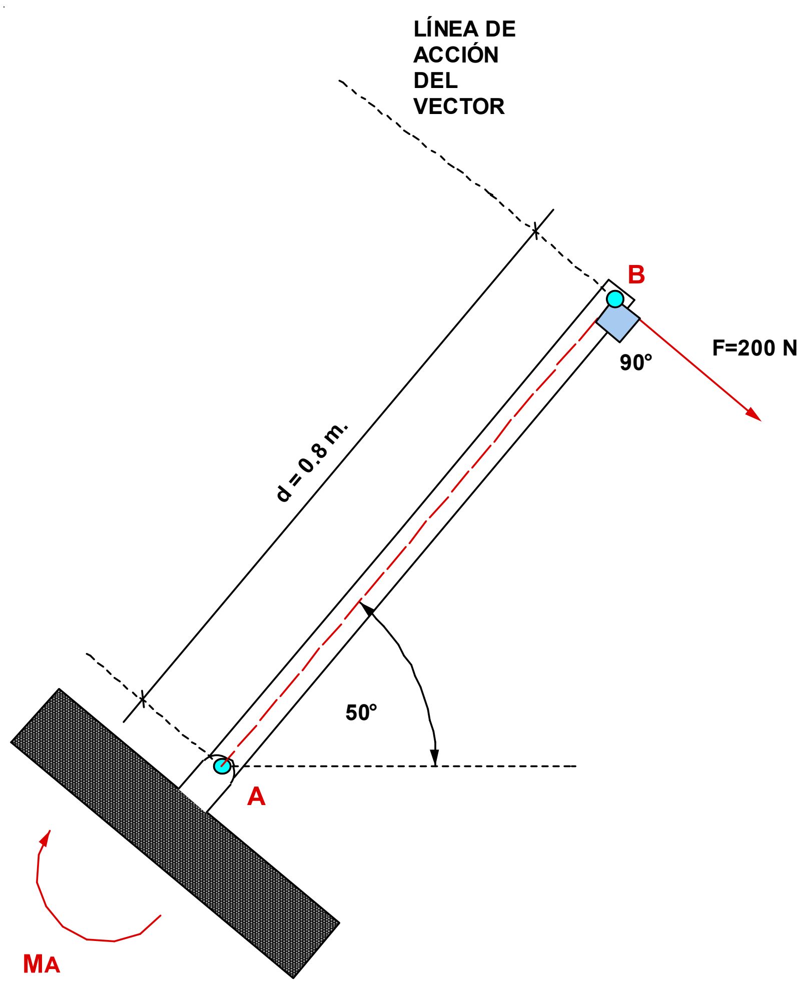



**FIGURA 119**

b).- Como se indicó anteriormente, el brazo de palanca de la fuerza es la perpendicular o normal levantada desde el punto de aplicación de momentos hacia la línea de acción de la fuerza aplicada F, por lo tanto su magnitud será:

$$\boldsymbol{d = 0.800\ m.}$$

c).- La magnitud del momento será por lo tanto:

$$M_o = Fd$$

$$M_A = (200\ N.)(0.800\ m.)$$

$$\boldsymbol{M_A = 160\ Nm.}$$

d).- De acuerdo con la convención de signos establecida, y considerando que el sentido del mismo es a favor de las manecillas del reloj y por tanto negativo se tendrá que el vector $M_A$ será.

$$\boldsymbol{M_A = -160\ Nm.}$$

**Ejemplo de cálculo 9.-** Una fuerza de 200 N. se aplica en la barra AB, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza F con respecto al punto A.

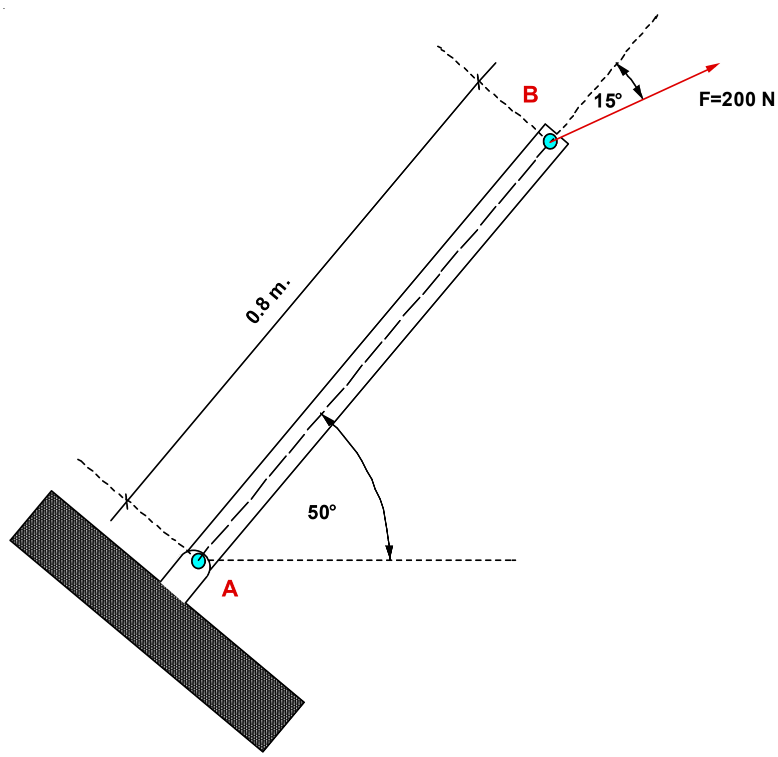



**FIGURA 120**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerza F = 200 N, formando un ángulo de 15° como se indica en la figura, longitud de la barra = 0.8 m, ángulo de inclinación de la barra 50° con respecto a la horizontal.

- **Objetivo.**

  Determinar la magnitud del momento producido por la fuerza F con respecto al punto de aplicación de momentos A.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Diagrama donde se muestra las componentes de F, y sus líneas de acción con respecto al punto de aplicación de momentos A.

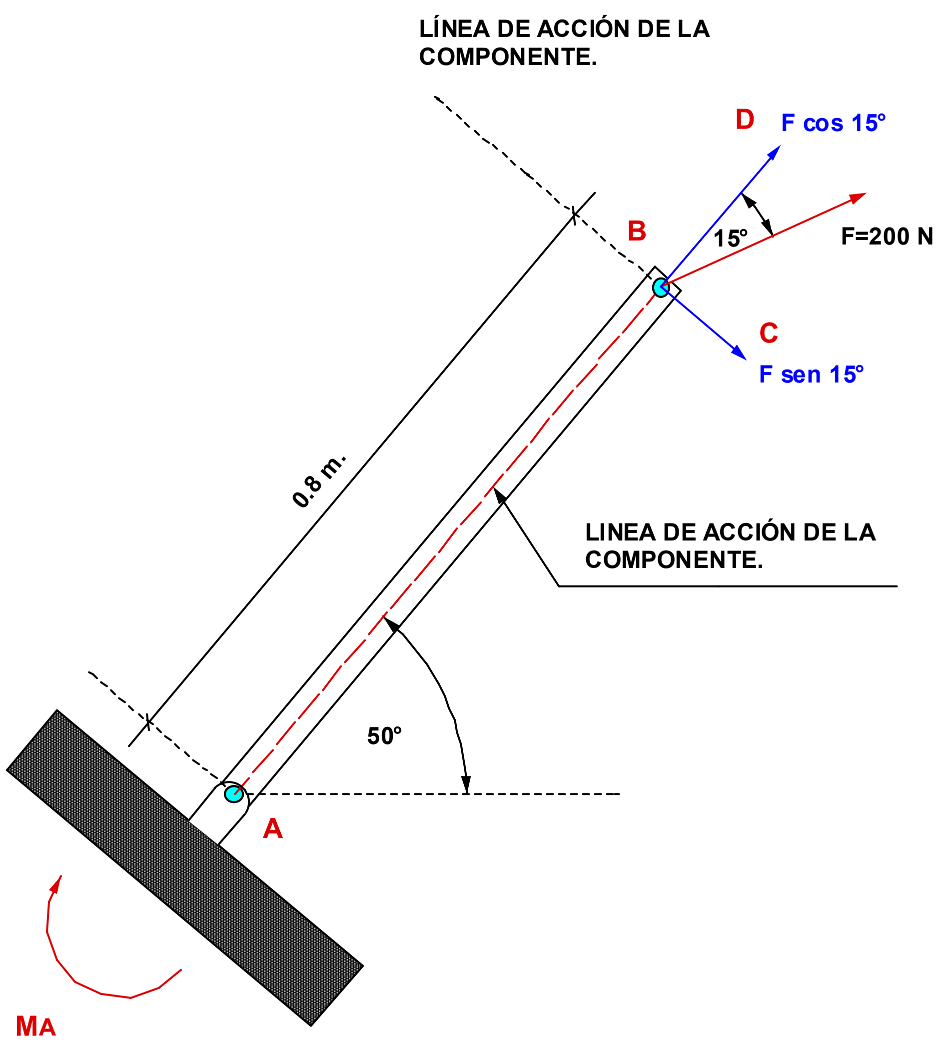



FIGURA 121

b).- El valor de las componentes de la fuerza F calculadas será:

$$F_{BC} = F\ sen\ 15°$$

$$\boldsymbol{F_{BC} = 51.763\ N}$$

$$F_{BD} = F\ cos\ 15°$$

$$\boldsymbol{F_{BD} = 193.185\ N}$$

c).- Ahora los momentos producidos por las componentes de F sobre el punto de momentos A, será como sigue.

**Para $\boldsymbol{F_{BD}}$ :**

$$M_o = Fd$$

$$M_A = (193.185\ N.)(0\ m.)$$

$$\boldsymbol{M_A = 0\ Nm.}$$

El brazo de palanca en este caso es nulo, por cuanto la línea de acción de la componente en la dirección BD, pasa por el punto de momentos A.

**Para $\boldsymbol{F_{BC}}$ :**

$$M_o = Fd$$

$$M_A = (51.763\ N.)(0.800\ m.)$$

$$\boldsymbol{M_A = 41.410\ Nm.}$$

d).- De acuerdo con la convención de signos establecida, y considerando que el sentido del mismo es a favor de las manecillas del reloj y por tanto negativo se tendrá que el vector $M_A$ será.

$$\boldsymbol{M_A = -41.410\ Nm.}$$

**Ejemplo de cálculo 10.-** Determine la posición de la fuerza aplicada F ($L_{AC}$), para generar un momento con respecto de A, igual a 99 Nm.

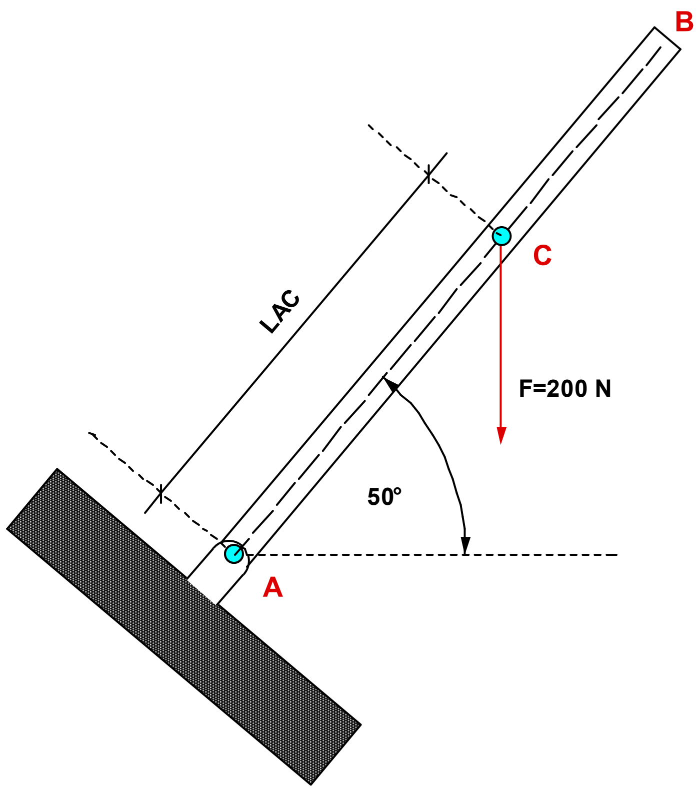



**FIGURA 122**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerza F = 200 N, momento $M_A$ = 99 Nm, ángulo de inclinación de la barra 50° con respecto a la horizontal.

- **Objetivo.**

  Determinar la posición de la fuerza F $(L_{AC})$, para generar un momento con respecto de A, igual a 99 Nm.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Diagrama donde se muestra la línea de acción de la fuerza aplicada, y la posición del brazo de palanca “d” de la fuerza F sobre el punto de aplicación de momentos A.

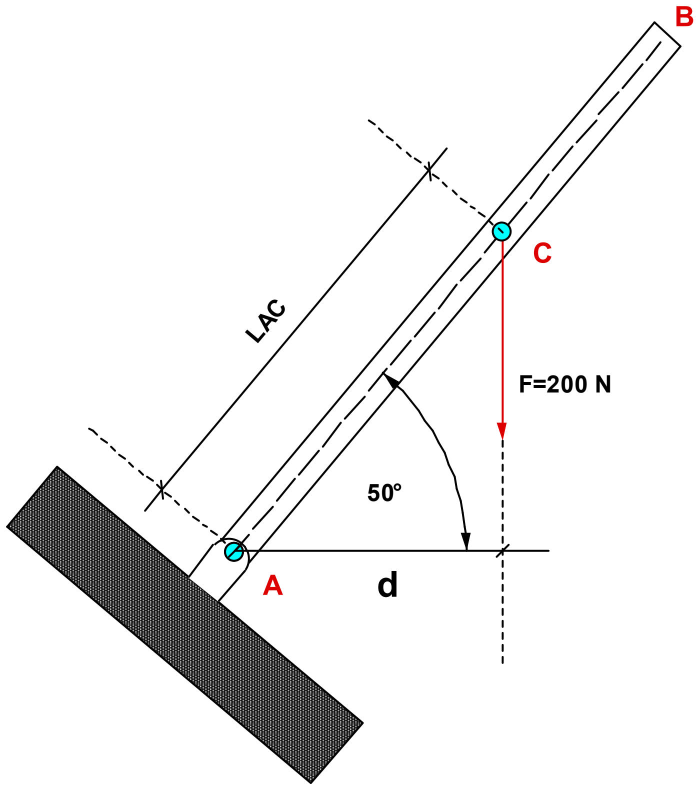



FIGURA 123

b).- Cálculo del brazo de palanca d, de la fuerza F.

$$M_o = Fd$$

$$d = \frac{M_A}{F}$$

$$d = \frac{99\ Nm}{200\ N}$$

$$\boldsymbol{d = 0.495\ m.}$$

c).- Determinación de la distancia $L_{AB}$

$$cos\ 50° = \frac{d}{L_{AC}}$$

$$L_{AC} = \frac{d}{\cos 50°}$$

$$L_{AC} = \frac{0.495\ m}{\cos 50°}$$

$$\boldsymbol{L_{AC} = 0.770\ m}$$

**Ejemplo de cálculo 11.-** Una fuerza de 1000 N se aplica sobre la pieza de madera articulada en O, como se muestra en la figura. Calcule el momento producido por la fuerza respecto de O.

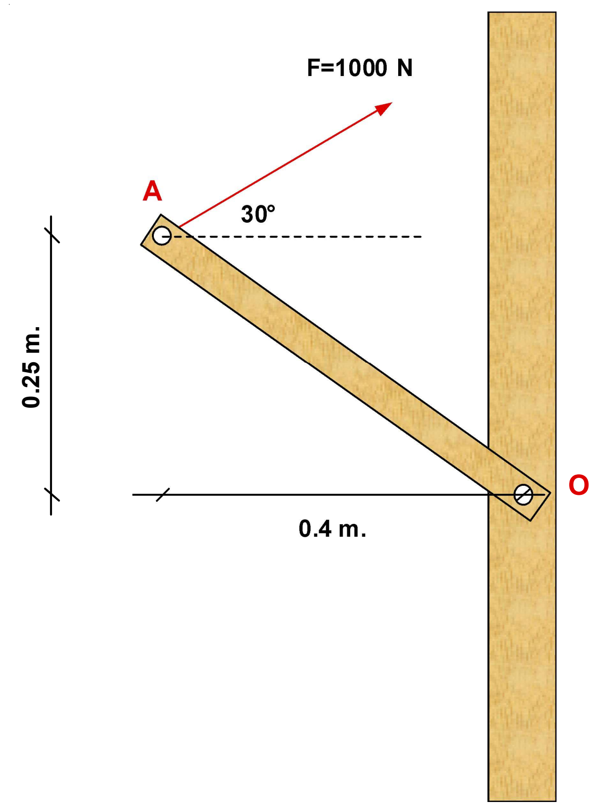



**FIGURA 124**

**Procedimiento 1.**

- **Datos.**

Magnitud de la fuerza F = 1000 N, ángulo 30° como se muestra en la figura.

- **Objetivo.**

Calcular el momento producido por la fuerza sobre el punto O, obtenido como un producto vectorial.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Diagrama donde se muestra el vector $r_{A/_O}$ trazado desde O hasta el punto el punto de aplicación de la fuerza A.

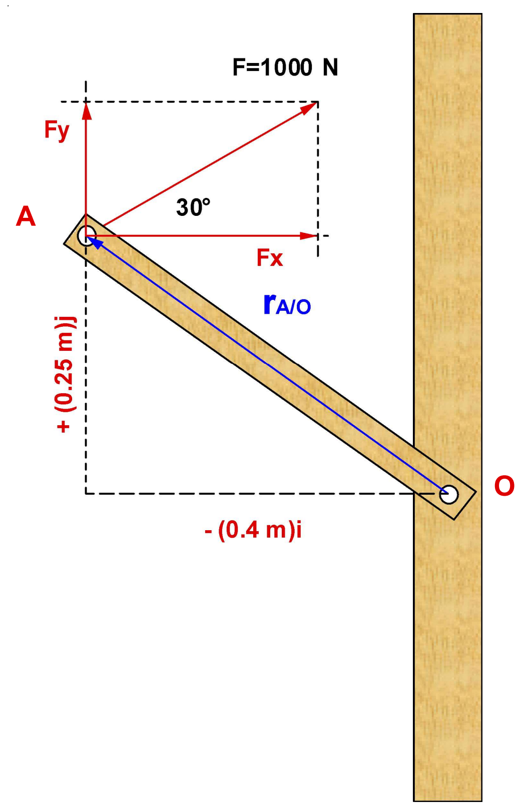



**FIGURA 125**

b).- Cálculo de $r_{A/_O}$ y el valor de **F:**

$$r_{A/_O} = -(\,0.4\,m\,)i \;+\; (0.25\,m)j$$

$$F = F_x i + F_y\, j$$

$$F = (\,1000\,N)cos\;30°\;i + (\,1000\,N)sen\;30°\;j$$

$$F = (866.025\ N)i + (500\ N)j$$

c).- Determinación del momento Mo de la fuerza F con respecto a O.

$$M_O = r_{A/O}\ X\ F$$

$$M_O = [-(\,0.4\ m\,)i + (0.25\ m)j]\ \text{X}\ [(866.025\ N)i + (500\ N)j]$$

d).- Resolviendo el siguiente determinante de 2X2 se tendrá:

$$M_O = \begin{array}{cc} i & j \\ -0.4 & 0.25 \\ 866.025 & 500 \end{array}$$

$$M_O = [(-0.4)(500)]Nm\ k - [(866.025)(0.25)]Nm\ k$$

$$M_O = -200\ Nm\ k - 216.506\ Nm\ k$$

$$\boldsymbol{M_O = -416.506\ Nm\ k}$$

**Procedimiento 2.**

a).- Determinar las componentes de la fuerza F

$$F_X = 1000\ N \cos 30°$$

$$\boldsymbol{F_X = 86\ \ .025\ N}$$

$$F_y = 1000\ N\ \text{sen}\ 30°$$

$$\boldsymbol{F_y = 500\ N}$$

b).- Determinar los momentos producidos por cada componente, con respecto al punto de aplicación O.

$$M_{FX_O} = (866.025\ N)(0.25\ m)$$

$$M_{FX_O} = 216.506\ Nm$$

Por la convención de signos establecida, al ser horario se tendrá:

$$\boldsymbol{M_{FX_O} = -216.506\ Nm}$$

Ahora para la componente vertical.

$$M_{Fy_O} = \ (500\ N)(0.4\ m)$$

$$M_{Fy_O} = \ 200\ Nm$$

Por la misma consideración anterior.

$$\boldsymbol{M_{Fy_O} = \ -20 \quad Nm}$$

c).- Determinación del momento Mo de la fuerza F con respecto a O.

$$M_O = \ M_{FX_O} + \ M_{FY_O}$$

$$M_O = -216.506\ Nm - 200\ Nm$$

$$\boldsymbol{M_O = -416.506\ Nm\ k}$$

**Ejemplo de cálculo 12.-** Determine la magnitud y el sentido direccional del momento de la fuerza de 700 N aplicada en A con respecto al punto B.

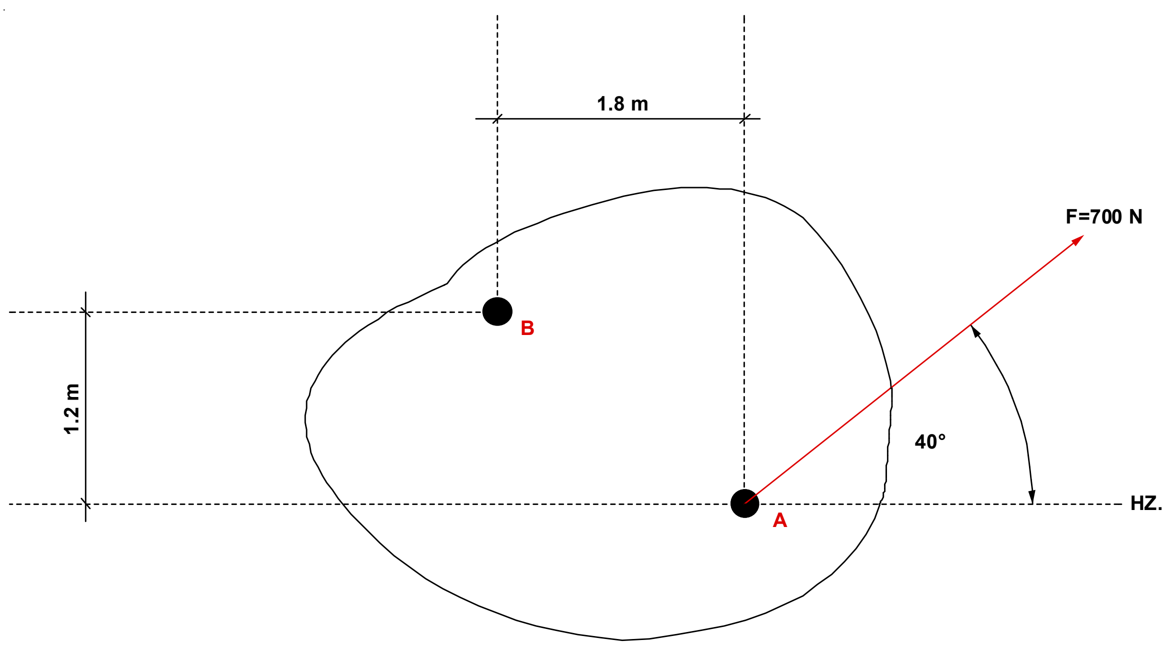



FIGURA 126

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerza F = 700 N, ángulo 40° con la horizontal.

- **Objetivo.**

  Determinar la magnitud y el sentido direccional del momento de la fuerza.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes de la fuerza F

$$F_X = 700\ N \cos 40°$$

$$\boldsymbol{F_X = 536.231\ N}$$

$$F_y = 700\ N \operatorname{sen} 40°$$

$$\boldsymbol{F_y = 449.951\ N}$$

  b).- Determinar los momentos producidos por cada componente, con respecto al punto de aplicación A.

$$M_{FX_A} = \ (536.231\ N)(1.2\ m)$$

$$M_{FX_A} = \ 643.477\ Nm$$

  Por la convención de signos establecida, el momento al ser anti horario se tendrá:

$$\boldsymbol{M_{FX_A} = \ +643.477\ Nm}$$

  Ahora para la componente vertical.

$$M_{Fy_A} = \ (449.951\ N)(1.8\ m)$$

$$M_{Fy_A} = \ 809.911\ Nm$$

  El momento es anti horario y por tanto positivo.

$$\boldsymbol{M_{Fy_A} = \ +809.911\ Nm}$$

  c).- Determinación del momento Mo de la fuerza F con respecto al punto A.

$$M_A = M_{FX_A} + M_{FY_A}$$

$$M_A = 643.477\ Nm \quad 809.911\ Nm$$

$$\boldsymbol{M_A = 14 \quad .388\ Nm\ k}$$

**Ejemplo de cálculo 13.-** Halle la magnitud y el sentido direccional del momento de la fuerza de 280 N aplicada en A con respecto al punto P.

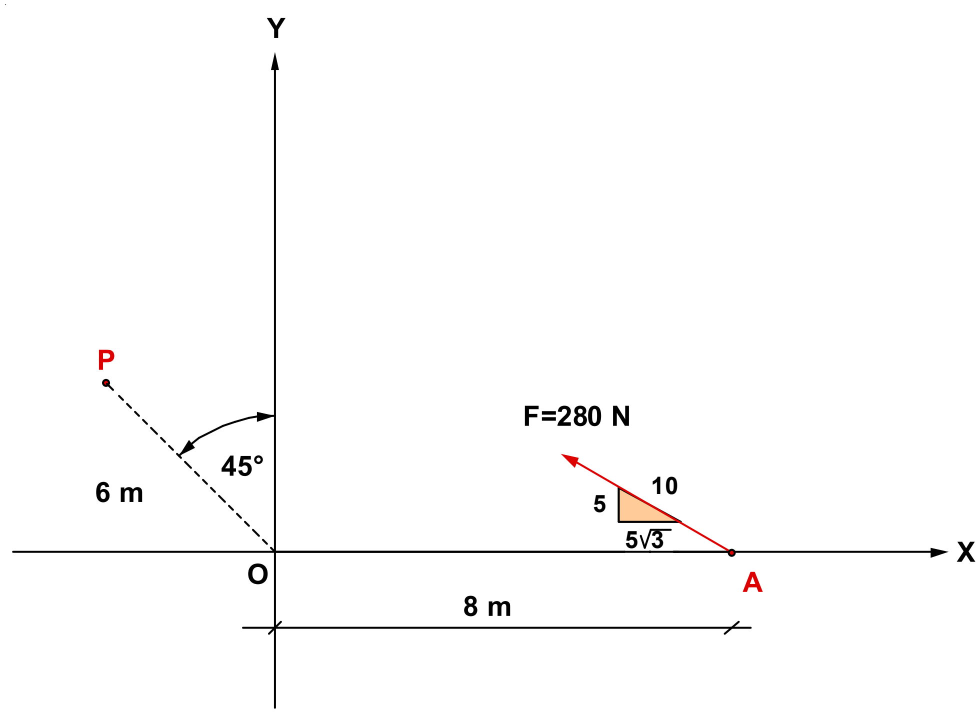



**FIGURA 127**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerza F = 280 N.

- **Objetivo.**

  Hallar la magnitud y el sentido direccional del momento de la fuerza, con respecto al punto P.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Determinar el ángulo director de la fuerza aplicada en A.

$$tang\ \Theta = \frac{5}{5\sqrt{3}}$$

$$tang\ \Theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Theta = 30°$$

b).- Determinar las componentes de la fuerza F

$$F_X = 280\ N \cos 30°$$

$$\boldsymbol{F_X = 242.487\ N}$$

$$F_y = 280\ N \operatorname{sen} 30°$$

$$\boldsymbol{F_y = 140\ N}$$

c).- Coordenadas del punto P.

$$X = 6m\ (sen\ 45°)$$

$$\boldsymbol{X = 4.242\ m.}$$

$$Y = 6m\ (cos\ 45°)$$

$$\boldsymbol{Y = 4.242\ m.}$$

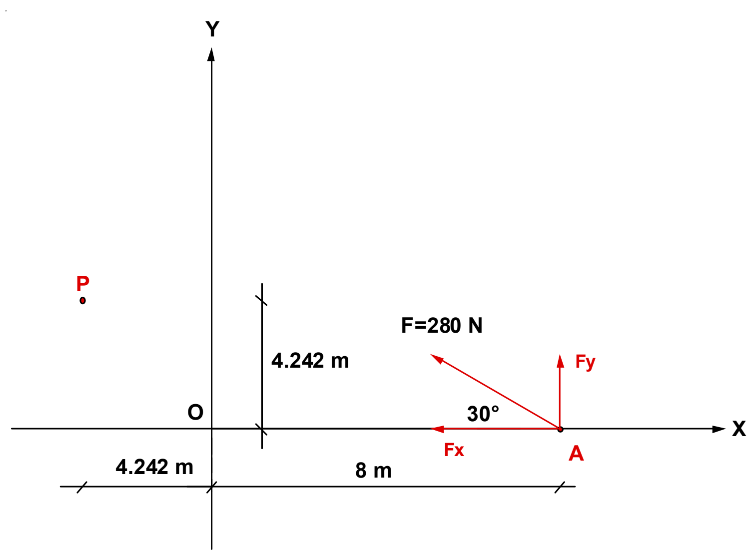



FIGURA 128

d).- Determinar los momentos producidos por cada componente, con respecto al punto de aplicación P.

$$M_{FX_P} = (242.487\ N)(4.242\ m)$$

$$M_{FX_P} = 1028.629\ Nm$$

Por la convención de signos establecida, al ser horario se tendrá:

$$\boldsymbol{M_{FX_P} = -1028.629\ Nm}$$

Ahora para la componente vertical.

$$M_{Fy_P} = (140\ N)(\ 8\ m + 4.242\ m)$$

$$M_{Fy_P} = 1713.880\ Nm$$

El momento es anti horario y por tanto positivo.

$$\boldsymbol{M_{Fy_P} = +1713.880\ Nm}$$

e).- Determinación del momento Mo de la fuerza F con respecto al punto P.

$$M_P = M_{FX_P} + M_{FY_P}$$

$$M_P = -1028.629\ Nm + 1713.880\ Nm$$

$$\boldsymbol{M_P = 685.251\ Nm\ k}$$

**Ejemplo de cálculo 14.-** Una repisa está fija mediante la utilización de una cuerda QP, si se conoce que la tensión en la cuerda es de 400 lb. Calcule el momento con respecto al punto O, de la fuerza ejercida por la cuerda en el punto Q.

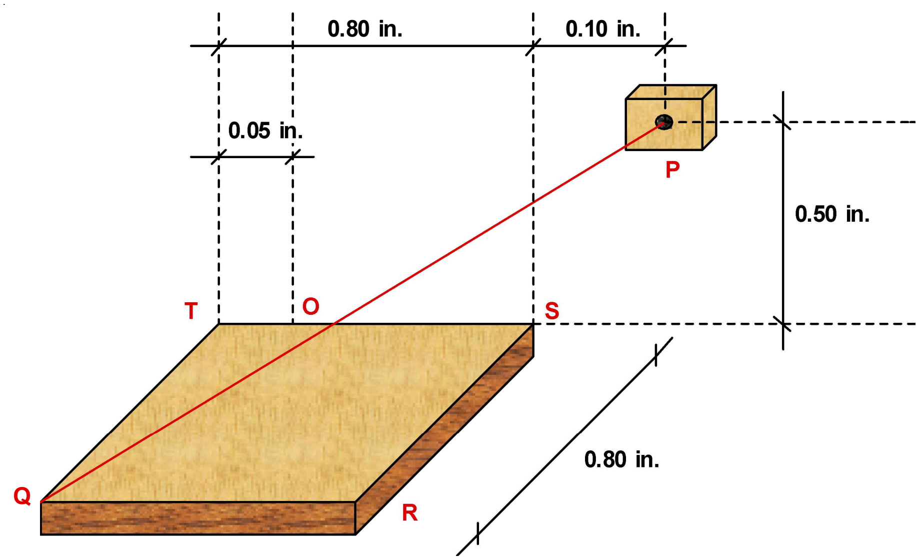



FIGURA 129

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerza F = 400 lb.

- **Objetivo.**

  Calcular el momento con respecto al punto O, de la fuerza ejercida por la cuerda en el punto Q.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-Determinar las componentes y magnitud del vector $\overrightarrow{QP}$, de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{QP} = (0.90 \text{ in})\mathbf{i} + (0.50 \text{ in})\mathbf{j} - (0.80 \text{ in})\mathbf{k}$$

Lo que permite establecer la distancia de QP de la siguiente manera.

$$QP = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$QP = \sqrt{(0.90)^2 + (0.50)^2 + (-0.80)^2}$$

$$QP = \sqrt{0.81 + 0.25 + 0.64}$$

$$QP = \sqrt{1.7}$$

$$\boldsymbol{QP = 1.303\ in.}$$

Al incluir el vector unitario λ se tendrá

$$\boldsymbol{F_{QP}} = F_{QP}\lambda = F_{QP}\ \frac{\overrightarrow{QP}}{QP}$$

$$\boldsymbol{F_{QP}} = F_{QP}\lambda = (400\ lb)\ \frac{\overrightarrow{QP}}{QP}$$

$$F_{QP} = F_{QP}\lambda = (400\ lb)\ \frac{\overrightarrow{QP}}{(1.303\ \ in.)}$$

$$\boldsymbol{F_{QP}} = F_{QP}\lambda = (400\ lb)\ \frac{(0.90\ \text{in})\mathbf{i} +\ (0.50\ \text{in})\mathbf{j} -\ (0.80\ \text{in})\mathbf{k}}{(1.303\ in.)}$$

$$\boldsymbol{F_{QP}} =\ (276.285\ lb)\mathbf{i} +\ (153.491\ lb)\mathbf{j} -\ (245.587\ lb)\mathbf{k}$$

b).-Determinar $r_{Q/_O}$ , es decir el vector trazado desde O hasta Q.

$$r_{Q/_O} =\ \overrightarrow{OQ} =\ (-0.05\ in)i\ +\ (0\ in)j + (0.80\ in)k$$

c).-Determinar el momento Mo de la fuerza F, ejercida por la cuerda en el punto Q con respecto a O, entonces:

$$M_O = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -0.05 & 0 & 0.80 \\ 276.285 & 153.491 & -245.587 \end{vmatrix}$$

d).- Cálculo del determinante

$$M_O = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -0.05 & 0 & 0.80 \\ 276.285 & 153.491 & -245.587 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0.80 \\ 153.491 & -245.587 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} -0.05 & 0.80 \\ 276.285 & -245.587 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -0.05 & 0 \\ 276.285 & 153.491 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$M_O = [(0)(-245.587) - (153.491)(0.80)]\vec{\imath} - [(-0.05)(-245.587) - (276.285)(0.80)]\vec{\jmath} +$$

$$+[(-0.05)(153.491) - (276.285)(0)]\vec{k}$$

$$M_O = [(0) - (122.792)]\vec{\imath} - [(12.279) - (221.028)]\vec{\jmath} + [(-7.674) - (0)]\vec{k}$$

$$M_O = [-122.792]\vec{\imath} + [208.749]\vec{\jmath} + [-7.674]\vec{k}$$

$$\boldsymbol{M_O = -122.792\vec{\imath} + 208.749\vec{\jmath} - 7.674\vec{k}}$$

**Ejemplo de cálculo 15.-** Una viga de madera se ha empotrado en uno de sus extremos en el apoyo A, y se sostiene mediante un cable de acero en el apoyo C, si la tensión del cable es de 30 N. Determine el momento con respecto de A, de la fuerza ejercida por el cable en B.

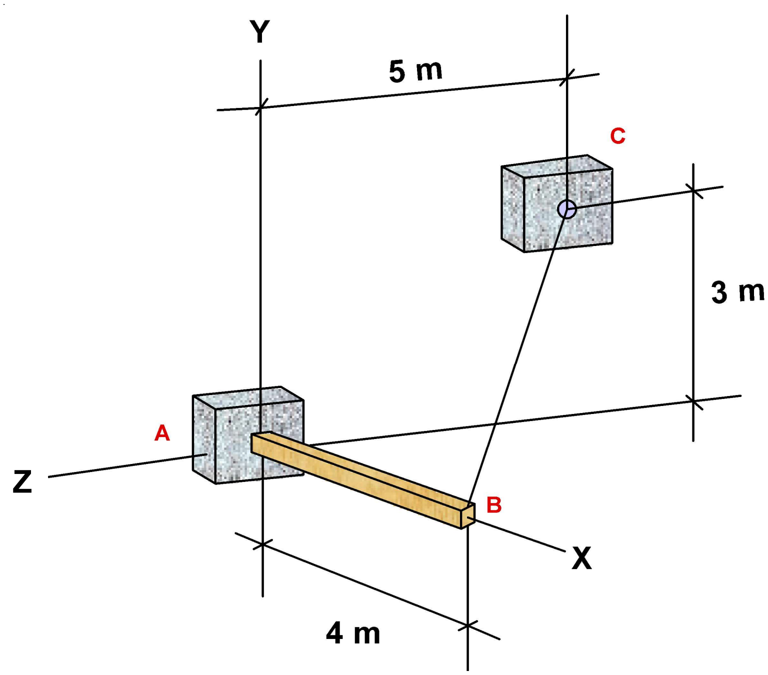



**FIGURA 130**

- **Datos.**

Magnitud de la tensión en el cable F = 30 N, longitud de la viga 4m.

- **Objetivo.**

Determinar el momento con respecto de A, de la fuerza ejercida por el cable en B.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).-Determinar las componentes y magnitud del vector $\overrightarrow{BC}$, de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{BC} = (-4\text{ m})\mathbf{i} + (3\text{ m})\mathbf{j} + (-5\text{ m})\mathbf{k}$$

Lo que permite establecer la distancia de CB de la siguiente manera.

$$BC = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2 + (-5)^2}$$

$$BC = \sqrt{16 + 9 + 25}$$

$$BC = \sqrt{50}$$

$$\boldsymbol{BC = 7.071\ m.}$$

Al incluir el vector unitario λ se tendrá

$$\boldsymbol{F_{BC}} = F_{BC}\lambda = F_{BC}\ \frac{\overrightarrow{BC}}{BC}$$

$$\boldsymbol{F_{BC}} = F_{BC}\lambda = (30\ N)\ \frac{\overrightarrow{BC}}{BC}$$

$$F_{BC} = F_{BC}\lambda = (30\ N)\ \frac{\overrightarrow{BC}}{(7.071\ \ m)}$$

$$\boldsymbol{F_{BC}} = F_{BC}\lambda = (30\ N)\ \frac{(-4\text{ m})\mathbf{i} + (3\text{ m})\mathbf{j} + (-5\text{ m})\mathbf{k}}{(7.071\ m)}$$

$$\boldsymbol{F_{BC}} = (-16.970\ N)\mathbf{i} + (12.728\ N)\mathbf{j} - (21.213\ N)\mathbf{k}$$

b).-Determinar $r_{B/A}$ , es decir el vector trazado desde A hasta B.

$$r_{B/A} = \overrightarrow{AB} = (4\,m)i + (0\,m)j + (0\,m)k$$

c).-Determinar el momento Mo de la fuerza F, ejercida por la cuerda en el punto Q con respecto a O, entonces:

$$M_A = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ -16.970 & 12.728 & -21.213 \end{vmatrix}$$

d).- Cálculo del determinante

$$M_A = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ -16.970 & 12.728 & -21.213 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 12.728 & -21.213 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -16.970 & -21.213 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -16.970 & 12.728 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$M_A = [(0)(-21.213) - (12.728)(0)]\vec{\imath} - [(4)(-21.213) - (-16.970)(0)]\vec{\jmath} +$$

$$+[(4)(12.728) - (-16.970)(0)]\vec{k}$$

$$M_A = [(0) - (0)]\vec{\imath} - [(-84.852) - 0]\vec{\jmath} + [(50.912) - (0)]\vec{k}$$

$$M_A = [0]\vec{\imath} + [84.852]\vec{\jmath} + [50.912]\vec{k}$$

$$\boldsymbol{M_A = 0\vec{\imath} + 84.852\vec{\jmath} + 50.912\vec{k}}$$

## 3.7 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

El producto escalar de dos vectores P y Q, también denominado **producto punto,** da lugar no a un vector sino a un escalar, y de ahí la procedencia de su nombre; Este producto queda definido de la siguiente manera:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \,.\, \vec{\boldsymbol{v}} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \Theta \quad \textit{(25)}$$

A partir de esta definición se establece que el producto escalar de P y Q es un número real que resulta de la multiplicación del producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo formado entre ellos

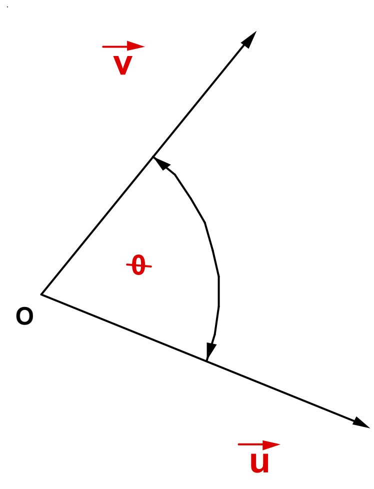



FIGURA 131

### 3.7.1 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR.

De manera general se podrá establecer las siguientes propiedades:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \text{PROPIEDAD CONMUTATIVA.}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w}) \quad \text{PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.}$$

$$k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad \text{PROPIEDAD ASOCIATIVA.}$$

$$\vec{u} \neq 0 \implies \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$$

En cuanto a los productos escalares de los vectores unitarios se concluye que:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

### 3.7.2 ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES DADOS.

Dados dos vectores expresados en términos de sus componentes:

$$\vec{u} = u_x i + u_y j + u_z k$$

$$\vec{v} = v_x i + v j + v_z k$$

El ángulo formado entre los dos vectores estará dado por la siguiente relación.

$$cos\,\Theta = \frac{(u_x v_x) + (u_y v_y) + (u_z v_z)}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Es decir

$$\boldsymbol{cos}\,\Theta = \frac{(\boldsymbol{u_x}.\boldsymbol{v_x}) + (\boldsymbol{u_y}.\boldsymbol{v_y}) + (\boldsymbol{u_z}.\boldsymbol{v_z})}{\sqrt{\boldsymbol{u_x^2} + \boldsymbol{u_y^2} + \boldsymbol{u_z^2}}\sqrt{\boldsymbol{v_x^2} + \boldsymbol{v_y^2} + \boldsymbol{v_z^2}}}$$

***(26)***

### 3.7.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UN PRODUCTO PUNTO.

El producto escalar, o producto punto de dos vectores, no nulos, representa geométricamente la proyección escalar de uno de ellos sobre el otro, como se muestra en la siguiente figura.

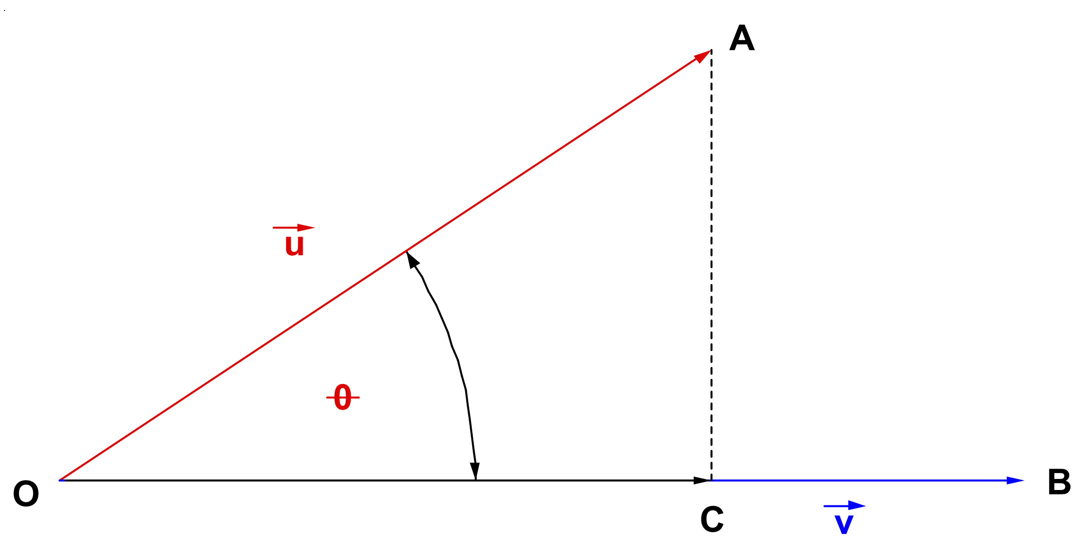



**FIGURA 132**

$$\cos\Theta = \frac{OC}{|\vec{u}|}$$

$$\boldsymbol{OC} \qquad |\vec{\boldsymbol{u}}|\,\boldsymbol{\cos}\,\Theta$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{v}|\,.\,OC$$

$$OC = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

En el espacio se tendrá, que la proyección de un vector sobre un eje dado se considerara de la siguiente manera.

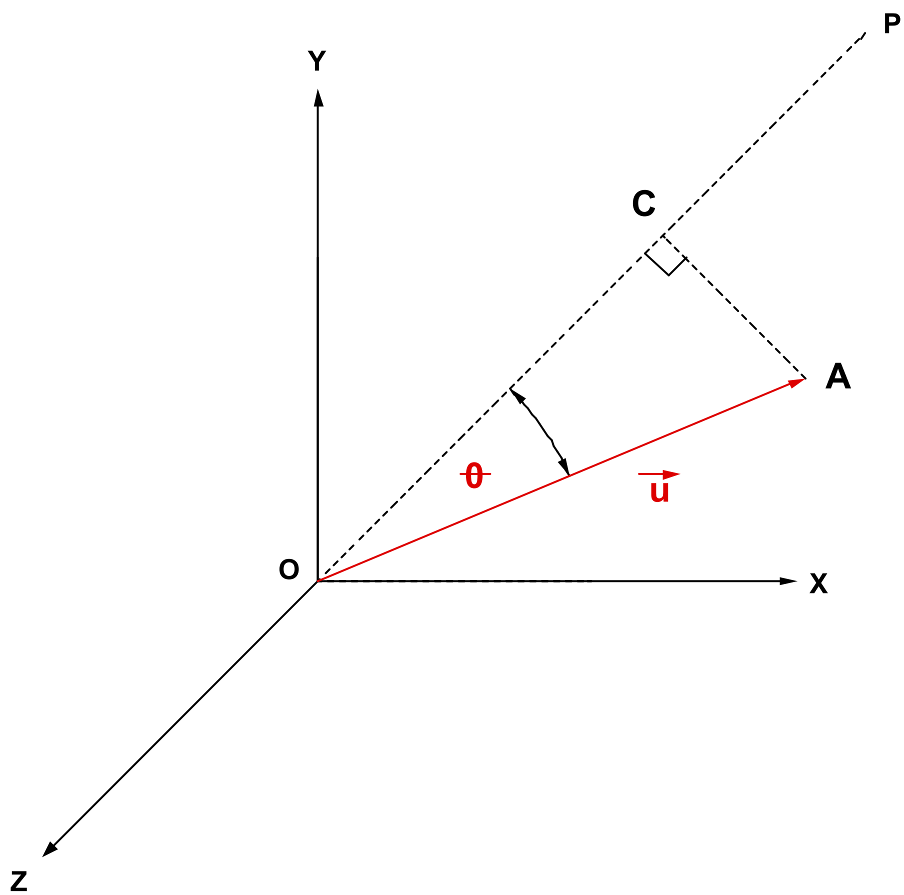



**FIGURA 133**

$$\boldsymbol{OC = |\vec{u}|\cos\theta}$$

Consideremos ahora un vector $\vec{v}$ dirigido a lo largo de la dirección de OP y con su mismo sentido, el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se podrá expresar de la siguiente forma.

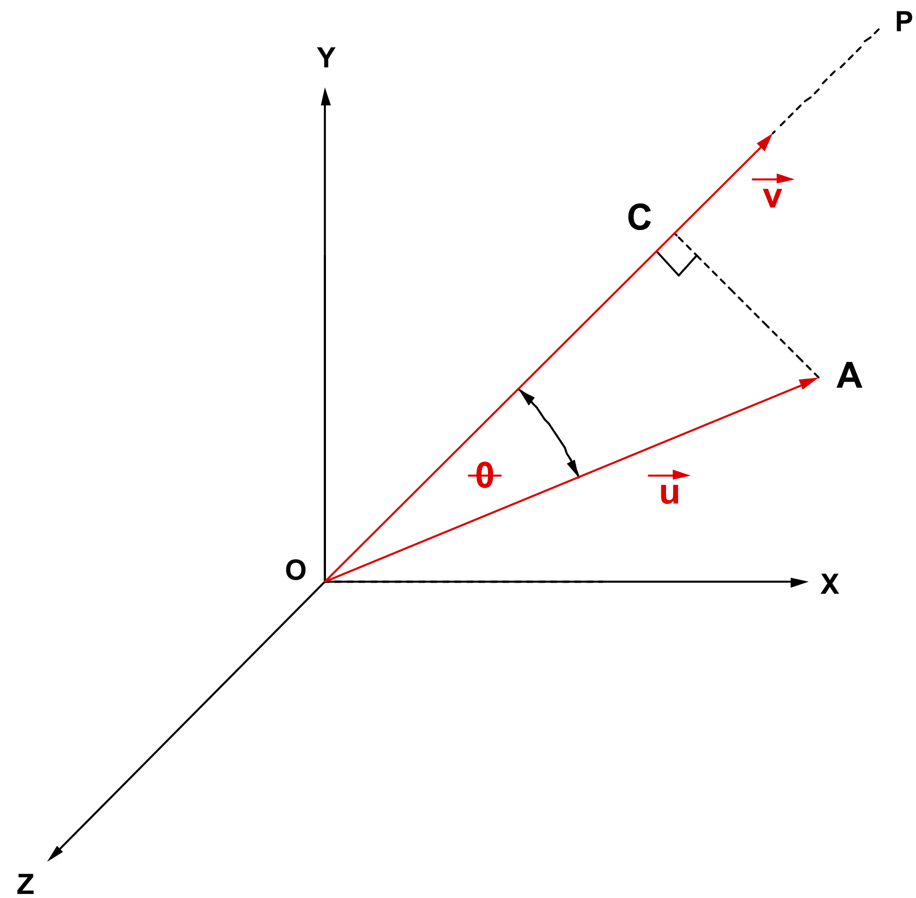



FIGURA 134

$$\vec{\boldsymbol{u}}\,.\,\vec{\boldsymbol{v}} = |\vec{u}||\vec{v}|\,cos\,\Theta$$

Pero

$$OC = |\vec{u}|\,cos\,\Theta$$

Por lo que

$$\vec{\boldsymbol{u}}\,.\,\vec{\boldsymbol{v}} = OC\,|\vec{v}|$$

$$OC = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\boldsymbol{OC} = \frac{(\boldsymbol{u_x}.\boldsymbol{v_x}) + (\boldsymbol{u_y}.\boldsymbol{v_y}) + (\boldsymbol{u_z}.\boldsymbol{v_z})}{\sqrt{\boldsymbol{u_x^2} + \boldsymbol{u_y^2} + \boldsymbol{u_z^2}}\sqrt{\boldsymbol{v_x^2} + \boldsymbol{v_y^2} + \boldsymbol{v_z^2}}}$$

En el caso, cuando el vector considerado a lo largo de OP es el vector unitario $\lambda$, OC se escribirá de la forma.

$$OC = \vec{u} \,.\, \lambda$$

Que considerando los cosenos directores respectivos, generan la siguiente expresión.

$$OC \qquad u_x \cos \Theta_x + \, u_y \cos \Theta_y + \, u_z \cos \Theta_z$$

### 3.7.4 VECTORES ORTOGONALES.

Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, si se cumple la siguiente relación.

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = (u_x \,.\, v_x) + \left(u_y \,.\, v_y\right) + (u_z \,.\, v_z) = 0$$

**Ejemplo de cálculo 16.-** Halle el módulo del vector $\vec{u} = (\,-3, 5, 8)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + \, u_y^2 + \, u_z^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2 + \, (5)^2 + \, (8)^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 25 + 64}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{98}$$

$$|\boldsymbol{\vec{u}}| = \mathbf{9.899}$$

**Ejemplo de cálculo 17.-** Determine el producto escalar o producto punto de dos vectores, cuyas coordenadas en una base orto normal son $\vec{u} = (\,2, 5, -3)$, y, $\vec{v} = (\,4, -7, 1)$

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = (2)(4) + (5)(-7) + (-3)(1)$$

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = (8) + (-35) + (-3)$$

$$\boldsymbol{\vec{u} \,.\, \vec{v} = -30}$$

**Ejemplo de cálculo 18.-** Calcule el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (\,2, 5, -3)$, y, $\vec{v} = (\,4, -7, 1)$

$$\boldsymbol{cos}\,\Theta = \frac{(\boldsymbol{u_x}.\boldsymbol{v_x}) + (\boldsymbol{u_y}.\boldsymbol{v_y}) + (\boldsymbol{u_z}.\boldsymbol{v_z})}{\sqrt{\boldsymbol{u_x^2} + \boldsymbol{u_y^2} + \boldsymbol{u_z^2}}\sqrt{\boldsymbol{v_x^2} + \boldsymbol{v_y^2} + \boldsymbol{v_z^2}}}$$

$$cos\,\Theta = \frac{(2)(4) + (5)(-7) + (-3)(1)}{\sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-3)^2}\sqrt{(4)^2 + (-7)^2 + (1)^2}}$$

$$cos\,\Theta = \frac{(8) + (-35) + (-3)}{\sqrt{4 + 25 + 9}\sqrt{16 + 49 + 1}}$$

$$cos\,\Theta = \frac{-30}{\sqrt{38}\sqrt{66}}$$

$$cos\,\Theta = \frac{-30}{50.079}$$

$$cos\,\Theta = -0.599$$

$$\Theta = arc\cos(\,-0.599)$$

$$\Theta = \mathbf{126°\,47'53.9''}$$

## 3.8 PRODUCTO TRIPLE MIXTO DE TRES VECTORES.

El producto triple mixto, o producto también denominado triple escalar de $\vec{u}\,, \vec{v}\; y, \vec{w}$ se define mediante la siguiente expresión.

$$\vec{u}\;.\;(\vec{v}\;x\;\vec{w}\,) \quad \textit{(27)}$$

Es decir resulta del producto escalar de $\vec{u}$ por el producto vectorial de $\vec{v}\;x\;\vec{w}$, que geométricamente se puede interpretar en el siguiente esquema gráfico.

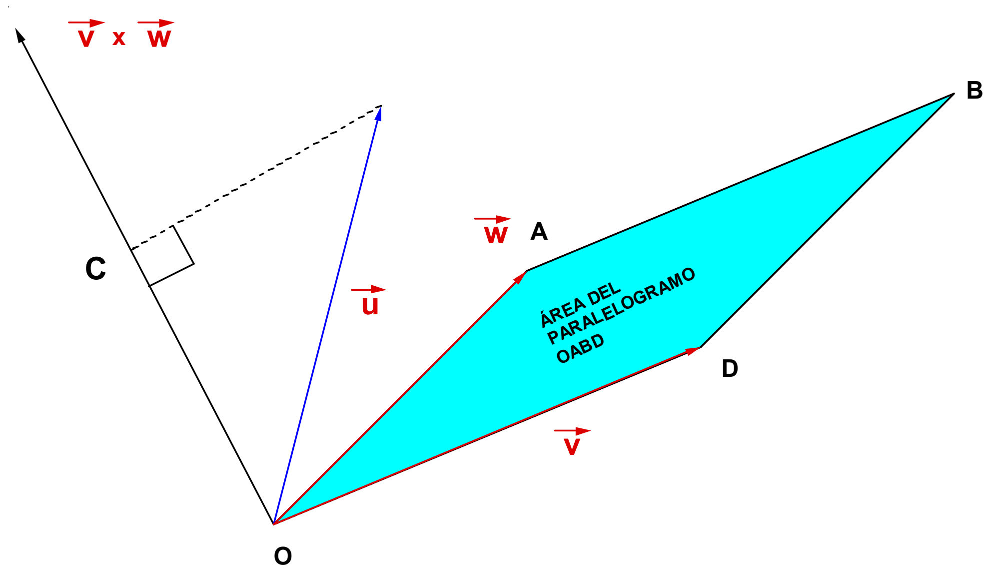



**FIGURA 135**

Debemos recordar que, la magnitud del producto vectorial de $\vec{v}\,x\,\vec{w}$ es equivalente al área del paralelogramo OABD, y que el vector resultante es perpendicular al plano generado por los dos vectores; Una consideración importante que se genera en función del producto triple mixto de tres vectores, es que el mismo será igual al volumen del paralelepípedo que tendrá como lados los tres vectores considerados.

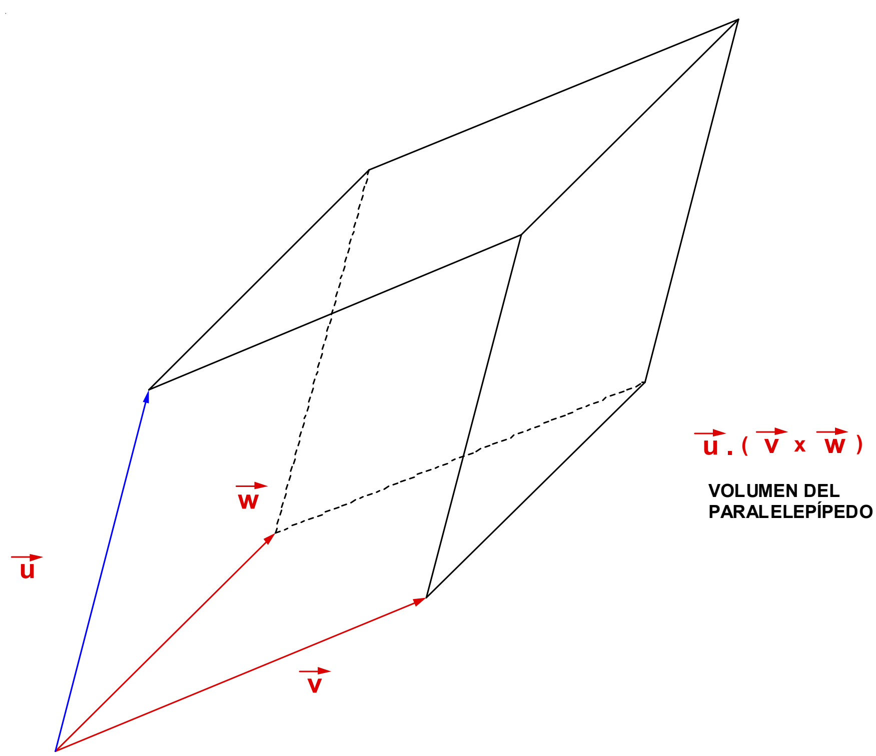



**FIGURA 136**

Se puede manifestar además que se cumplirán las siguientes igualdades:

$$\vec{u}\,.\,(\vec{v}\;x\;\vec{w}) = \vec{v}\,.\,(\vec{w}\;x\;\vec{u}) = \vec{w}\,.\,(\vec{u}\;x\;\vec{v})$$

O también:

$$-\vec{u}\,.\,(\vec{w}\;x\;\vec{v}) = -\vec{v}\,.\,(\vec{u}\;x\;\vec{w}) = -\vec{w}\,.\,(\vec{v}\;x\;\vec{u})$$

El producto triple mixto de tres vectores puede ser determinado mediante la solución del siguiente determinante.

$$\vec{u}\,.\,(\vec{v}\;x\;\vec{w}\,) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

***(28)***

## 3.9 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DETERMINADO.

El momento $M_{OP}$ de F, con respecto al eje OP, **que pasa por el origen de coordenadas**, es el escalar que resulta al formar el producto triple escalar de λ, r y F, y que puede obtenerse mediante la solución del siguiente determinante.

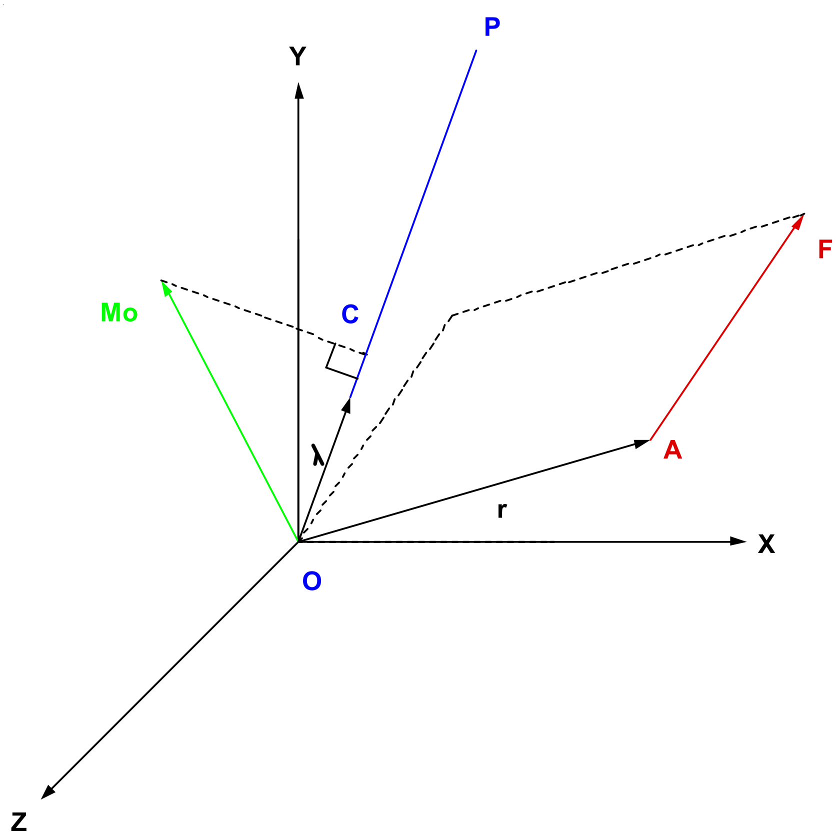



**FIGURA 137**

$$M_{OP} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

***(29)***

Donde:

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ , son los cosenos directores del eje OP.

$x, y, z,$ son las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza F.

$F_x, F_y, F_z$ , corresponde a las componentes de la fuerza F.

El momento de una fuerza F aplicada en el punto A, con respecto a un eje que **no pasa a través del origen**, se obtiene al seleccionar un punto arbitrario B sobre dicho eje, y al determinar la proyección sobre el eje BP del momento $M_{BP}$ de F, con respecto a B, y que puede obtenerse mediante la solución del siguiente determinante.

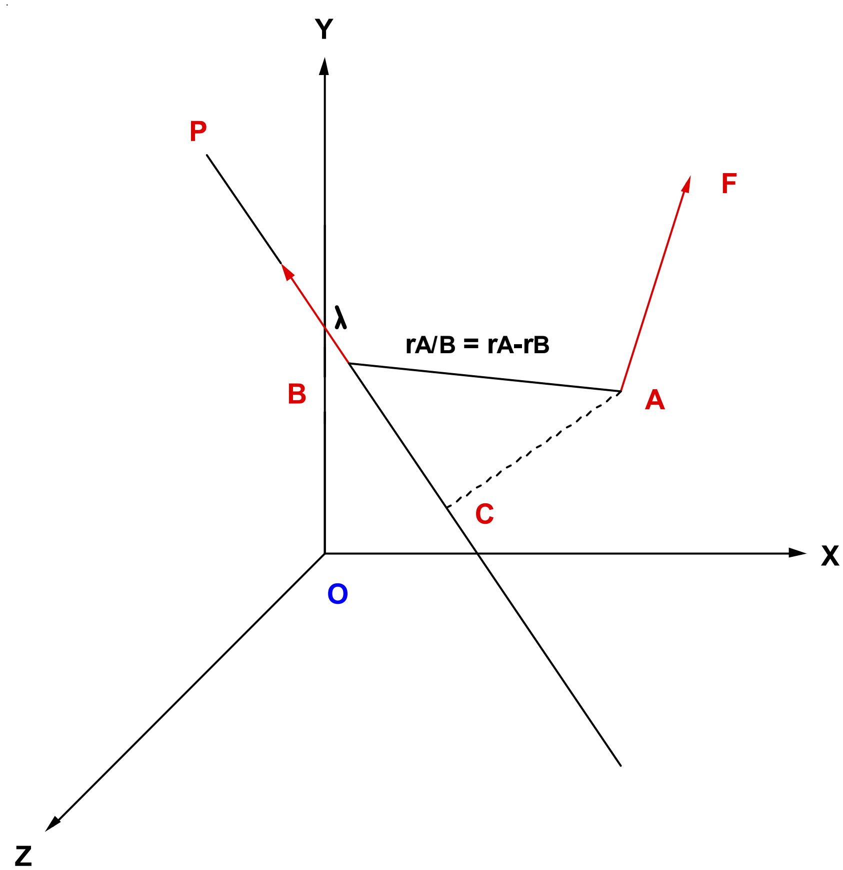



**FIGURA 138**

$$M_{BP} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{\frac{A}{B}} & y_{\frac{A}{B}} & z_{\frac{A}{B}} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

***(30)***

Donde:

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ , son los cosenos directores del eje BP.

$$x_{\frac{A}{B}} = x_A - x_B \qquad y_{\frac{A}{B}} = y_A - y_B \qquad z_{\frac{A}{B}} = z_A - z_B$$

$F_x, F_y, F_z$ , corresponde a las componentes de la fuerza F.

**Ejemplo de cálculo 19.-** Dados los vectores $\vec{u} = (-3, -4, 7)$, $\vec{v} = (6, -3, 1)$ y,$\vec{w} = (5, -2, -1)$ Calcule el producto triple mixto de los tres vectores.

- **Datos.**

  $\vec{u} = (-3, -4, 7)$, $\vec{v} = (6, -3, 1)$, $\vec{w} = (5, -2, -1)$

- **Objetivo.**

  Calcular el producto triple mixto de los tres vectores.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinamos en primer término el producto de $\vec{v}\ x\ \vec{w}$

$$\vec{v}\ x\ \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Cálculo del determinante

$$\vec{v}\ x\ \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{v}\;x\;\vec{w} = [(-3)(-1) - (-2)(1)]\vec{\imath} - [(6)(-1) - (5)(1)]\vec{\jmath} + [(6)(-2) - (5)(-3)]\vec{k}$$

$$\vec{v}\;x\;\vec{w} = [(3) - (-2)]\vec{\imath} - [(-6) - (5)]\vec{\jmath} + [(-12) - (-15)]\vec{k}$$

$$\vec{v}\;x\;\vec{w} = [5]\vec{\imath} - [-11]\vec{\jmath} + [3]\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{v}\;x\;\vec{w} = 5\vec{\imath} + 11^{\rightarrow} + 3\vec{k}}$$

b).- Determinación del producto $\vec{u}\,.\,(\,\vec{v}\;x\;\vec{w}\,)$

$$\vec{u}\,.\overrightarrow{(v\;x\;\vec{w})} = (-3)(5) + (-4)(11) + (7)(3)$$

$$\vec{u}\,.(\vec{v}\;x\;\vec{w}) = (-15) + (-44) + (21)$$

$$\boldsymbol{\vec{u}\,.\;(\vec{v}\;x\;\vec{w}) = \;-38}$$

**Ejemplo de cálculo 20.-** La mampostería de madera se sujeta al suelo mediante cuerdas como se muestra en la gráfica. Determine el ángulo formado por la cuerda OA y la cuerda OC, y, el ángulo entre la cuerda OB y OC.

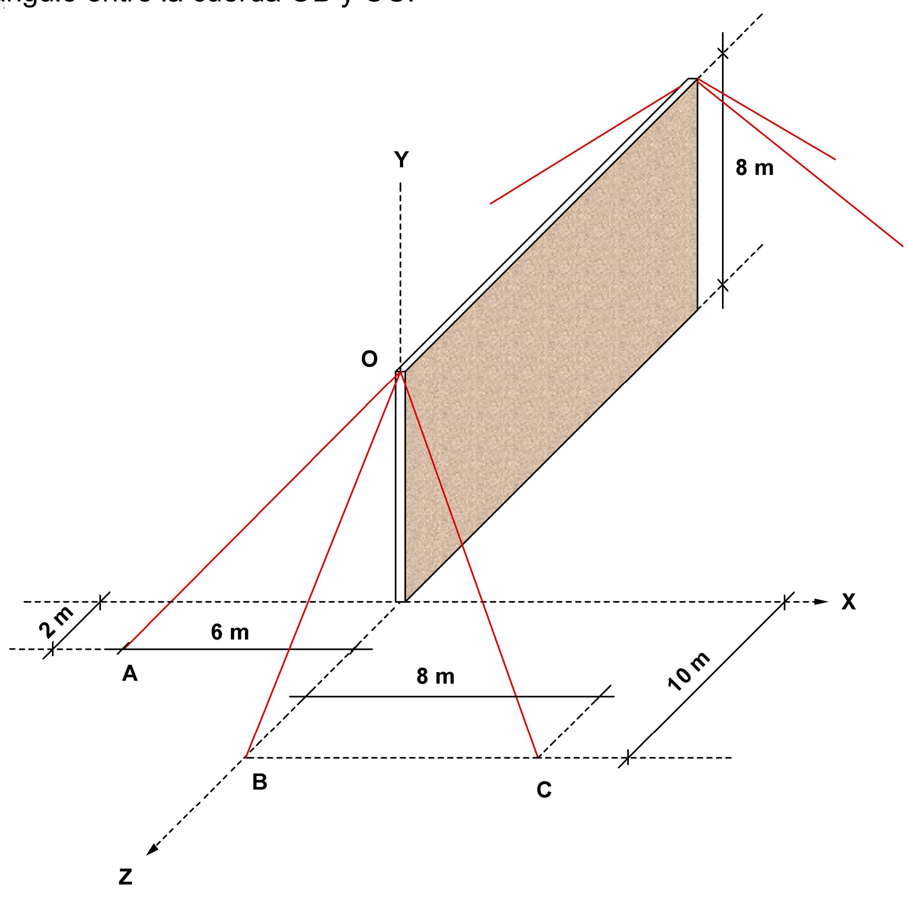



FIGURA 139

- **Datos.**

  Geometría del sistema.

- **Objetivo.**

  Determinar el ángulo entre las cuerdas OA y OB.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-Determinar las componentes y magnitud del vector $\overrightarrow{OA}$, de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{OA} = (-6\ \mathrm{m})\mathbf{i} + (-8\ \mathrm{m})\mathbf{j} + (2\ \mathrm{m})\mathbf{k}$$

  Lo que permite establecer la distancia de OA de la siguiente manera.

$$OA = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$OA \quad \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2 + (2)^2}$$

$$OA \quad \sqrt{36 + 64 + 4}$$

$$OA \quad \sqrt{104}$$

$$\boldsymbol{OA = 1\ \ .198\ m.}$$

  b).-Determinar las componentes y magnitud del vector $\overrightarrow{OB}$, de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{OB} = (0\ \mathrm{m})\mathbf{i} + (-8\ \mathrm{m})\mathbf{j} + (10\ \mathrm{m})\mathbf{k}$$

  Lo que permite establecer la distancia de OA de la siguiente manera.

$$OB \quad \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$OB \quad \sqrt{(0)^2 + (-8)^2 + (10)^2}$$

$$OB \quad \sqrt{0 + 64 + 100}$$

$$OB \quad \sqrt{164}$$

$$\boldsymbol{OB = 1\ \ .806\ m.}$$

c).-Determinar el ángulo que forman los vectores.

$$\boldsymbol{cos}\,\Theta = \frac{(\boldsymbol{u_x}.\boldsymbol{v_x}) + (\boldsymbol{u_y}.\boldsymbol{v_y}) + (\boldsymbol{u_z}.\boldsymbol{v_z})}{\sqrt{\boldsymbol{u_x^2} + \boldsymbol{u_y^2} + \boldsymbol{u_z^2}}\sqrt{\boldsymbol{v_x^2} + \boldsymbol{v_y^2} + \boldsymbol{v_z^2}}}$$

$$cos\,\Theta = \frac{(0)(8) + (-8)(-8) + (10)(10)}{(10.198)(12.806)}$$

$$cos\,\Theta = \frac{(0) + (64) + (20)}{(10.198)(12.806)}$$

$$cos\,\Theta = \frac{84}{130.595}$$

$$cos\,\Theta = 0.643$$

$$\Theta = arc\cos(\,0.643)$$

$$\Theta = \mathbf{4\ \ ^\circ\,59'2.81''}$$

d).-Determinar las componentes y magnitud del vector $\overrightarrow{OC}$, de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{OC} = (8\text{ m})\mathbf{i} + (-8\text{ m})\mathbf{j} + (10\text{ m})\mathbf{k}$$

Lo que permite establecer la distancia de OA de la siguiente manera.

$$OC = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$OC = \sqrt{(8)^2 + (-8)^2 + (10)^2}$$

$$OC = \sqrt{64 + 64 + 100}$$

$$OC = \sqrt{228}$$

$$\boldsymbol{OC} = \mathbf{1\ \ .099}\ \boldsymbol{m}.$$

e).-Determinar el ángulo que forman los vectores.

$$\boldsymbol{cos}\,\Theta = \frac{(\boldsymbol{u_x}.\boldsymbol{v_x}) + (\boldsymbol{u_y}.\boldsymbol{v_y}) + (\boldsymbol{u_z}.\boldsymbol{v_z})}{\sqrt{\boldsymbol{u_x^2} + \boldsymbol{u_y^2} + \boldsymbol{u_z^2}}\sqrt{\boldsymbol{v_x^2} + \boldsymbol{v_y^2} + \boldsymbol{v_z^2}}}$$

$$\cos \Theta = \frac{(0)(8) + (-8)(-8) + (10)(10)}{(12.806)(15.099)}$$

$$\cos \Theta = \frac{(0) + (64) + (100)}{(12.806)(15.099)}$$

$$\cos \Theta = \frac{164}{193.357}$$

$$\cos \Theta = 0.848$$

$$\Theta = arc\cos(0.848)$$

$$\Theta = \mathbf{32° \, 0' 18.72''}$$

**Ejemplo de cálculo 21.-** Una tira de madera AB se ha empotrado en la pared vertical en el punto B, como se muestra en la figura, y se sostiene mediante las cuerdas AC y AD en los apoyos C y D, respectivamente. Calcule el ángulo formado por la cuerda AC y la tira AB.

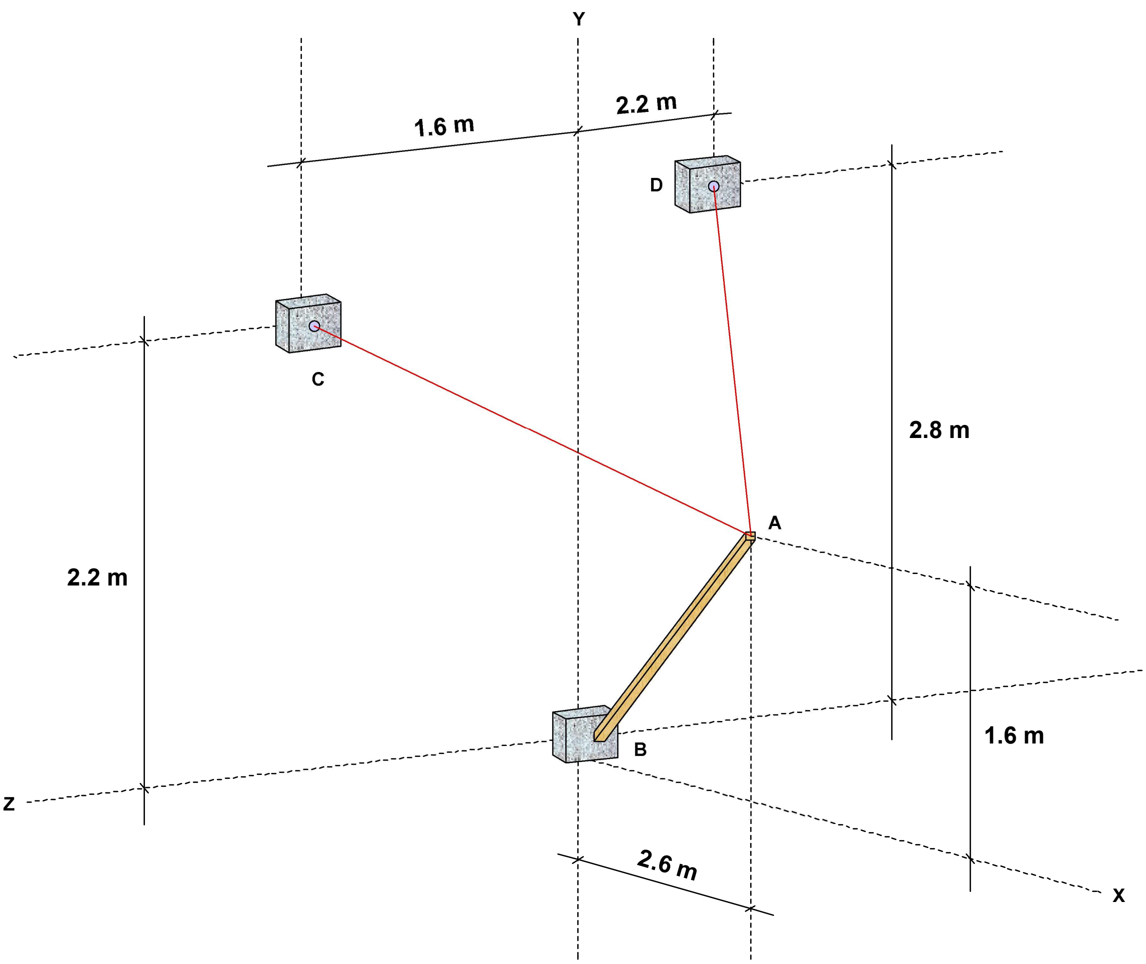



**FIGURA 140**

- **Datos.**

  Geometría del sistema.

- **Objetivo.**

  Calcular el ángulo entre la cuerda AC y la tira de madera AB.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).-Determinar las componentes y magnitud del vector $\overrightarrow{AC}$, de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{AC} = (-2.6\ \text{m})\mathbf{i} + (0.6\ \text{m})\mathbf{j} + (-1.60\ \text{m})\mathbf{k}$$

Lo que permite establecer la distancia de OA de la siguiente manera.

$$AC \quad \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$AC = \sqrt{(-2.6)^2 + (0.6)^2 + (-1.6)^2}$$

$$AC \quad \sqrt{6.76 + 0.36 + 2.56}$$

$$AC = \sqrt{9.68}$$

$$\boldsymbol{AC = 3.11\ m.}$$

b).-Determinar las componentes y magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$, de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{AB} = (-2.6\ \text{m})\mathbf{i} + (-1.6\ \text{m})\mathbf{j} + (0\ \text{m})\mathbf{k}$$

Lo que permite establecer la distancia de OA de la siguiente manera.

$$AB = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$AB = \sqrt{(-2.6)^2 + (-1.6)^2 + (0)^2}$$

$$AB \quad \sqrt{6.76 + 2.56 + 0}$$

$$AB = \sqrt{9.32}$$

$$\boldsymbol{AB = 3.052\ m.}$$

c).-Determinar el ángulo que forman los vectores.

$$\boldsymbol{cos}\,\Theta = \frac{(\boldsymbol{u_x}.\boldsymbol{v_x}) + (\boldsymbol{u_y}.\boldsymbol{v_y}) + (\boldsymbol{u_z}.\boldsymbol{v_z})}{\sqrt{\boldsymbol{u_x^2} + \boldsymbol{u_y^2} + \boldsymbol{u_z^2}}\sqrt{\boldsymbol{v_x^2} + \boldsymbol{v_y^2} + \boldsymbol{v_z^2}}}$$

$$cos\,\Theta = \frac{(-2.6)(-2.6) + (0.6)(-1.6) + (-1.6)(0)}{(3.11)(3.052)}$$

$$cos\,\Theta = \frac{(6.76) - (0.96) + (0)}{(3.11)(3.052)}$$

$$cos\,\Theta = \frac{5.8}{9.491}$$

$$cos\,\Theta = 0.611$$

$$\Theta = arc\cos(\,0.611)$$

$$\Theta = \mathbf{5\ \ {}^{\circ}20'17,36''}$$

**Ejemplo de cálculo 22.-** En el ejercicio anterior, Determine la proyección sobre la tira de madera AB de la fuerza ejercida por la cuerda AC, en el punto A, si se conoce que la tensión en la cuerda es de 2000 N.

- **Datos.**

  Magnitud de la tensión en la cuerda AC = 2000 N.

  Valor del ángulo comprendido $\Theta = \mathbf{5\ \ {}^{\circ}20'17,36''}$

- **Objetivo.**

  Determinar la proyección sobre la tira de madera AB de la fuerza ejercida por la cuerda AC, en el punto A

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-El valor de la proyección sobre la tira de madera AB de la fuerza ejercida por la cuerda AC, en el punto A se determina a través de la siguiente relación.

$$OC = |\vec{u}|\,cos\,\Theta$$

$$OC = 2000\,N\,(co \quad \mathbf{52° \, 20'17,36''})$$

$$\boldsymbol{OC \qquad 1221.999\ N.}$$

**Ejemplo de cálculo 23.-** Referido al ejercicio 21. Determine el ángulo formado por la cuerda AD y la tira AB.

- **Datos.**

  Geometría del sistema.

- **Objetivo.**

  Determinar el ángulo entre la cuerda AD y la tira de madera AB.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-Determinar las componentes y magnitud del vector $\overrightarrow{AD}$, de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{AD} = (-2.6\text{ m})\mathbf{i} + (1.2\text{ m})\mathbf{j} + (-2.2\text{ m})\mathbf{k}$$

  Lo que permite establecer la distancia de OA de la siguiente manera.

$$AD \qquad \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$AD \qquad \sqrt{(-2.6)^2 + (1.2)^2 + (-2.2)^2}$$

$$AD \qquad \sqrt{6.76 + 1.44 + 4.84}$$

$$AD = \sqrt{13.04}$$

$$\boldsymbol{AD = 3.611\ m.}$$

  b).-Determinar las componentes y magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$, de la gráfica se establece que:

$$\overrightarrow{AB} = (-2.6\text{ m})\mathbf{i} + (-1.6\text{ m})\mathbf{j} + (0\text{ m})\mathbf{k}$$

  Lo que permite establecer la distancia de OA de la siguiente manera.

$$AB \qquad \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$AB = \sqrt{(-2.6)^2 + (-1.6)^2 + (0)^2}$$

$$AB = \sqrt{6.76 + 2.56 + 0}$$

$$AB \qquad \sqrt{9.32}$$

$$\boldsymbol{AB = 3.052\ m.}$$

c).-Determinar el ángulo que forman los vectores.

$$\boldsymbol{cos}\ \Theta = \frac{(\boldsymbol{u_x}.\boldsymbol{v_x}) + (\boldsymbol{u_y}.\boldsymbol{v_y}) + (\boldsymbol{u_z}.\boldsymbol{v_z})}{\sqrt{\boldsymbol{u_x^2} + \boldsymbol{u_y^2} + \boldsymbol{u_z^2}}\sqrt{\boldsymbol{v_x^2} + \boldsymbol{v_y^2} + \boldsymbol{v_z^2}}}$$

$$cos\ \Theta = \frac{(-2.6)(-2.6) + (1.2)(-1.6) + (-2.2)(0)}{(3.611)(3.052)}$$

$$cos\ \Theta = \frac{(6.76) - (1.92) + (0)}{(3.611)(3.052)}$$

$$cos\ \Theta = \frac{4.84}{11.020}$$

$$cos\ \Theta = 0.439$$

$$\Theta = arc\cos(0.439)$$

$$\Theta = \boldsymbol{63°\ 57'35.66''}$$

**Ejemplo de cálculo 24.-** En el ejercicio anterior. Halle la proyección sobre la tira de madera AB de la fuerza ejercida por la cuerda AD, en el punto A, si se conoce que la tensión en la cuerda es de 1800 N.

- **Datos.**

Magnitud de la tensión en la cuerda AD = 1800 N.

Valor del ángulo comprendido $\Theta = \boldsymbol{62°\ 57'35.66''}$

- **Objetivo.**

Hallar la proyección sobre la tira de madera AB de la fuerza ejercida por la cuerda AD, en el punto A

- **Procedimiento de cálculo.**

a).-El valor de la proyección sobre la tira de madera AB de la fuerza ejercida por la cuerda AD, en el punto A se determina a través de la siguiente relación.

$$OC = |\vec{u}|\ cos\ \Theta$$

$$OC = 1800\ N\ (cos\ \mathbf{62°\ 57'\ 35.66''})$$

$$\boldsymbol{OC = 818.305\ N.}$$

## 3.10 MOMENTO DE UN PAR DE FUERZAS.

Se manifiesta que, un **par de fuerzas** es un sistema formado por la aplicación de dos fuerzas **F** y **F'** aplicadas a un cuerpo y que cumplen con las condiciones que se enuncian a continuación, sus magnitudes son las mismas, sus líneas de acción paralelas, y, además sus sentidos son opuestos.

Es evidente que, al sumar las componentes del par de fuerzas aplicadas en cualquier dirección, su resultado será nulo, sin embargo la sumatoria de los momentos que ellas producen sobre el cuerpo no lo es.

Es importante reconocer que un par de fuerzas aplicadas a un cuerpo produce una rotación, mas no traslación, o lo que se denomina una torsión, y depende del valor de la magnitud de las fuerzas que forman el par, y evidentemente del valor de la distancia entre ellas, denominado **brazo del par.**

Un ejemplo característico de lo antes expuesto, es lo que sucede cuando se aplica un par de fuerzas a la llave del vehículo para retirar una rueda ponchada, se aplican fuerzas iguales pero cuyos sentidos son opuestos.

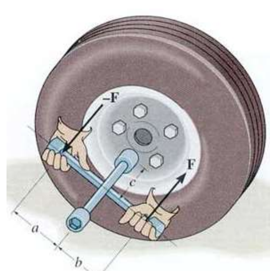



**FIGURA 141**[17]

[17] http://www.profesorenlinea.cl/fisica/Fuerzas_Par_de.html

A continuación se enuncian algunas propiedades que se aplican al par de fuerzas:

- "Todo par de fuerzas puede trasladarse paralelamente a sí mismo siguiendo la dirección de las fuerzas componentes sin que varíe el efecto que produce.
- Todo par de fuerzas puede desplazarse a lo largo de la recta a la que pertenece su brazo.
- Un par de fuerzas se transforma en otro equivalente cuando gira alrededor del punto medio de su brazo.
- Un par de fuerzas puede trasladarse a otro plano paralelo al suyo manteniendo su efecto.
- Todo par de fuerzas puede sustituirse por otro equivalente cuyas fuerzas componentes y brazo del par sean diferentes."[18]

Sean $r_A$ y $r_B$, los valores de los vectores posición con respecto a los puntos de aplicación de las fuerzas consideradas F y –F, sabiendo que **F'= -F**, se determina que la sumatoria de los momentos de estas fuerzas con respecto al punto O, está dado por la siguiente expresión.

$$\boldsymbol{M_O = (F\ x\ r_A) + (\ -F\ x\ \ r_B) = (r_A -\ r_B)\ \ x\ F}$$

Ahora, definiendo $(\boldsymbol{r_A -\ r_B})$ como $\boldsymbol{r}$ y considerándolo como un vector que une los puntos de aplicación de las fuerzas consideradas se tendrá.

$$\boldsymbol{M_O = rF}$$

De esta manera.

$$\boldsymbol{M_O = rFsen}\Theta = \boldsymbol{Fd} \quad \textit{(31)}$$

Donde d se define como la distancia perpendicular o normal entre las líneas de acción de F y F', el sentido del momento resultante quedará definido por la regla de la mano derecha.

[18] Tomado de https://es.wikipedia.org/wiki/Par_de_fuerzas

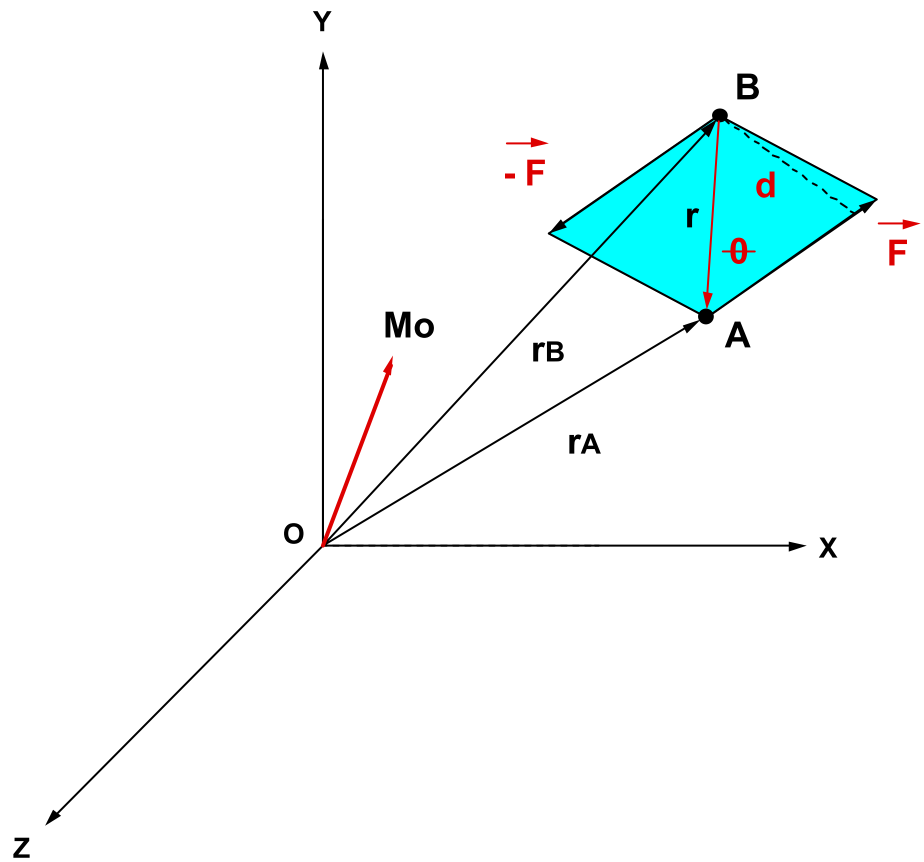



FIGURA 142

## 3.11 PARES EQUIVALENTES DE FUERZAS.

“Cuando un par actúa sobre un cuerpo rígido, es irrelevante donde actúan las dos fuerzas que forman el par, o cuales son las magnitudes y la dirección que estas fuerzas tienen. Lo único que importa es el momento del par (su magnitud y dirección). Los pares con el mismo momento tendrán el mismo efecto sobre el cuerpo rígido.”[19]

En las siguientes ilustraciones se puede apreciar tres ejemplos donde se consideran pares de fuerzas actuando sobre una caja de tipo rectangular, en ellos se puede verificar que el único movimiento que las fuerzas podrán ocasionar sobre el cuerpo es de tipo rotacional, eliminando la posibilidad física de desplazamiento en alguna dirección, además se evidencia que el momento al ser idéntico en magnitud y tener la misma dirección producirá el mismo efecto sobre la caja en cuestión para los tres ejemplos mostrados en las figuras expuestas a continuación.

[19] http://es.slideshare.net/asesoracademico/03-momento-de-un-par-pares-equivalentes-descomposicion-de-una-fuerza-dada-en-una-fuerza-en-o-y-un-par

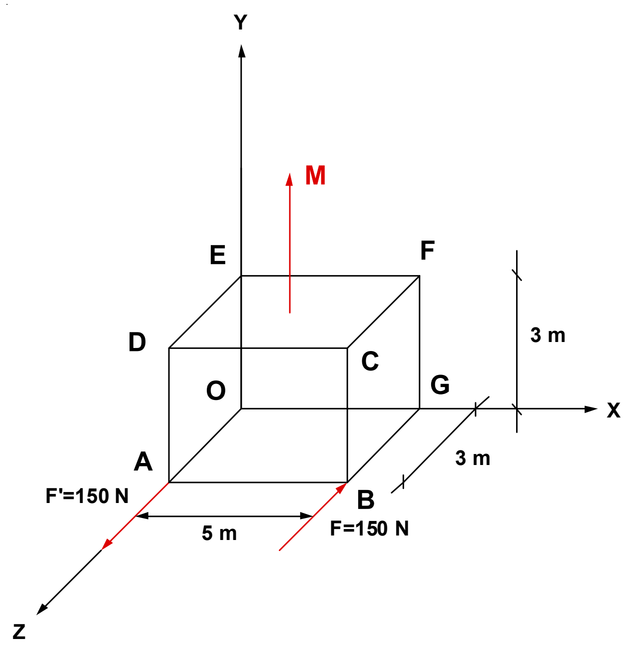



FIGURA 143

$$M_O = rF$$

$$M_O = (5m)(150N) = 750\ Nm.$$

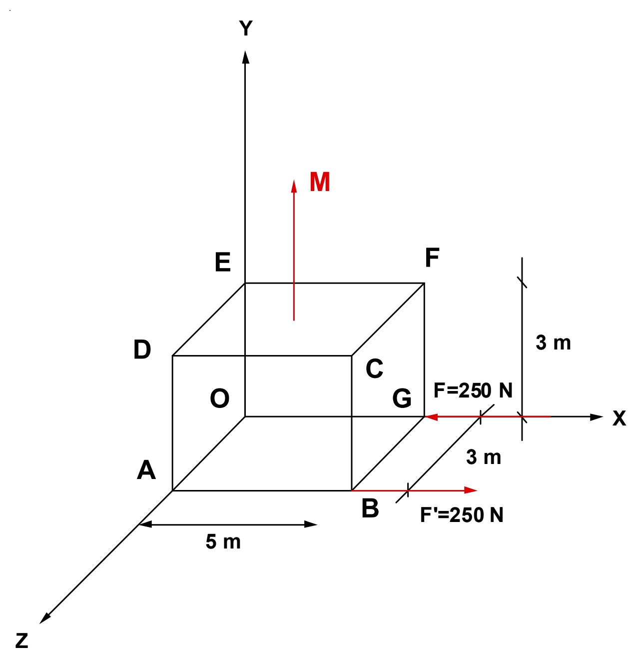



FIGURA 144

$$M_O = rF$$

$$M_O = (3m)(250N) = 750\ Nm.$$

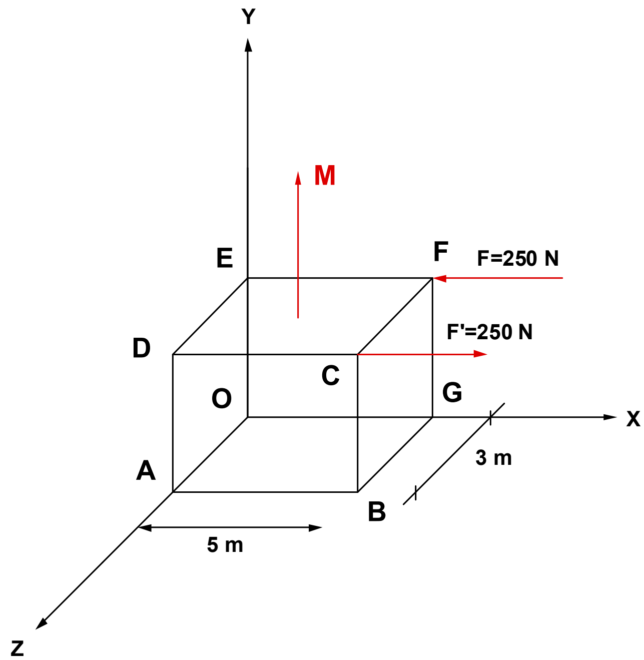



FIGURA 145

$$M_O = rF$$

$$M_O = (3m)(250N) = 750\ Nm.$$

## 3.12 SUMA DE PARES.

La sumatoria de dos pares cuyos momentos tienen la misma magnitud, denotados por $M_1$ y $M_2$ es un denominado par de momento $M$, que resulta como la suma vectorial de $M_1$ y $M_2$.

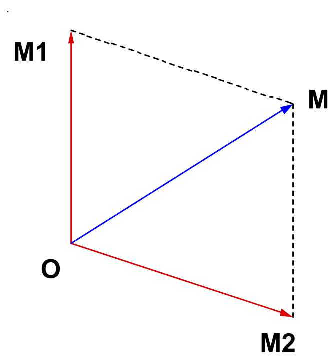



FIGURA 146

$$M = (rF_1) + (rF_2)$$

$$\boldsymbol{M = (M_1) + (M_2)} \quad \textbf{\textit{(32)}}$$

### 3.13 DESCOMPONIENDO UNA FUERZA CONOCIDA EN OTRA EN UN PUNTO DETERMINADO O, Y UN PAR.

Cualquier fuerza F que actúa sobre un cuerpo, podrá ser trasladada a otro punto dentro del cuerpo, de manera absolutamente arbitraria, con la condición de que se considere un nuevo par cuyo momento sea equivalente al momento considerado de F con respecto al punto donde se considera el traslado, de tal manera que, el par que se genera sea capaz de producir el mismo movimiento de rotación producido por la fuerza antes de la traslación, para que el sistema no se altere.

En la siguiente gráfica se puede apreciar la aplicación de una fuerza F sobre el punto A, y el vector posicional r, de O respecto de A.

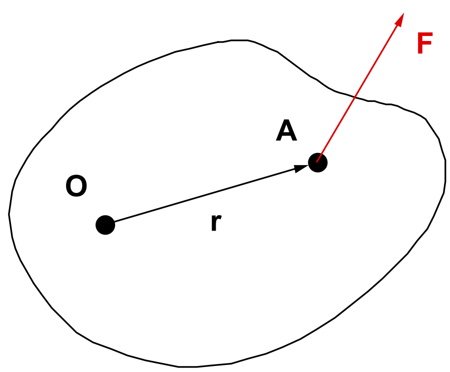



**FIGURA 147**

Luego podrá ubicarse dos fuerzas en el punto O, iguales a F y F', que no modifiquen el efecto que la fuerza original F produce sobre el cuerpo, de la siguiente manera.

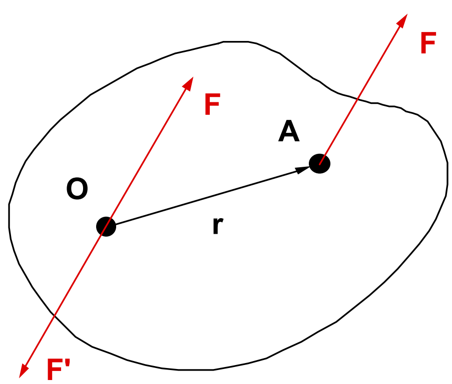



**FIGURA 148**

De esta manera se obtendrá una fuerza F aplicada sobre O, el otro par de fuerzas en el sistema equivalente formaran un par cuyo momento será igual al producido por F en su punto de aplicación original con respecto al mismo punto O, es decir $\boldsymbol{M_O = r \; x \; F}$.

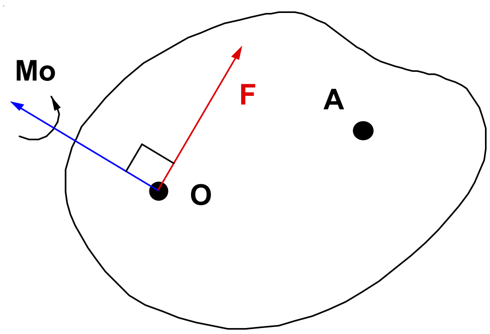



**FIGURA 149**

Estas consideraciones nos llevan entonces a la siguiente relación general.

$$\boldsymbol{M_{O'} = r' x \; F = (\; r + s) x \; F = r \; x \; F + s \; x \; F}$$

De donde: $$\boldsymbol{M_{O'} = \; M_O + s \; x \; F}$$

## 3.14 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

**Ejemplo de cálculo 25.-** La viga de madera se encuentra anclada sobre el punto O, como se muestra en la figura, sobre ella actúan un par de fuerzas cuyas características se especifican en la gráfica. Determine analíticamente la sumatoria de los momentos producidos por las fuerzas con respecto a los puntos O, A, y sobre otro punto Q cuyas coordenadas rectangulares son X= 18m y Y= 8m, fuera de la viga.

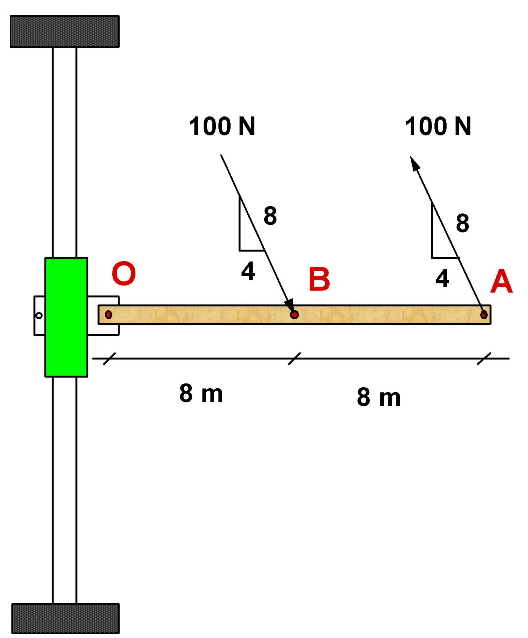



**FIGURA 150**

- **Datos.**

  Magnitud de las fuerzas aplicadas al sistema 100N.

  Valor del ángulo director, especificado en características del ejercicio.

- **Objetivo.**

  Determinar analíticamente la sumatoria de los momentos producidos por las fuerzas con respecto al punto O.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-Determinar los ángulos directores del par de fuerzas aplicadas.

$$\cos \theta = \frac{4}{8}$$

$$\cos \theta = 0.5$$

$$\theta = arc \cos(0.5)$$

$$\theta = \mathbf{60°}$$

b).-Establecer la magnitud de las componentes verticales de las fuerzas, puesto que las horizontales, producen momento nulo al pasar sus líneas de acción por el centro de momentos O.

$$Fy = F\ sen\ \theta$$

$$Fy = 100\ N\ sen\ 60°$$

$$\boldsymbol{Fy = 86.602\ N}$$

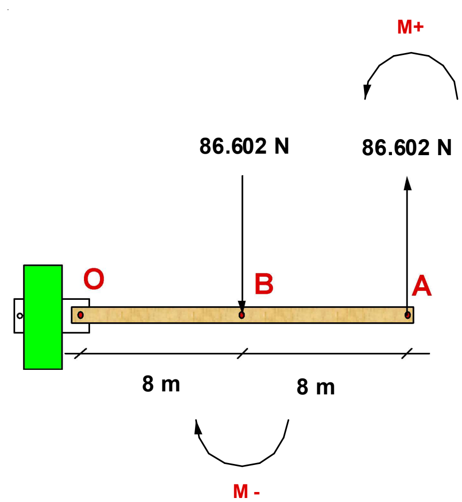



FIGURA 151

c).- Para determinar analíticamente la sumatoria de los momentos producidos por las fuerzas con respecto al punto O, se tendrá respetando la convención de signos establecida:

$$M_O = -(86.602N)(8m) + (86{,}602N)(16m)$$

$$M_O = -692.816 + 1385.632$$

$$\boldsymbol{M_O = 692.816\ Nm}$$

**Para el momento con respecto de A.**

- **Datos.**

  Magnitud de las fuerzas aplicadas al sistema 100N.

  Valor del ángulo director, especificado en características del ejercicio.

- **Objetivo.**

  Determinar analíticamente la sumatoria de los momentos producidos por las fuerzas con respecto al punto A.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-Determinar los ángulos directores del par de fuerzas aplicadas.

$$cos\ \Theta = \frac{4}{8}$$

$$cos\ \Theta = 0.5$$

$$\Theta = arc\cos(\ 0.5)$$

$$\Theta = \mathbf{6}\ \ °$$

  b).-Establecer la magnitud de las componentes verticales de las fuerzas.

$$Fy = F\ sen\ \Theta$$

$$Fy = 100\ N\ sen\ 60°$$

$$\boldsymbol{Fy = 8\ \ .602\ N}$$

  c).- Para determinar analíticamente la sumatoria de los momentos producidos por las fuerzas con respecto al punto A, respetando la convención de signos establecida, y considerando que la fuerza aplicada sobre A, produce momento nulo por ser su brazo de palanca igual a cero se tendrá.

$$M_O = (86.602N)(8m) + (86{,}602N)(0\ m)$$

$$M_O = 692.816 + 0$$

$$\boldsymbol{M_O = 692.816\ Nm}$$

**Para el momento con respecto del punto cuyas coordenadas rectangulares son X= 18m y Y= 8m, fuera de la viga.**

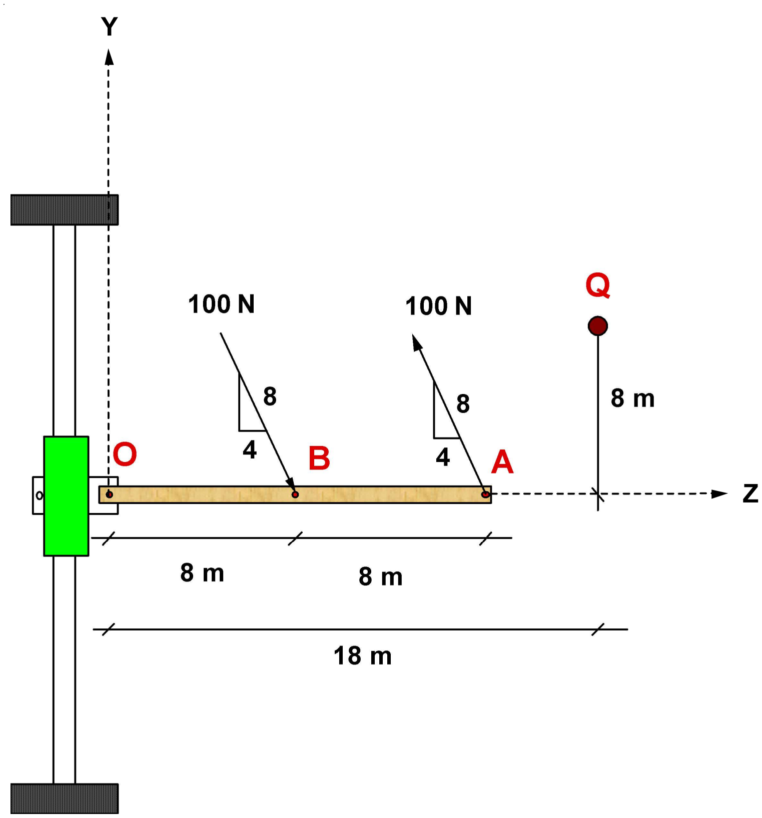



FIGURA 152

- **Datos.**

  Magnitud de las fuerzas aplicadas al sistema 100N.

  Valor del ángulo director, especificado en características del ejercicio.

- **Objetivo.**

  Determinar analíticamente la sumatoria de los momentos producidos por las fuerzas con respecto al punto Q.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).-Determinar los ángulos directores del par de fuerzas aplicadas.

$$cos\ \theta = \frac{4}{8}$$

$$cos\ \theta = 0.5$$

$$\theta = arc\cos(0.5)$$

$$\theta = \mathbf{60°}$$

b).-Establecer la magnitud de las componentes horizontales y verticales de las fuerzas aplicadas al sistema.

$$Fx = F\ cos\ \theta$$

$$Fx = 100\ N\ cos\ 60°$$

$$\boldsymbol{Fx = 50\ N}$$

$$Fy = F\ sen\ \theta$$

$$Fy = 100\ N\ sen\ 60°$$

$$\boldsymbol{Fy = 86.602\ N}$$

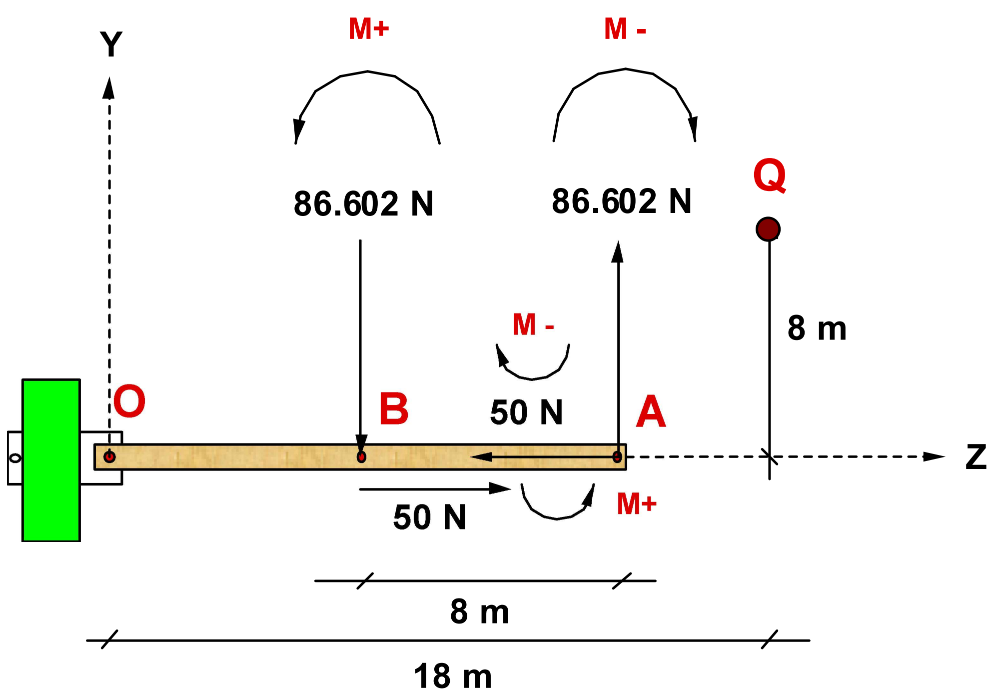



FIGURA 153

c).- Para determinar analíticamente la sumatoria de los momentos producidos por las fuerzas con respecto al punto Q, respetando la convención de signos establecida se tendrá.

$$M_Q = (86.602\ N)(10\ m) - (86{,}602\ N)(2\ m) + (50\ N)(8\ m) - (50\ N)(8\ m)$$

$$M_Q = (\ 866.02\ Nm) - (173.204\ Nm) + (400\ Nm) - (400\ Nm$$

$$\boldsymbol{M_Q} = (\ \boldsymbol{692.816\ Nm})$$

**Ejemplo de cálculo 26.-** El sistema de engranaje mostrado en la figura, tiene como radio interno r = 0.005 m. y sobre él se aplican dos fuerzas de 70 N, de sentido contrario. Determine el momento del par de fuerzas y el par equivalente del sistema mostrado en la gráfica que actué sobre los puntos P y Q.

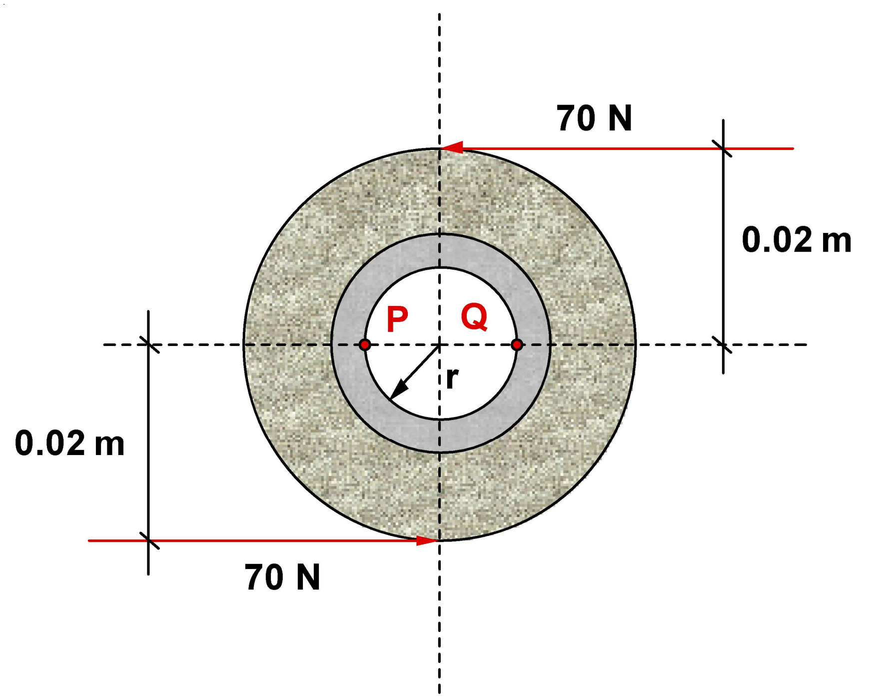



FIGURA 154

- **Datos.**

Magnitud de las fuerzas aplicadas al sistema 70 N.

Radio interno del sistema r = 0.005 m.

- **Objetivo.**

Determinar el par equivalente, del par mostrado en la gráfica que actué sobre los puntos P y Q.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-Determinar el momento del par, recordando que el mismo estará dado por la relación $\mathrm{M_O} = \mathrm{r \times F}$ donde r se define como la distancia perpendicular o normal entre las líneas de acción de F y F'.

$$M = rF$$

$$M = (0.04\, m)(70\, N)$$

$$\boldsymbol{M = (2.8\, Nm}$$

b).-Establecer el par equivalente que pase por los puntos P y Q, conociendo que el mismo tendrá un momento igual a:

$$M' = r'F'$$

De donde se tendrá.

$$\boldsymbol{F' = \frac{M'}{r'}}$$

$$F' = \frac{2.8\, Nm}{(0.02\, m - 0.005\, m)}$$

$$F' = \frac{2.8\, Nm}{(0.015\, m)}$$

$$\boldsymbol{F' = 186.666\, N}$$

**Ejemplo de cálculo 27.-** Una viga metálica se ha empotrado en la pared como se muestra en la figura, si sobre ella actúan un par de fuerzas de 120 N de sentido contrario. Halle el momento del par mostrado en la gráfica.

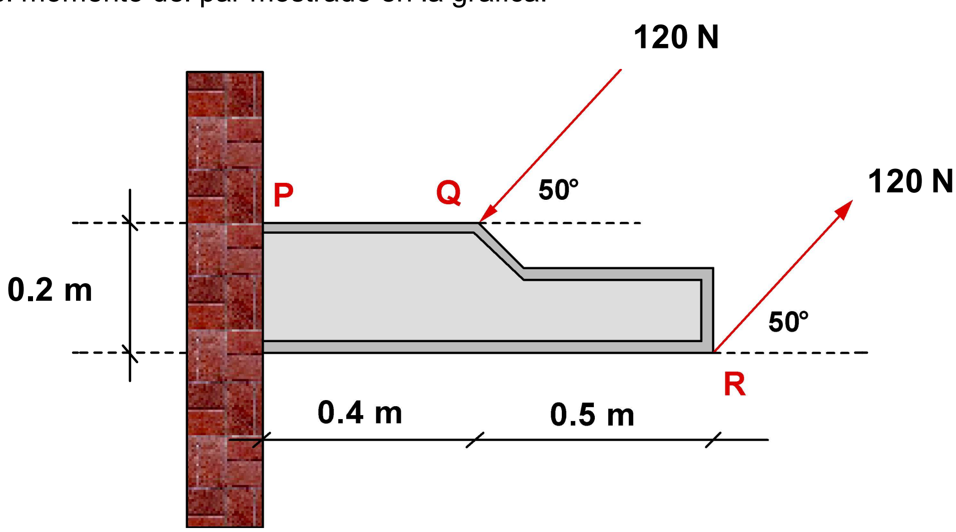



FIGURA 155

- **Datos.**

  Magnitud de las fuerzas aplicadas al sistema 120 N.

  Ángulo director de los vectores 50°

- **Objetivo.**

  Hallar el momento del par mostrado en la gráfica.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-Elegir de manera arbitraria el punto donde se determinará el momento, en este caso se ha elegido el punto Q.

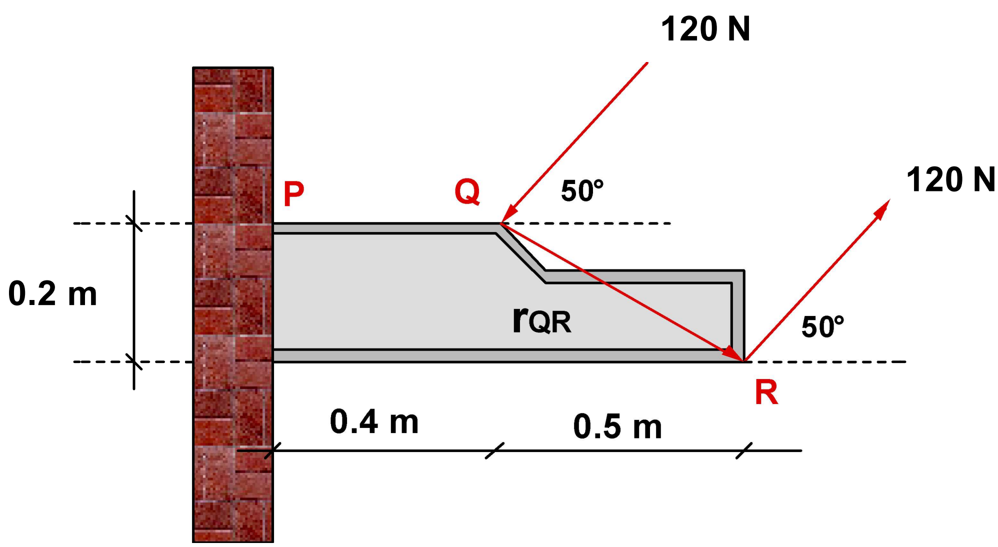



FIGURA 156

b).-Determinación del vector posición.

$$r_{AB} = (0.5\ m)i - (0.2\ m)j$$

c).-Establecer el vector fuerza.

$$F = 120N\ (sen\ 50°)i + 120N\ (cos\ 50°)j$$

$$F = 91.925\ N\ i + 77.134\ N\ j$$

d).-Cálculo del momento.

$$M = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0.5 & -0.2 & 0 \\ 91.925 & 77.134 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -0.2 & 0 \\ 77.134 & 0 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 0.5 & 0 \\ 91.925 & 0 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 0.5 & -0.2 \\ 91.925 & 77.134 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$M = [(0.5)(77.134) - (91.925)(-0.2)]\vec{k}$$

$$M = [(38.567) + (18.385)]\vec{k}$$

$$\boldsymbol{M = 56.952\,\vec{k}\ Nm.}$$

**Ejemplo de cálculo 28.-** Sobre una rueda de molino de aplican las fuerzas mostradas en la figura. Calcule el par o momento producido por las fuerzas aplicadas.

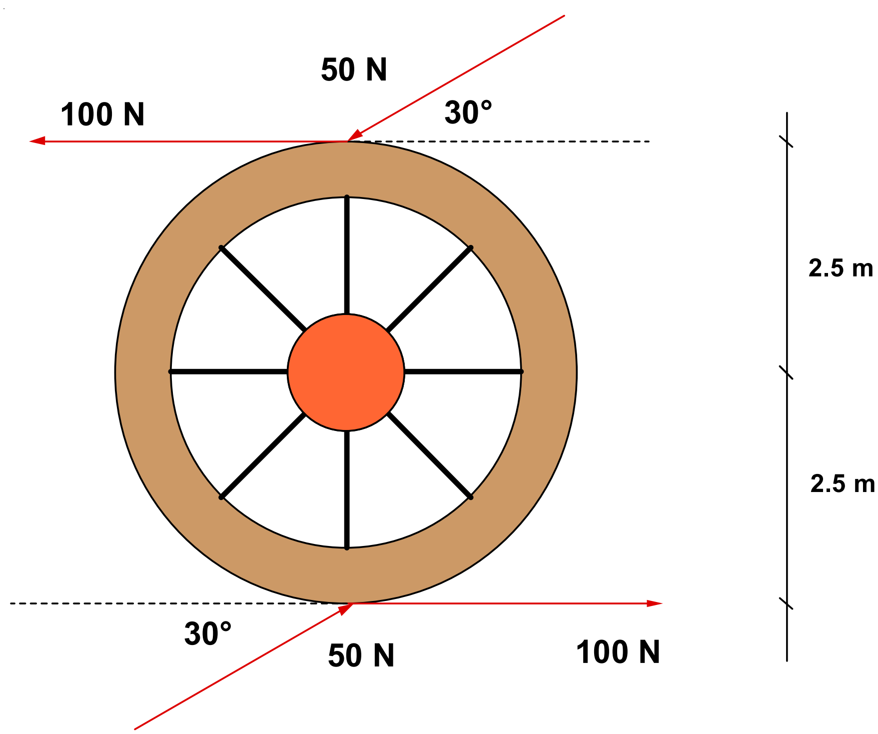



FIGURA 157

- **Datos.**

Magnitud de las fuerzas aplicadas al sistema 100 N, y 50N.

Ángulo director de los vectores 30°

- **Objetivo.**

Calcular el momento de las fuerzas aplicadas al sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).-Determinar el momento del primer par de fuerzas.

$$M_1 = (100\ N)(5\ m)\ ; \quad \boldsymbol{M_1 = (500\ Nm)}$$

b).-Determinar el momento del segundo par de fuerzas.

$$M_1 = (50\ N \cos 30°\ )(5\ m)\ ; \quad \boldsymbol{M_1 = (216.506\ Nm)}$$

c).-Determinar el momento resultante.

$$M = M_1 + M_2$$

$$M = 500\ Nm + 216.506\ Nm\ ; \quad \boldsymbol{M = 716.506\ Nm}$$

**Ejemplo de cálculo 29.-** Sobre las barras soldadas PQ y RS, se aplican fuerzas como se muestra en la figura. Halle las componentes del par simple que resulte equivalente a los pares indicados.

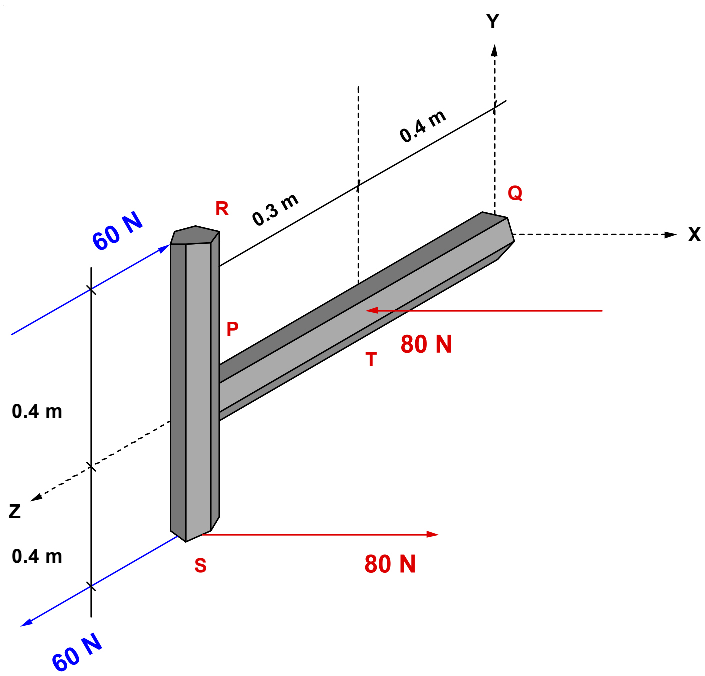



**FIGURA 158**

- **Datos.**

  Magnitud de las fuerzas aplicadas al sistema 80 N, y 60N.

  **Objetivo.**

  Hallar las componentes del par simple que resulte equivalente a los pares indicados.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-Se elige como primer par a las fuerzas de 60 N, y segundo par de análisis a las correspondientes de 80 N; Adicionalmente se tomará como punto arbitrario para la determinación de momentos al punto S, de esta manera se tendrá:

$$\boldsymbol{M = r_{R/s}\, x\, F_1 + r_{T/S}\, x\, F_2}$$

  b).-Fuerzas.

$$F_1 = -60\;N\;k \qquad\qquad F_2 = -80\;N\;i$$

  c).-Vectores posición.

$$r_{R/S} = 0.8\;m\;j \qquad\qquad r_{T/S} = 0.4\;m\;j - 0.3\;m\;k$$

  d).-Momento resultante.

$$M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0.4 & -0.3 \\ -80 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M = \left[\big((18) - (60)\big)i - 0j + 0k\,\right] + \left[0i - \big((-80)(-0.3)\big)j - ((-80)(0.4))k\right]$$

$$M = [-1080i - 0j + 0k\,] + [0i - 24j + 32k]$$

$$\boldsymbol{M = -1080i - 24j} +$$

**Ejemplo de cálculo 30.-** En la guillotina de la figura se aplican un par de fuerzas de 10 N y una fuerza de 30 N. Determine el momento con respecto al ponto A, que sea equivalente al sistema mostrado, valor de r = 0.05 m.

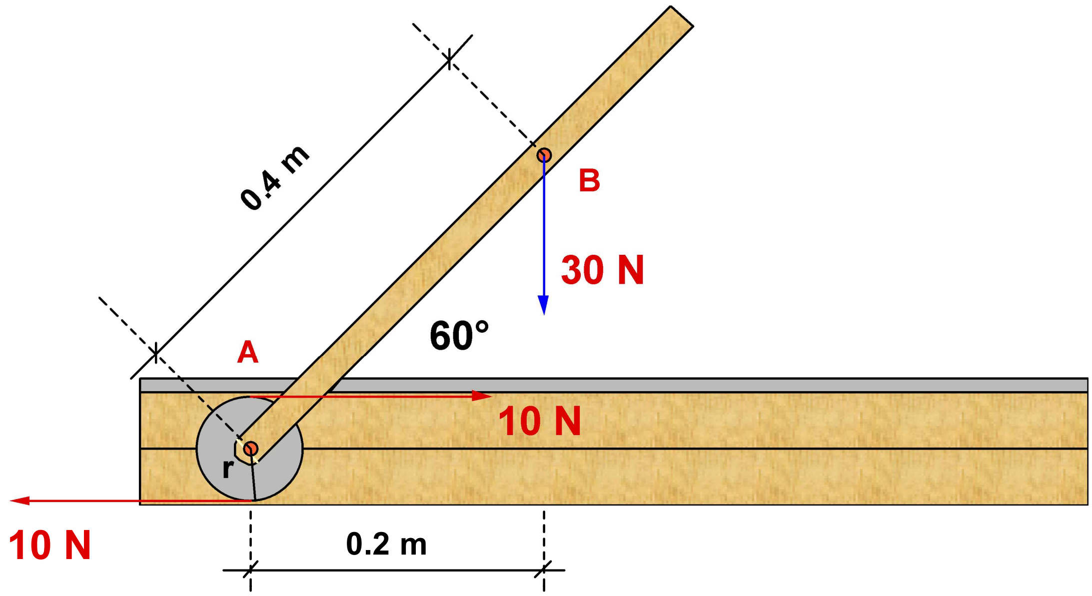



FIGURA 159

- **Datos.**

  Magnitud de las fuerzas aplicadas al sistema 30 N, y un par de 10 N, aplicados como se muestra en la figura correspondiente.

  Valor de r = 0.05m.

  **Objetivo.**

  Determinar el momento con respecto al punto A, que sea equivalente al sistema mostrado.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-Determinar el momento que produce el par con respecto al punto A.

$$M_{A1} = Fd$$

$$M_{A1} = (-10\ N)((2)(0.05\ m))$$

$$\boldsymbol{M_{A1} = -1Nm\ k}$$

Nótese que el momento es de signo negativo por cuanto gira a favor de las manecillas del reloj.

b).-Determinar el momento que produce la fuerza de 30 N, con respecto al punto A.

$$M_{A2} = r_{B/A} \ x \ F$$

$$M_{A2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.4\cos 60° & 0.4sen60° & 0 \\ 0 & -30 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{A2} = [(0.4 \cos 60°)(-30)] \ k$$

$$\boldsymbol{M_{A2} = -6 \ Nm \ k}$$

c).- El momento con respecto al punto A, que sea equivalente al sistema mostrado será.

$$M_A = M_{A1} + M_{A2}$$

$$M_A = -1 \ Nm \ k + (-6 \ Nm \ k)$$

$$\boldsymbol{M_A = -7 \ Nm \ k}$$

**Ejemplo de cálculo 31.-** En el ejemplo anterior. Calcule la ubicación del punto de aplicación de la fuerza equivalente.

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerza equivalente, - 30 N j.

  Valor del momento $M_A = -7 \ Nm \ k$

  **Objetivo.**

  Calcular la ubicación del punto de aplicación de la fuerza equivalente.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).-Calcular la distancia $d_{CA}$, donde debe aplicarse la fuerza de 30 N.

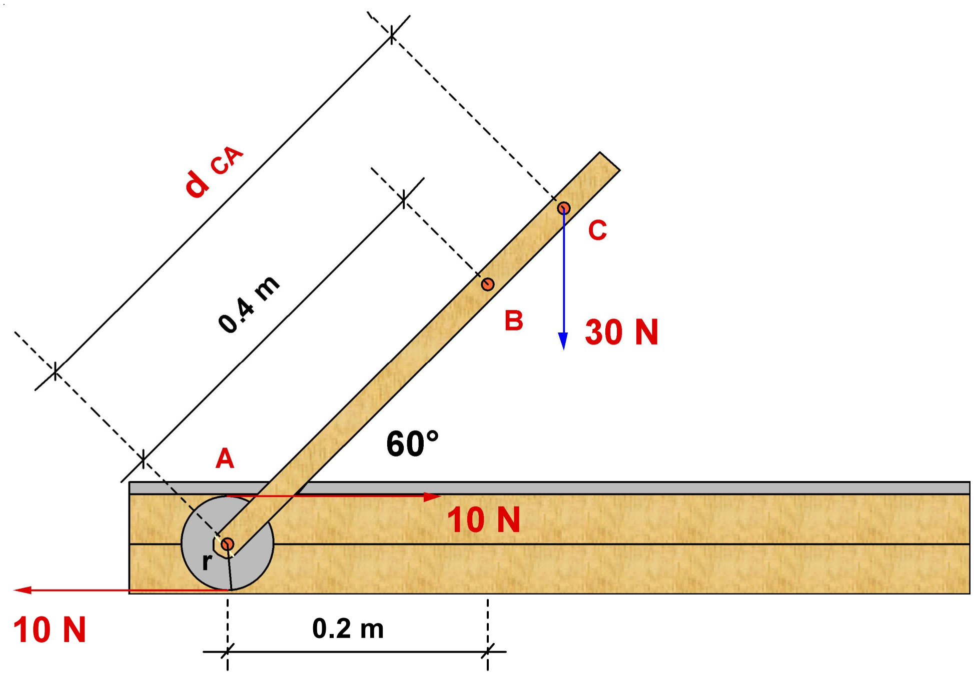



**FIGURA 160**

$$M_A = r_{C/A}\ x\ F$$

$$M_A = \begin{bmatrix} i & j & k \\ d_{CA}\ cos\ 60° & d_{CA}\ sen\ 60° & 0 \\ 0 & -30 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_A = \left((d_{CA} \cos 60°)(-30\ N)\right)k$$

$$M_A = -15\ N\ d_{CA}\ k$$

$$-\ 7\ Nm\ k = -15\ N\ d_{CA}\ k$$

$$\boldsymbol{d_{CA} = 0.466\ m.}$$

## 3.15 REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS APLICADAS A UN CUERPO, A UNA FUERZA Y UN PAR EQUIVALENTE.

Cualquier sistema de fuerzas, puede ser transformado a otro sistema equivalente **fuerza-par**, que actuará sobre un punto determinado O.

Este nuevo sistema fuerza-par estará representado analíticamente por las siguientes relaciones.

$$R = \sum F \qquad \textit{(33)}$$

La expresión indica que, R será el resultado de la suma de todas las fuerzas interactuantes en el sistema.

$$\boldsymbol{M_O^R} = \sum \boldsymbol{M_O} = \sum(\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{F}) \qquad \textit{(34)}$$

El momento resultante del sistema, se determinará mediante la sumatoria de los momentos producidos por las diferentes fuerzas interactuantes del sistema con respecto a un punto determinado.

Es evidente que en el proceso de ejecución de los ejercicios se deberá considerar los vectores individuales r y F, con sus respectivas componentes rectangulares así:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_x}\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{R_y}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{R_z}\,\boldsymbol{k} \qquad \textit{(35)}$$

$$\boldsymbol{M_O^R} = \boldsymbol{M_x^R}\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{M_y^R}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{M_z^R}\,\boldsymbol{k} \qquad \textit{(36)}$$

Existen consideraciones especiales que deben ser tomadas en cuenta para el análisis y que permiten la reducción de un sistema a una sola fuerza, de esta manera se concluye que la condición se cumplirá siempre y cuando $R\ y\ M_O^R$ sean perpendiculares o normales entre sí.

Es importante recalcar el hecho que esta condición no se cumple en general para el caso de sistemas de fuerzas interactuantes en el espacio, y si se satisface para fuerzas coplanarias, concurrentes, y, paralelas.

## 3.16 REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UN TORSOR.

Cuando se considera un sistema de fuerzas aplicadas sobre un cuerpo en el espacio, el sistema fuerza-par con respecto a un determinado punto, estará constituido por una fuerza resultante **R**, y un vector de par $\boldsymbol{M_R^O}$, cuyas características son, ambos serán diferentes de cero, y como se definió anteriormente no serán perpendiculares o normales entre sí.

La última característica permite establecer que, el sistema de fuerzas aplicadas no podrá ser reducido a una sola fuerza o a un solo par, por lo que el vector de par debe ser reemplazado por otros dos vectores de par que se obtendrán al descomponer $\boldsymbol{M_0^R}$ en una componente $\boldsymbol{M_1}$ a lo largo de **R** y una componente $\boldsymbol{M_2}$ en un plano perpendicular a **R**.

Ahora, el vector de par $\mathbf{M_2}$, y la fuerza **R** podrán ser remplazadas por una sola fuerza **R** que actúa a lo largo de una nueva línea de acción; Por lo tanto el sistema original de fuerzas aplicadas se reduce a **R** y un par que actúa en el plano perpendicular a **R**, a este sistema se le denomina un **torsor.**

Estas consideraciones permiten obtener las siguientes relaciones.

$$\boldsymbol{M_1 = pR} \quad \textbf{\textit{(37)}}$$

O también

$$\boldsymbol{p = \frac{M_1}{R}} \quad \textbf{\textit{(38)}}$$

La proyección de $M_R^O$ sobre la línea de acción de R será.

$$\boldsymbol{M_1 =} \frac{\boldsymbol{R\,.\,M_R^O}}{R} \quad \textbf{\textit{(39)}}$$

De esta manera:

$$\boldsymbol{p = \frac{M_1}{R} =} \frac{\boldsymbol{R\,.\,M_R^O}}{R^2} \quad \textbf{\textit{(40)}}$$

De estas expresiones se desprenden también las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{M_1 = r\; x\; R = M_O^R} \quad \textbf{\textit{(41)}}$$

O también

$$\boldsymbol{pR + r\; x\; R = M_O^R} \quad \textbf{\textit{(42)}}$$

## 3.17 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

**Ejemplo de cálculo 31.-** En la viga de madera OP actúan las fuerzas mostradas en la figura. Determine un sistema equivalente fuerza-par en el extremo O, no considerar las reacciones en los puntos de apoyo.

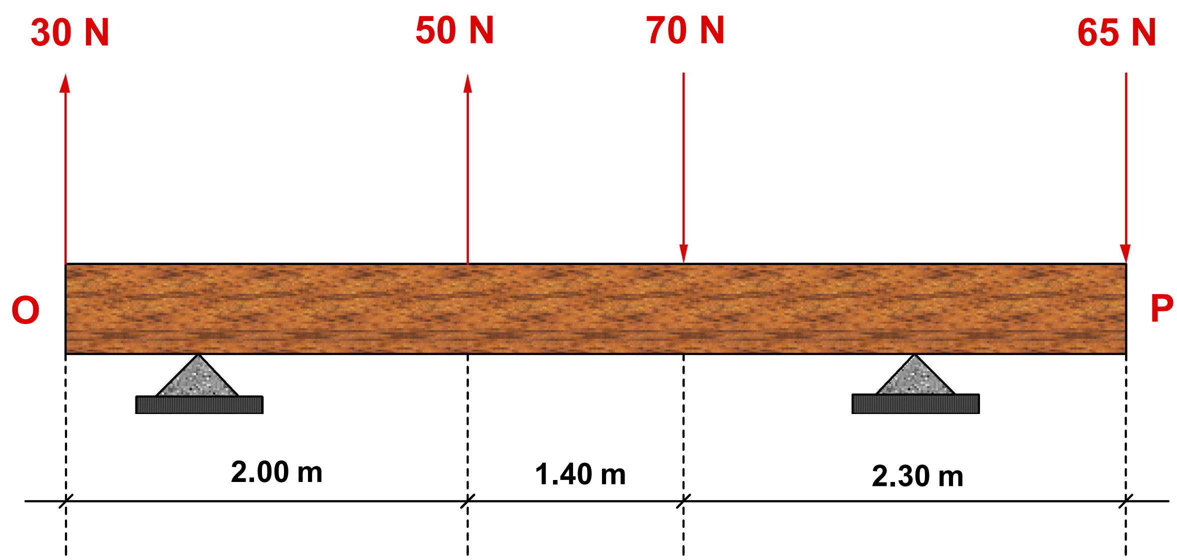



FIGURA 161

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas: 30 N, 50 N, 70 N, y, 65 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

  No considerar reacciones en los apoyos.

  **Objetivo.**

  Determinar un sistema equivalente fuerza-par en el extremo O.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Esquematizar los brazos de palanca de las fuerzas aplicadas con respecto del extremo O.

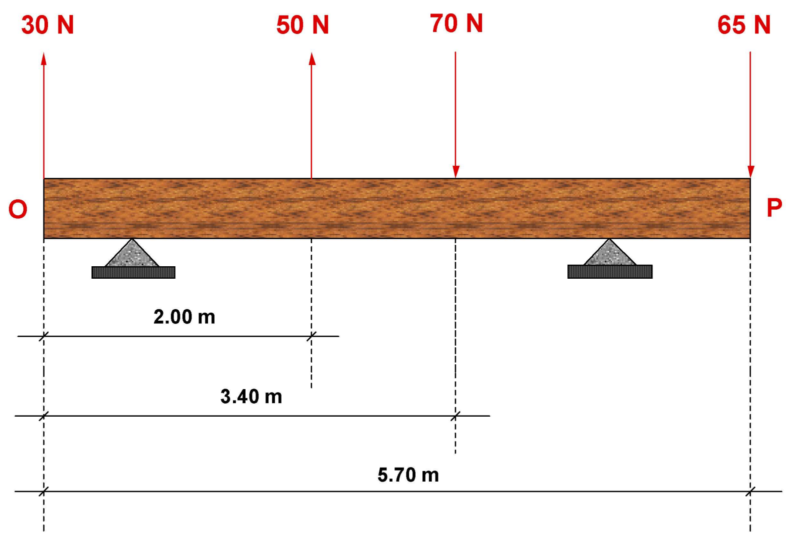



FIGURA 162

b).- Determinación de **R.**

$$R = \sum F$$

$$R = (30\ N)j + (50\ N)\ j + (-70\ N)j + (-65\ N)j$$

$$\boldsymbol{R = -55\ N\ j}$$

c).- Cálculo del par $M_O^R$ del sistema.

$$\boldsymbol{M_O^R = \sum M_A = \sum(\ r\ x\ F)}$$

$$M_A^R = (0\ m)i\ (30\ N)j + (2\ m)i\ (50\ N)j + (3.4\ m)i\ (-70\ N)j + (5.7\ m)i\ (-65\ m)j$$

$$M_O^R = 0\ Nm\ k + 100\ Nm\ k - 238\ Nm\ k - 370.5\ Nm\ k$$

$$\boldsymbol{M_O^R = -508.5\ Nm\ k}$$


FIGURA 163

**Ejemplo de cálculo 32.-** En el ejemplo anterior. Halle un sistema equivalente fuerza-par en el extremo P, no considerar las reacciones en los puntos de apoyo.

**Procedimiento 1:**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas: 30 N, 50 N, 70 N, y, 65 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

  No considerar reacciones en los apoyos.

  **Objetivo.**

  Hallar un sistema equivalente fuerza-par en el extremo P.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Esquematizar los brazos de palanca de las fuerzas aplicadas con respecto del extremo P.

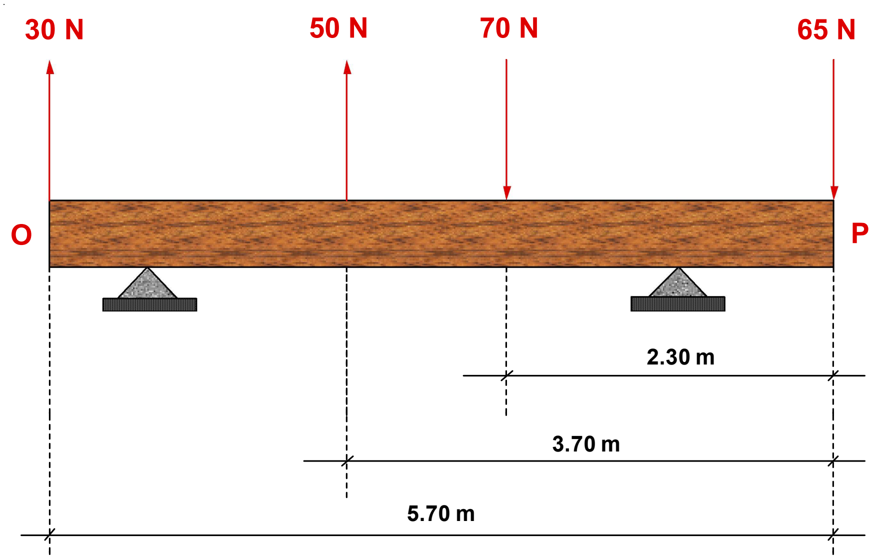



FIGURA 164

b).- Determinación de **R.**

$$R = \sum F$$

$$R = (30\ N)j + (50\ N)\ j + (-70\ N)j + (-65\ N)j$$

$$\boldsymbol{R = -55\ N\ j}$$

c).- Cálculo del par $M_A^R$ del sistema.

$$\boldsymbol{M_P^R = \sum M_A = \sum(\, r\ x\ F)}$$

$$M_P^R = (-5.70\ m)i\ (30\ N)j + (-3.7\ m)i\ (50\ N)j + (-2.3\ m)i\ (-70\ N)j + (0\ m)i\ (-65\ m)j$$

$$M_P^R = -171\ Nm\ k - 185\ Nm\ k + 161\ Nm\ k + 0\ Nm\ k$$

$$\boldsymbol{M_P^R = -195\ Nm\ k}$$

**Procedimiento 2:**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas: 30 N, 50 N, 70 N, y, 65 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

  No considerar reacciones en los apoyos.

  **Objetivo.**

  Determinar un sistema equivalente fuerza-par en el extremo P.

- **Procedimiento de cálculo.**

$$M_P^R = M_O^R + \overrightarrow{PO}\ R$$

$$M_P^R = (-508.5\ Nm)k\ + (-5.70\ m)i\ (-55\ N)j$$

$$M_P^R = (-508.5\ Nm)k\ + (313.5\ Nm)k$$

$$\boldsymbol{M_P^R = -195\ Nm\ k}$$

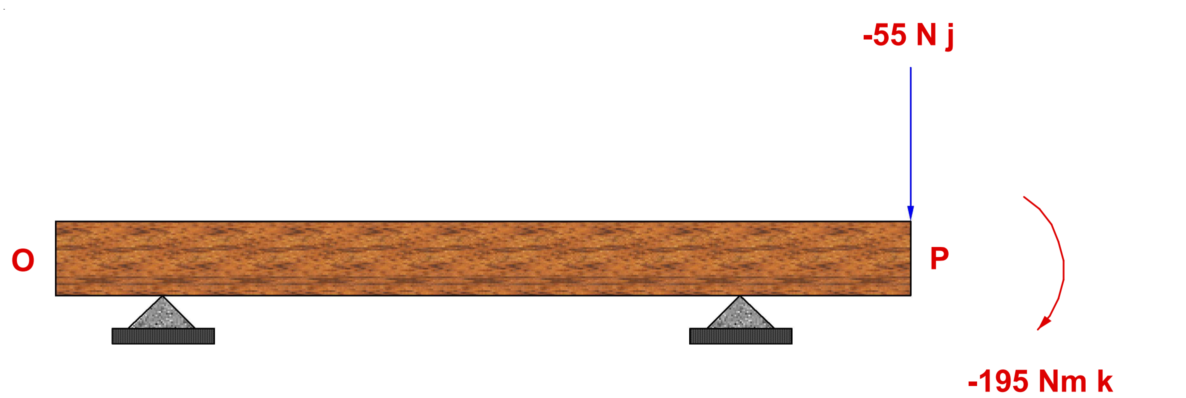



**FIGURA 165**

**Ejemplo de cálculo 33.-** En el ejemplo anterior. Determine el valor de la resultante única del sistema, y su punto de aplicación con respecto a la viga de madera OP.

- **Datos.**

Magnitud de la fuerzas: 30 N, 50 N, 70 N, y, 65 N.

Distancias especificadas en la gráfica.

$M_O^R = -508.5\ Nm\ k$ (del ejercicio 31)

$R = -55\ Nj$ (del ejercicio 31)

No considerar reacciones en los apoyos.

- **Objetivo.**

Determinar el valor de la resultante única del sistema, y su punto de aplicación con respecto a la viga de madera OP.

- **Procedimiento de cálculo.**

$$r\,R = M_O^R$$

$$r = x_i$$

$$x_i\,(-55\ N\ j) = (-508.5\ N\ m\ k)$$

$$-x_i 55\ N\ k = (-508.5\ N\ m\ k)$$

$$x = \frac{-508.5\ Nm}{-55\ N}$$

$$\boldsymbol{x = 9.245\ m.}$$

El punto de aplicación está ubicado a 9.245 m desde el punto O, y hacia la derecha de este, por lo que está fuera del sistema.

**Ejemplo de cálculo 34.-** En el sistema mostrado en la figura. Calcule la resultante del sistema de fuerzas, y su ángulo director.

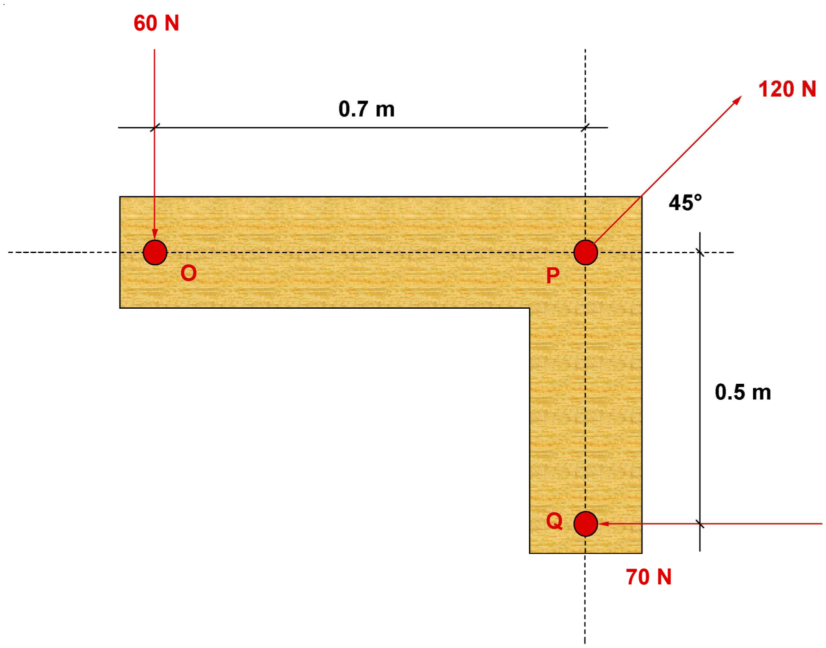



**FIGURA 166**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas: 60 N, 120 N y, 70 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

  Ángulo director de la fuerza de 120 N, 45°.

- **Objetivo.**

  Calcular la resultante del sistema de fuerzas, y su ángulo director.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 120 N.

$$Fy = F\ sen\ \Theta$$

$$Fy = 120\ N\ sen\ 45°$$

$$\boldsymbol{Fy = 84.852\ N}$$

$$Fx = F\ cos\ \Theta$$

$$Fx = 120\ N\ cos\ 45°$$

$$\boldsymbol{Fx = 84.852\ N}$$

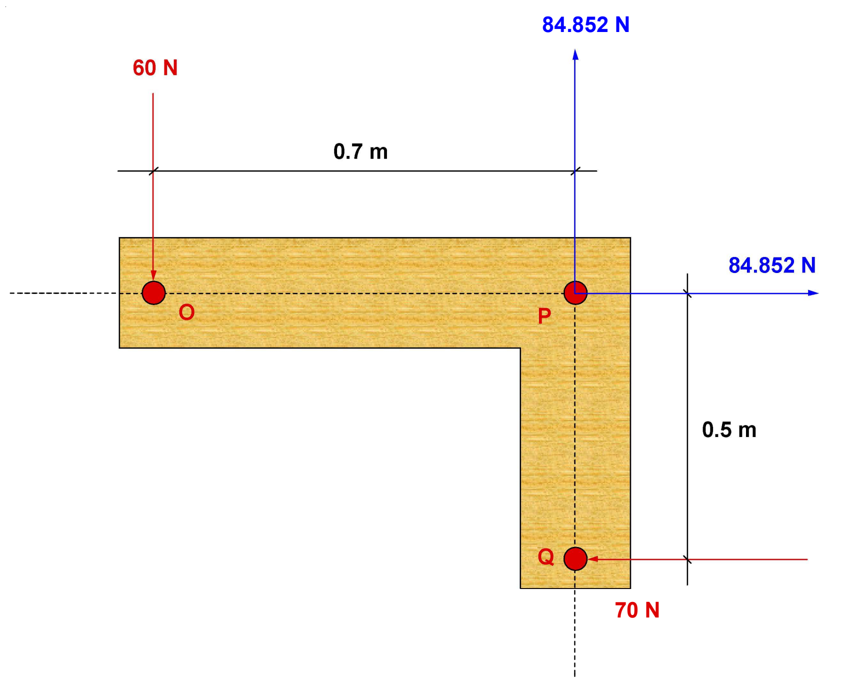



FIGURA 167

b).- Determinación de **R.**

$$R_j = \sum F_j$$

$$R_j = -60\ N_j + 84.852\ N_j$$

$$\boldsymbol{R_j = 24.852\ N\ j}$$

$$R_i = \sum F_i$$

$$R_i = 84.852\ N_i + -70\ N_i$$

$$\boldsymbol{R_i = 14.852\ N\ i}$$

$$R = \sqrt{R_i^2 + R_j^2}$$

$$R = \sqrt{(14.852\ N)^2 + (24.852\ N)^2}$$

$$\boldsymbol{R = 28.951\ N}$$

c).- Determinación del ángulo director.

$$tang\ \theta = \frac{24.852}{14.852}$$

$$tang\ \theta = \ 1.673$$

$$\theta = arc\,\mathrm{tang}\ (1.673)$$

$$\theta = \mathbf{59°\ 7°\ 55.31°}$$

**Ejemplo de cálculo 35.-** En el sistema mostrado en la figura. Halle el momento del par, considerando que la línea de acción de la resultante pasa a través del punto O.

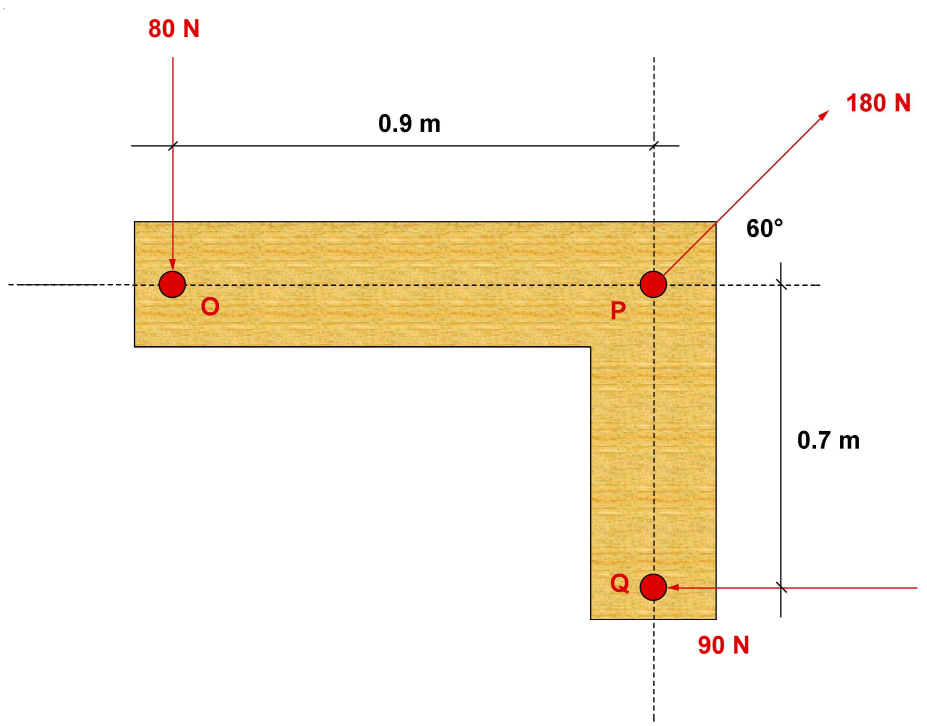



FIGURA 168

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas: 80 N, 180 N y, 90 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

  Ángulo director de la fuerza de 180 N, 60°.

- **Objetivo.**

Hallar el momento del par, considerando que la línea de acción de la resultante pasa a través del punto O.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 120 N.

$$Fy = F\ sen\ \theta$$

$$Fy = 180\ N\ sen\ 60°$$

$$\boldsymbol{Fy = 155.884\ N}$$

$$Fx = F\ cos\ \theta$$

$$Fx = 180\ N\ cos\ 60°$$

$$\boldsymbol{Fx = 9 \quad N}$$

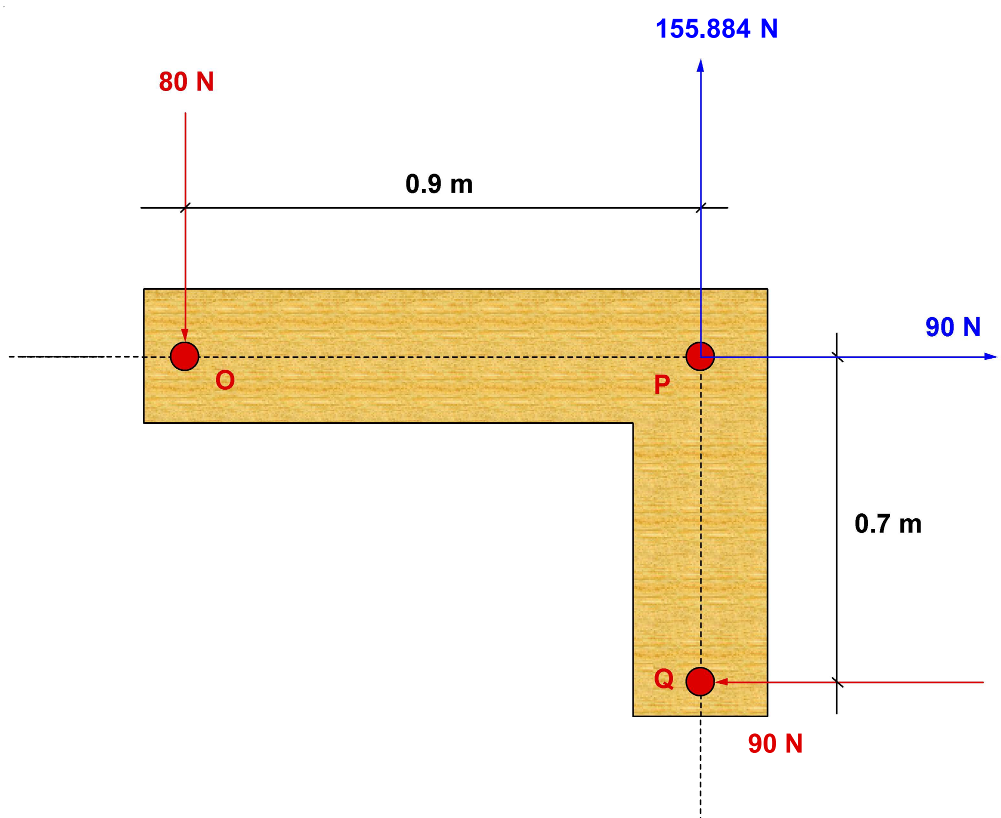



FIGURA 169

b).- Calcular el momento con respecto al punto O.

Considerando que las líneas de acción de las fuerzas de 80 N y de la componente horizontal de la fuerza de 180 N pasan por el punto O, sus momentos serán iguales a cero, por lo que:

$$\sum M_O^R = \sum M_O = 0$$

$$\sum M_O^R = M_O + (155.884\ N)(0.9\ m) - (90\ N)\ (0.7m) = 0$$

$$\sum M_O^R = M_O + 140.295\ Nm - 63\ Nm = 0$$

$$M_O + 77.295\ Nm. = 0$$

$$\boldsymbol{M_O = -77.295\ Nm.}$$

**Ejemplo de cálculo 36.-** En el sistema anterior mostrado en la figura. Determine el momento del par, considerando que la línea de acción de la resultante pasa a través del punto P.

A).- Determinar el momento con respecto al punto P.

Considerando que las líneas de acción de las componentes de la fuerza de 180 N pasan por el punto P, sus momentos serán iguales a cero, por lo

$$\sum M_P^R = \sum M_P = 0$$

$$\sum M_P^R = M_P + (80\ N)(0.9\ m) - (90\ N)\ (0.7m) = 0$$

$$\sum M_P^R = M_P + 72\ Nm - 63\ Nm = 0$$

$$M_P + 9\ Nm. = 0$$

$$\boldsymbol{M_P = -9\ Nm.}$$

**Ejemplo de cálculo 37.-** En el sistema anterior mostrado en la figura. Calcule el momento del par, considerando que la línea de acción de la resultante pasa a través del punto Q.

a).- Calcular el momento con respecto al punto Q.

Considerando que las líneas de acción de las fuerzas de 90 N y de la componente vertical de la fuerza de 180 N, pasan por el punto Q, sus momentos será iguales a cero, por lo que:

$$\sum M_Q^R = \sum M_Q = 0$$

$$\sum M_Q^R = M_Q + (80\ N)(0.9\ m) - (90\ N)\ (\ 0.7m) = 0$$

$$\sum M_Q^R = M_Q + 72\ Nm - 63\ Nm = 0$$

$$M_Q + 9\ Nm. = 0$$

$$\boldsymbol{M_Q = -9\ Nm.}$$

**Ejemplo de cálculo 38.-** Sobre la platina estructural de acero actúan las fuerzas y momentos puntuales indicados en la figura, se requiere colocar un remache único en la platina, para lo cual se necesita calcular la posición del orificio ubicado sobre la línea PQ.

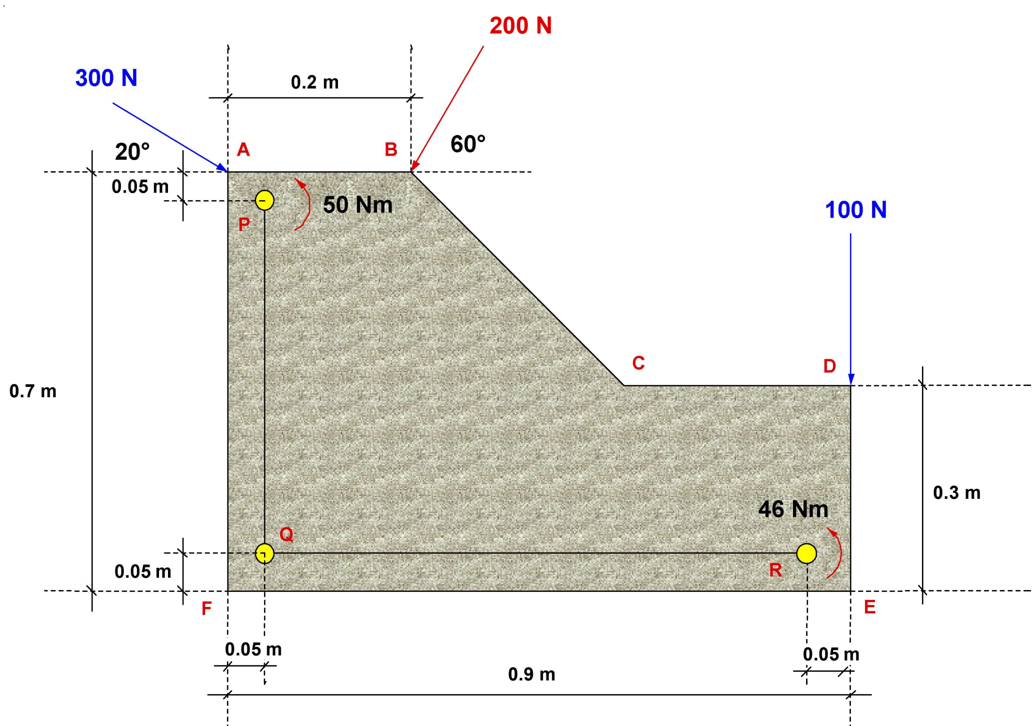



**FIGURA 170**

- **Datos.**

Magnitud de la fuerzas: 300 N, 200 N y, 100 N.

Momentos puntuales sobre P y R, 50 Nm, y, 46 Nm, respectivamente.

Distancias especificadas en la gráfica.

Ángulo director de la fuerza de 300 N, 20°.

Ángulo director de la fuerza de 200 N, 60°.

- **Objetivo.**

Calcular la posición del orificio para colocar el remache que esté ubicado sobre la línea PQ.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 300 N.

$$Fy = F\ sen\ \Theta$$

$$Fy \quad 300\ N\ sen\ 20°$$

$$\boldsymbol{Fy = 102.606\ N}$$

$$Fx = F\ cos\ \Theta$$

$$Fx = 300\ N\ cos\ 20°$$

$$\boldsymbol{Fx = 281.907\ N}$$

b).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 200 N.

$$Fy = F\ sen\ \Theta$$

$$Fy \quad 200\ N\ sen\ 60°$$

$$\boldsymbol{Fy = 173.205\ N}$$

$$Fx = F\ cos\ \Theta$$

$$Fx = 200\ N\ cos\ 60°$$

$$\boldsymbol{Fx = 100\ N}$$

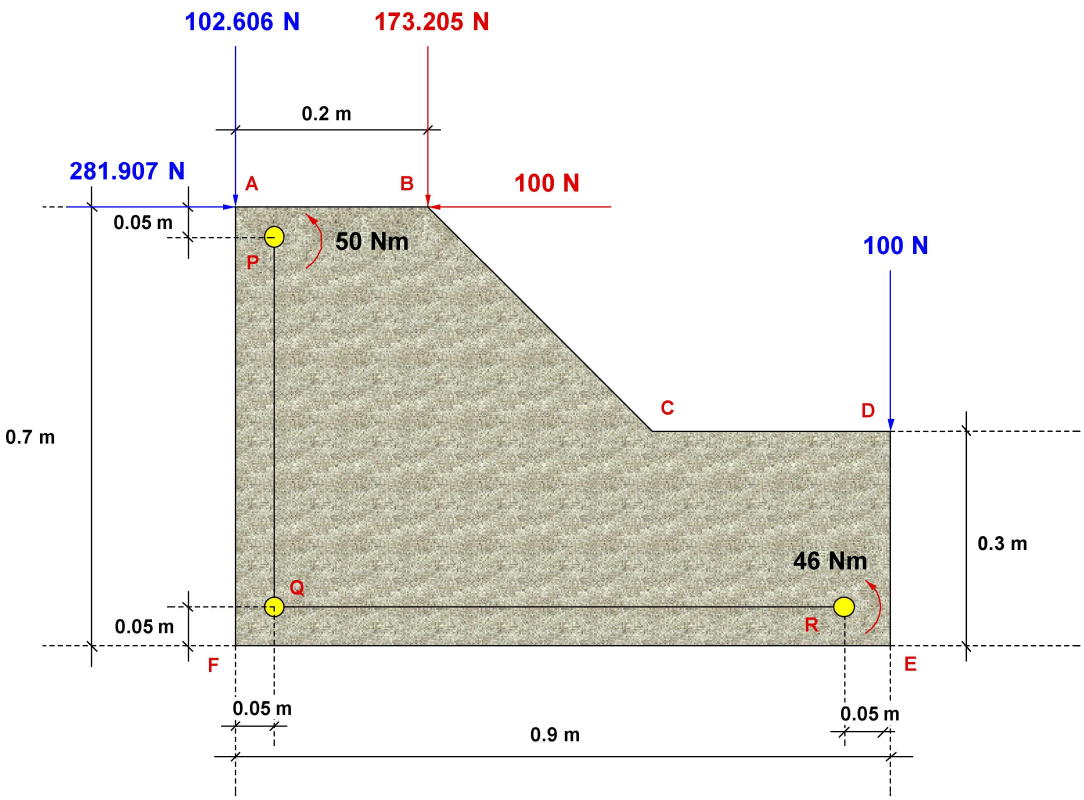



FIGURA 171

c).- Determinar la componente horizontal de la resultante R.

$$\sum \boldsymbol{F_X} = R_x = (281.907\ N) + (-100\ N)$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = R_x = 181.907\ N$$

$$\boldsymbol{R_x = 181.907\ N}$$

d).- Determinar la componente vertical de la resultante R.

$$\sum \boldsymbol{F_y} = R_y = (-102.606\ N) + (-173.205\ N) + (-100\ N)$$

$$\sum \boldsymbol{F_y} = R_y = -375.811\ N$$

$$\boldsymbol{R_y = -375.811\ N}$$

e).- Determinar el momento con respecto al punto Q.

$$\sum M_Q = -(281.907\ N)(0.65\ m) + (102.606\ N)(0.05 m)\ + (\ 100\ N)(0.65\ m) +$$

$$-\ (173.205\ N)(0.15\ m) - (100\ N)(0.85\ m) + 50\ Nm + 46\ Nm.$$

$$\sum M_Q = -183.239 Nm + 5.130 Nm \quad 65 Nm \quad 25.980 Nm \quad 85 Nm + 50 Nm \quad 46 Nm$$

$$\boldsymbol{\sum M_Q = \ -128.089\ Nm}$$

f).- Determinar la posición del orificio, en el sentido horizontal.

$$\sum M_Q = \ -128.089\ Nm\ = x\ (181.907\ N)$$

$$x = \ -\ \frac{128.089}{181.907}\ m$$

$$\boldsymbol{x = \ -\ 0.704\ m}$$

A la izquierda de Q, como es mayor que 0.05 m se tendría que aumentar el ancho de la misma.

g).- Determinar la posición del orificio en el sentido vertical.

$$\sum M_Q = \ -128.089\ Nm\ = x\ (-375.811\ N)$$

$$x = \ \frac{128.089}{375.811}\ m$$

$$\boldsymbol{x = \ \ 0.340\ m}$$

Sobre la posición del punto Q.

**Ejemplo de cálculo 39.-** Sobre la platina estructural de acero actúan las fuerzas y momentos puntuales indicados en la figura, se requiere colocar un remache único en la platina, para lo cual se necesita calcular la posición del orificio ubicado sobre la línea QR.

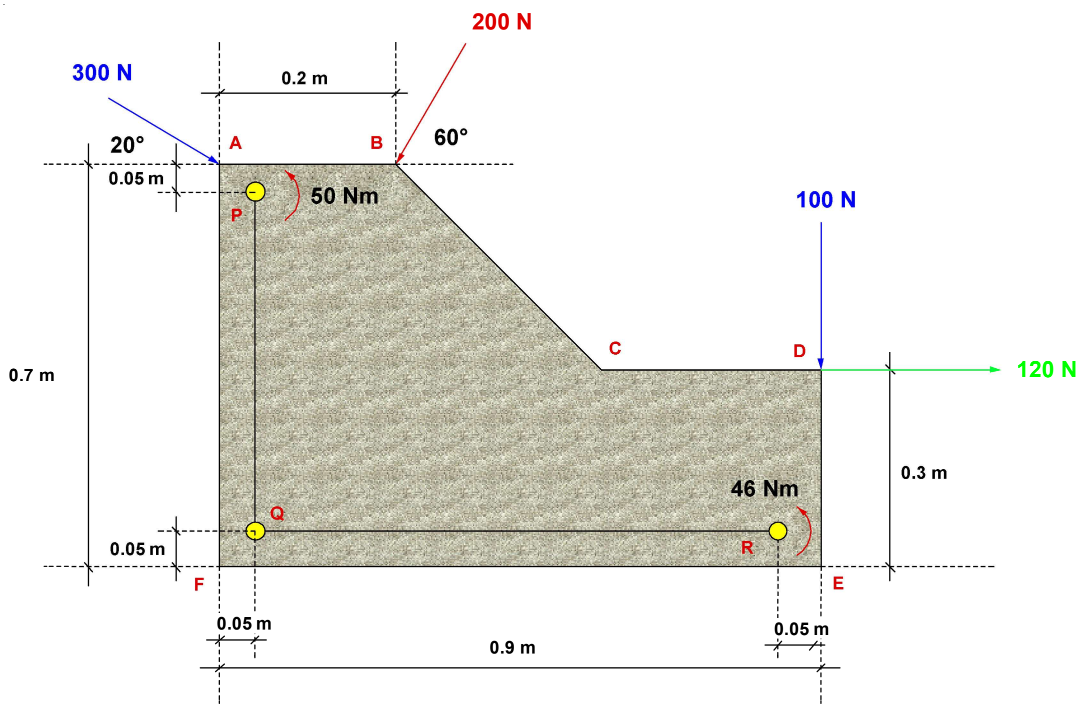



FIGURA 172

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas: 300 N, 200 N y, 100 N, 120 N.

  Momentos puntuales sobre P y R, 50 Nm, y, 46 Nm, respectivamente.

  Distancias especificadas en la gráfica.

  Ángulo director de la fuerza de 300 N, 20°.

  Ángulo director de la fuerza de 200 N, 60°.

- **Objetivo.**

  Calcular la posición del orificio para colocar el remache que esté ubicado sobre la línea QR.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar la componente horizontal de la resultante R.

$$\sum \boldsymbol{F_X} = R_x = (281.907\ N) + (-100\ N) + (120\ N)$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = R_x = 301.907N$$

$$\boldsymbol{R_x = 301.907\ N}$$

b).- Determinar la componente vertical de la resultante R.

$$\sum \boldsymbol{F_y} = R_y = (-102.606\ N) + (-173.205\ N) + (-100\ N)$$

$$\sum \boldsymbol{F_y} = R_y = -375.811\ N$$

$$\boldsymbol{R_y = -375.811\ N}$$

c).- Determinar el momento con respecto al punto Q.

$$\sum M_Q = -(281.907\ N)(0.65\ m) + (102.606\ N)(0.05 m) + (100\ N)(0.65\ m) +$$

$$-(173.205\ N)(0.15\ m) - (100\ N)(0.85\ m) - (120\ N)(0.25 m) + 50\ Nm + 46\ Nm.$$

$$\sum M_Q = -183.239 Nm + 5.130 Nm + 65 Nm - 25.980 Nm \quad 85 Nm \quad 30 Nm \quad 50 Nm \quad 46 Nm$$

$$\boldsymbol{\sum M_Q = -158.089\ Nm}$$

d).- Determinar la posición del orificio, en el sentido horizontal.

$$\sum M_Q = -158.089\ Nm = x\ (301.907\ N)$$

$$x = -\frac{158.089}{301.907}\ m$$

$$\boldsymbol{x = -0.523\ m}$$

A la izquierda de Q, como es mayor que 0.05 m se tendría que aumentar el ancho de la misma.

e).- Determinar la posición del orificio en el sentido vertical.

$$\sum M_Q = -158.089\ Nm = x\ (-375.811\ N)$$

$$x = \frac{158.089}{375.811}\ m$$

$$x = \ 0.420\,m$$

Sobre la posición del punto Q.

**Ejemplo de cálculo 40.-** Sobre la pieza de la figura actúan las fuerzas mostradas, determine la resultante de las fuerzas.

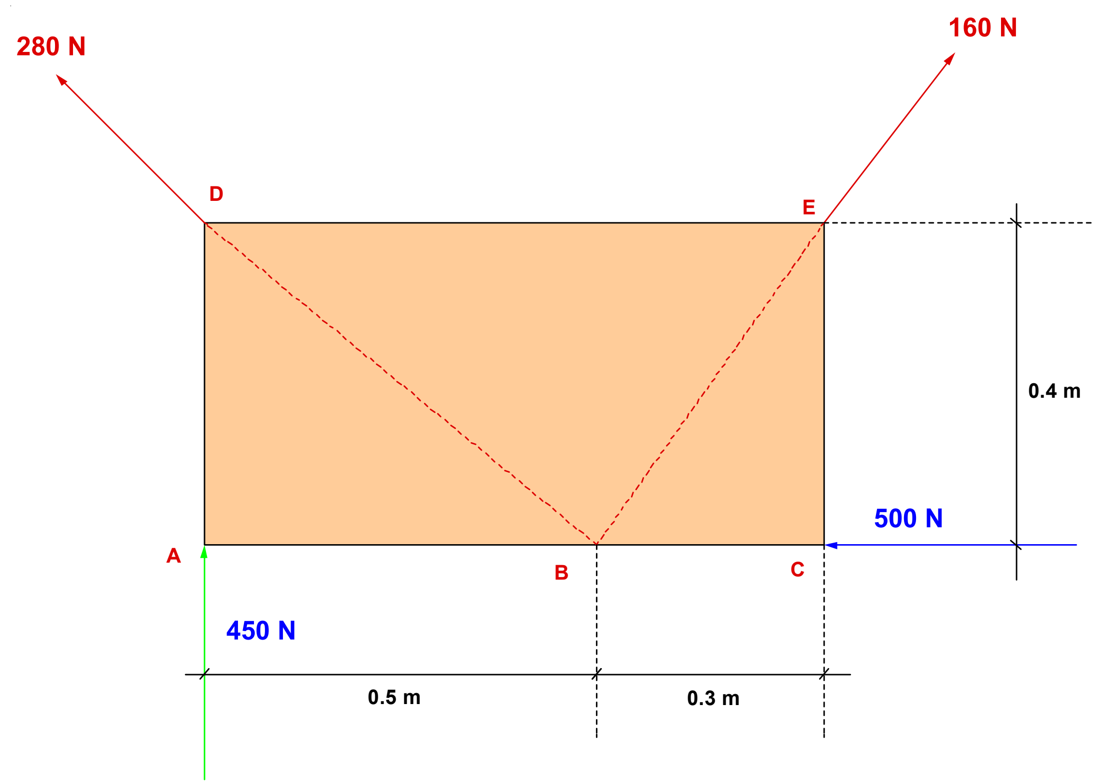



**FIGURA 173**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas: 280 N, 160 N y, 500 N, 450 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

  Determinar la resultante de las fuerzas aplicadas.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Determinación del ángulo director de la fuerza de 280 N.

$$tang\ \Theta = \frac{0.4\ m}{0.5\ m}$$

$$tang\ \Theta = \ 0.8$$

$$\Theta = arc\,\text{tang}\ (0.8)$$

$$\Theta = \mathbf{38°\ 39'\ 35.31''}$$

b).- Determinación del ángulo director de la fuerza de 160 N.

$$tang\ \Theta = \frac{0.4\ m}{0.3\ m}$$

$$tang\ \Theta = \ 1.333$$

$$\Theta = arc\,\text{tang}\ (1.333)$$

$$\Theta = \mathbf{5\quad °\,7'48.37''}$$

c).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 280 N.

$$Fy = F\ sen\ \Theta$$

$$Fy = 280\ N\ sen\ 38°\ 39'\ 35.31''$$

$$\boldsymbol{Fy = 174.914\ N}$$

$$Fx = F\ cos\ \Theta$$

$$Fx \qquad 280\ N\ cos\ 38°\ 39'\ 35.31''$$

$$\boldsymbol{Fx = 2 \qquad .643\ N}$$

d).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 160 N.

$$Fy = F\ sen\ \Theta$$

$$Fy = 160\ N\ sen\ 53°\ 7'48.37''$$

$$\boldsymbol{Fy = 12 \quad N}$$

$$Fx = F\ cos\ \Theta$$

$$Fx \quad 160\ N\ cos\ 53°\ 7'48.37''$$

$$\boldsymbol{Fx = 9 \quad N}$$

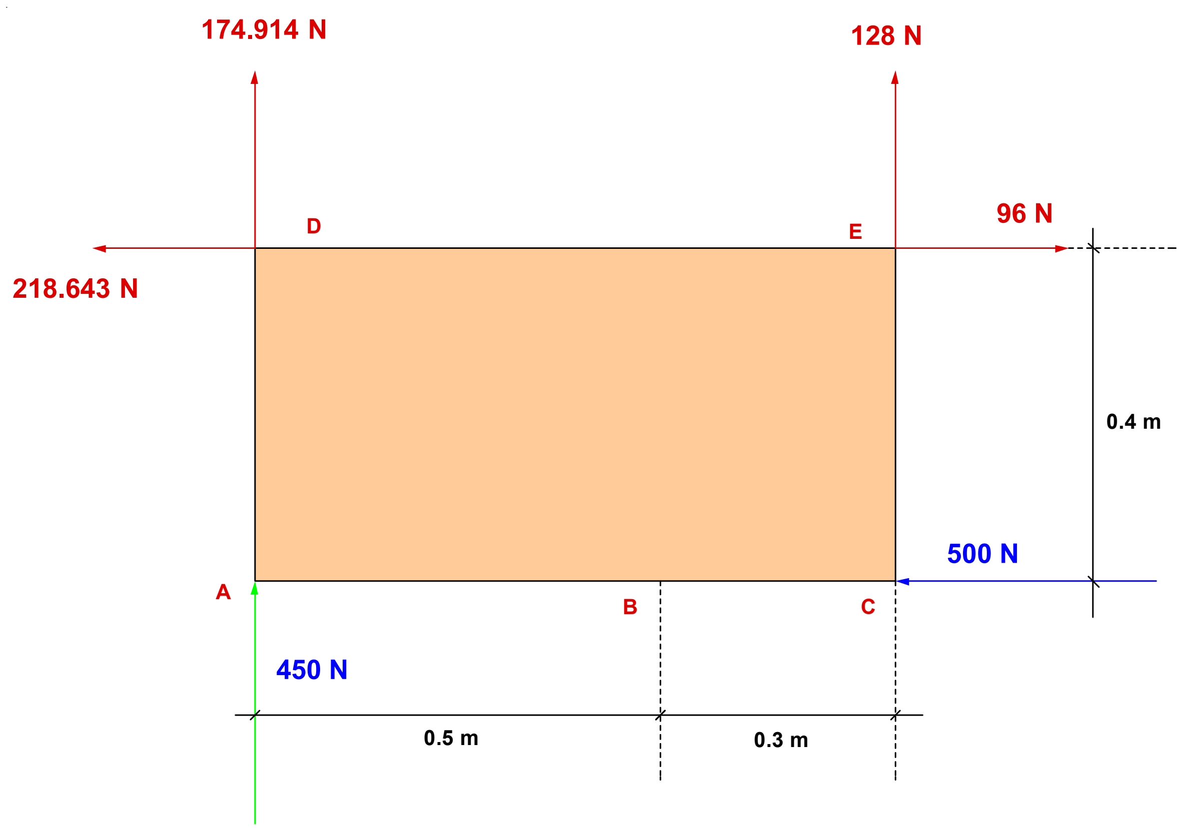



**FIGURA 174**

e).- Determinar la componente horizontal de la resultante R.

$$\sum \boldsymbol{F_X} = R_x = (96\ N) + (\ -218.643\ N) + (-500\ N)$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = R_x = -622.643N$$

$$\boldsymbol{R_x = -622.643\ N}$$

f).- Determinar la componente vertical de la resultante R.

$$\sum \boldsymbol{F_y} = R_y = (174.914\ N) + (128\ N)$$

$$\sum \boldsymbol{F_y} = R_y = 302.914\ N$$

$$\boldsymbol{R_y = 302.914\ N}$$

g).- Determinación de **R.**

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{(-622.643\ N)^2 + (302.914\ N)^2}$$

$$\boldsymbol{R = 692.416\ N}$$

c).- Determinación del ángulo director.

$$tang\ \Theta = \frac{302.914}{-622.643}$$

$$tang\ \Theta = -0.486$$

$$\Theta = arc\ \mathrm{tang}\ (-0.486)$$

$$\Theta = \boldsymbol{-2\ \ ^\circ 55' 11.11''}$$

**Ejemplo de cálculo 41.-** En la armadura mostrada en la siguiente figura, se detalla el sistema de fuerzas que actúan sobre ella. Halle la resultante del sistema, su ángulo director, y calcule la distancia de la intersección de la línea de acción del vector resultante con la que pasa por el punto P y S.

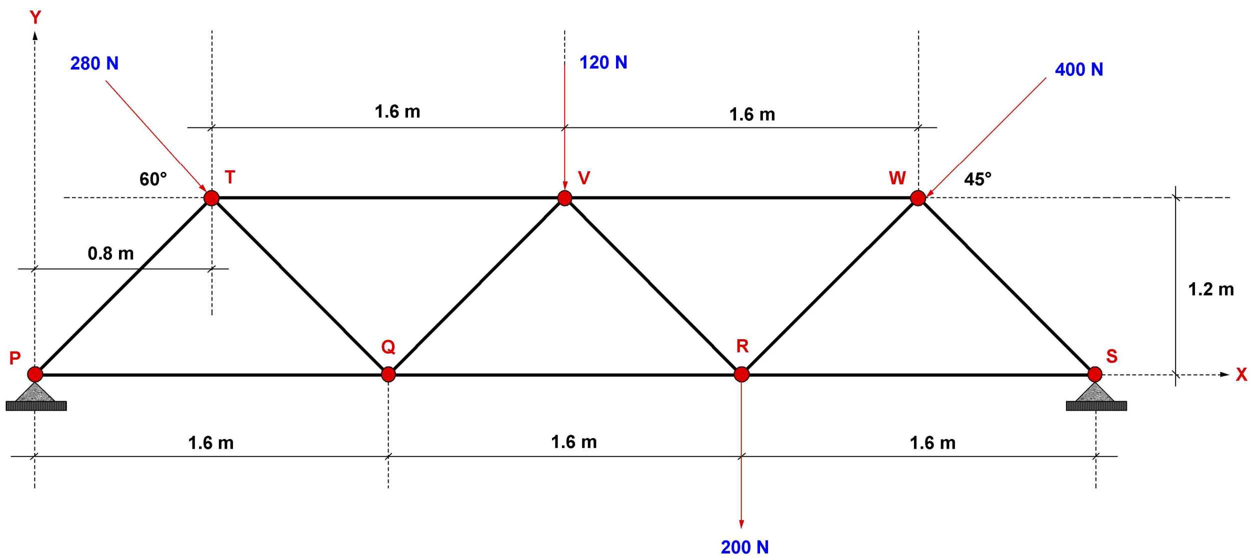



FIGURA 175

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas aplicadas: 280 N, 120 N y, 400 N, 200 N.

  Ángulos directores: para la fuerza de 280 N, 60°; para la fuerza de 400 N, 45°.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

  Hallar la resultante del sistema, su ángulo director, y calcular la distancia de la intersección de la línea de acción del vector resultante con la que pasa por el punto P y S.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 280 N.

$$Fy = F\ sen\ \Theta$$

$$Fy = 280\ N\ sen\ 60°$$

$$\boldsymbol{Fy = 242.487\ N\ j}$$

$$Fx = F\ cos\ \Theta$$

$$Fx = 280\ N\ cos\ 60°$$

$$\boldsymbol{Fx = 140\ N\ i}$$

b).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 400 N.

$$Fy = F\ sen\ \Theta$$

$$Fy \quad 400\ N\ sen\ 45°$$

$$\boldsymbol{Fy = 2 \quad .842\ N\ j}$$

$$Fx = F\ cos\ \Theta$$

$$Fx \quad 400\ N\ cos\ 45°$$

$$\boldsymbol{Fx = 2 \quad .842\ N\ i}$$

c).- Determinar la componente horizontal de la resultante R.

$$\sum \boldsymbol{F_X} = (140\ N\ i\ ) + (\ -282.842\ N\ i)$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \ R_x = -142.842 N\ i$$

$$\boldsymbol{R_x = -142.842\ N\ i}$$

d).- Determinar la componente vertical de la resultante R.

$$\sum \boldsymbol{F_y} = \ R_y = (\ -242.487\ N\ j) + (\ -120\ N\ j) + (\ -200\ N\ j) + (\ -282.842\ N\ j)$$

$$\sum \boldsymbol{F_y} = \ R_y = \ -845.329\ N\ j$$

$$\boldsymbol{R_y = -845.329\ N\ j}$$

e).- Determinación de **R.**

$$R = \ \sqrt{R_x^2 + \ R_y^2}$$

$$R = \ \sqrt{(-142.842\ N\ i)^2 + \ (-\ 845.329\ N\ j)^2}$$

$$\boldsymbol{R = \ 875.312\ N}$$

f).- Determinación del ángulo director.

$$tang\ \Theta = \frac{-\ 845.329\ N}{-\ 142.842\ N}$$

$$tang\ \Theta = \ 5.917$$

$$\Theta = arc\,\mathrm{tang}\ \ (5.917)$$

$$\Theta = \ \mathbf{80°\ 24°\ 26.63°}$$

g).- Calculo de la distancia de la intersección de la línea de acción del vector resultante con la que pasa por el punto P.

$$M_P\ = d\ R_y$$

$$M_P\ = \ -242.487\ N(0.8m) - 140N(1.2\ m) - 120N(2.4m) - 282.842N(4m) +$$

$$+\ 282.842N(1.2m) - 200N(3.2m)$$

$$M_P\ = \ -193.989Nm \quad\ 168Nm - 288Nm - 1131.368Nm + 339.410Nm \quad\ 640Nm.$$

$$\boldsymbol{M_P\ = \ -2081.947Nm.}$$

$$\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{M_P}}{\boldsymbol{R_y}}$$

$$d\ = \frac{-2081.947\ Nm}{-845.329\ N}$$

$$\boldsymbol{d = \ \ 2.462\ m.}$$

A la derecha del punto P.

h).- Calculo de la distancia de la intersección de la línea de acción del vector resultante con la que pasa por el punto S.

$$\boldsymbol{M_S = d\ R_y}$$

$$M_S = 242.487\ N(4m) - 140N(1.2\ m) + 120N(2.4m) + 282.842N(0.8m) +$$

$$+ 282.842N(1.2m) + 200N(1.6m)$$

$$M_S = 969.948Nm - 168Nm + 288Nm + 226.273Nm + 339.410N + 320Nm.$$

$$\boldsymbol{M_S = 1975.631Nm.}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{M_S}{R_y}}$$

$$d = \frac{1975.631\ Nm}{-845.329\ N}$$

$$\boldsymbol{d = -2.337\ m.}$$

A la izquierda del punto S.

i).- Comprobando resultados.

La longitud total de la base de la estructura es

$$(1.6\ m)\ X\ (3\ módulos) = 4.8\ m.$$

$$4.8\ m - 2.462\ m\ (del\ primer\ resultado) = 2.337\ m\ (segundo\ resultado).$$

**Ejemplo de cálculo 42.-** En la armadura mostrada en la siguiente figura, se detalla el sistema de fuerzas que actúan sobre ella. Determine la resultante del sistema, su ángulo director, y calcule la distancia de la intersección de la línea de acción del vector resultante con la que pasa por el punto P y S.

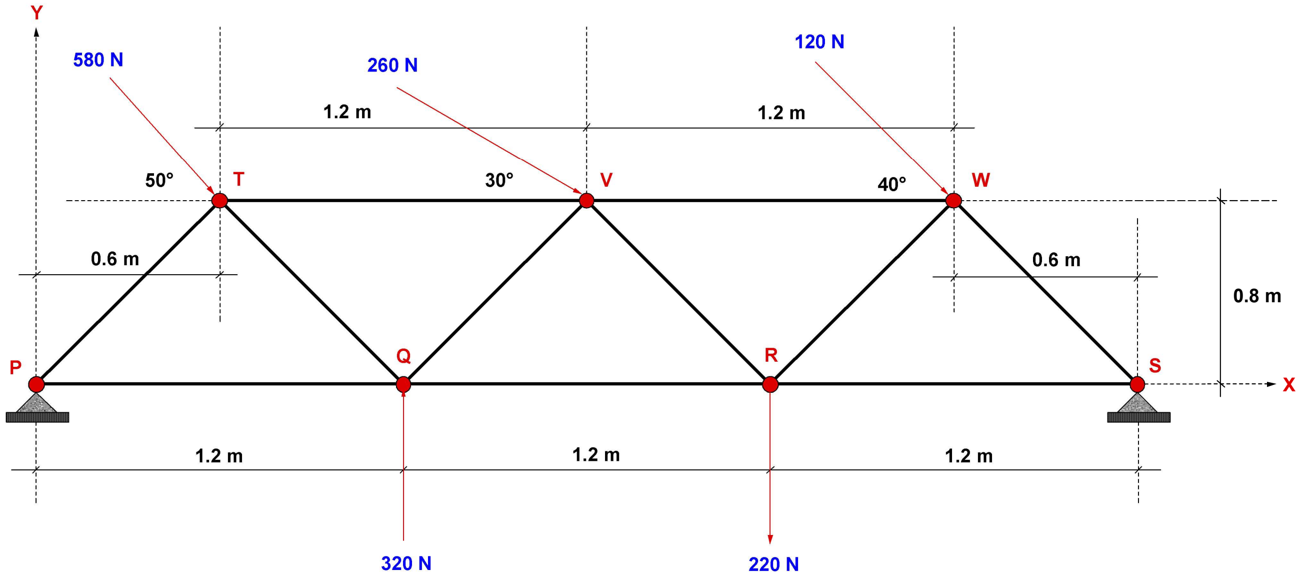



FIGURA 176

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas aplicadas: 580 N, 260 N y, 120 N, 320 N, 220 N.

  Ángulos directores: para la fuerza de 580 N, 50°; para la fuerza de 260 N, 35°, y para la fuerza 120 N, 40°.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

  Determinar, la resultante del sistema, su ángulo director, y calcular la distancia de la intersección de la línea de acción del vector resultante con la que pasa por el punto P y S.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 580 N.

$$Fy = F\ sen\ \theta$$

$$Fy = 580\ N\ sen\ 50°$$

$$\boldsymbol{Fy = 444.305\ N\ j}$$

$$Fx = F\ cos\ \Theta$$

$$Fx \quad 580\ N\ cos\ 50°$$

$$\boldsymbol{Fx = 3\quad .816\ N\ i}$$

b).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 260 N.

$$Fy = F\ sen\ \Theta$$

$$Fy = 260\ N\ sen\ 30°$$

$$\boldsymbol{Fy = 130\ N\ j}$$

$$Fx = \quad cos\ \Theta$$

$$Fx = 260\ N\ cos\ 30°$$

$$\boldsymbol{Fx = 22\ \ .166\ N\ i}$$

c).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 120 N.

$$Fy = F\ sen\ \Theta$$

$$Fy \quad 120\ N\ sen\ 40°$$

$$\boldsymbol{Fy = 77.134\ N\ j}$$

$$Fx = F\ cos\ \Theta$$

$$Fx = 120\ N\ cos\ 40°$$

$$\boldsymbol{Fx = 91.925\ N\ i}$$

d).- Determinar la componente horizontal de la resultante R.

$$\sum \boldsymbol{F_X} = (372.816\ N\ i\ ) + (225.166\ N\ i) + (91.925\ N\ i)$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \ R_x = 689.907 N\ i$$

$$\boldsymbol{R_x = 689.907\ N\ i}$$

e).- Determinar la componente vertical de la resultante R.

$$\sum \boldsymbol{F_y} = R_y = (-444.305\ N\ j) + (-130\ N\ j) + (-77.134\ N\ j) + 320\ N\ j + (-220\ N\ j)$$

$$\sum \boldsymbol{F_y} = R_y = -551.439\ N\ j$$

$$\boldsymbol{R_y = -551.439\ N\ j}$$

f).- Determinación de **R.**

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{(689.907\ N\ i)^2 + (-551.439\ N\ j)^2}$$

$$\boldsymbol{R = 883.208\ N}$$

g).- Determinación del ángulo director.

$$tang\ \Theta = \frac{-551.439\ N}{689.907\ N}$$

$$tang\ \Theta = -0.799$$

$$\Theta = ar\ \ \mathrm{tang}\ (-0.799)$$

$$\Theta = \boldsymbol{-38° \ 37' \ 29.48''}$$

h).- Calculo de la distancia de la intersección de la línea de acción del vector resultante con la que pasa por el punto P.

$$M_P = d\ R_y$$

$$M_P = -444.305\ N(0.6m) - 372.816N(0.8\ m) - 130\ N(1.8m) - 225.166N(0.8m)$$

$$-77.134N(3m) - 91.925N(0.8m) + 320N(1.20m) - 220N(2.4m)$$

$$M_P = -266.583Nm - 298.252Nm - 234Nm - 180.132Nm - 231.402Nm$$

$$-73.54Nm + 384Nm - 528Nm$$

$$\boldsymbol{M_P = -1427.909Nm.}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{M_P}{R_y}}$$

$$d = \frac{-1427.909\ Nm}{-551.439\ N}$$

$$\boldsymbol{d = 2.589\ m.}$$

A la derecha del punto P.

i).- Calculo de la distancia de la intersección de la línea de acción del vector resultante con la que pasa por el punto S.

$$M_S = d\ R_y$$

$$M_S = +444.305\ N(3m) - 372.816N(0.8\ m) + 130\ N(1.8m) - 225.166N(0.8m)$$

$$+77.134N(0.6m) - 91.925N(0.8m) - 320N(2.4m) + 220N(1.2m)$$

$$M_S = 1332.915Nm - 298.252Nm \quad 234Nm \quad 180.132Nm + 46.280Nm$$

$$-73.54Nm - 768Nm + 264Nm$$

$$\boldsymbol{M_S = 557.271Nm.}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{M_S}{R_y}}$$

$$d = \frac{557.271\ Nm}{-551.439\ N}$$

$$\boldsymbol{d = -1.010\ m.}$$

A la izquierda del punto S.

j).- Comprobando resultados.

La longitud total de la base de la estructura es

$$(1.2\ m)\ X\ (3\ módulos \qquad 3.6\ m.$$

$$3.6\ m - 2.589\ m\ (del\ primer\ resultado) = 1.010\ m\ (segundo\ resultado).$$

**Ejemplo de cálculo 42.-** En una plataforma de madera, se aplican las fuerzas mostradas en la figura. Calcule el valor de la magnitud y la ubicación de la fuerza resultante del sistema.

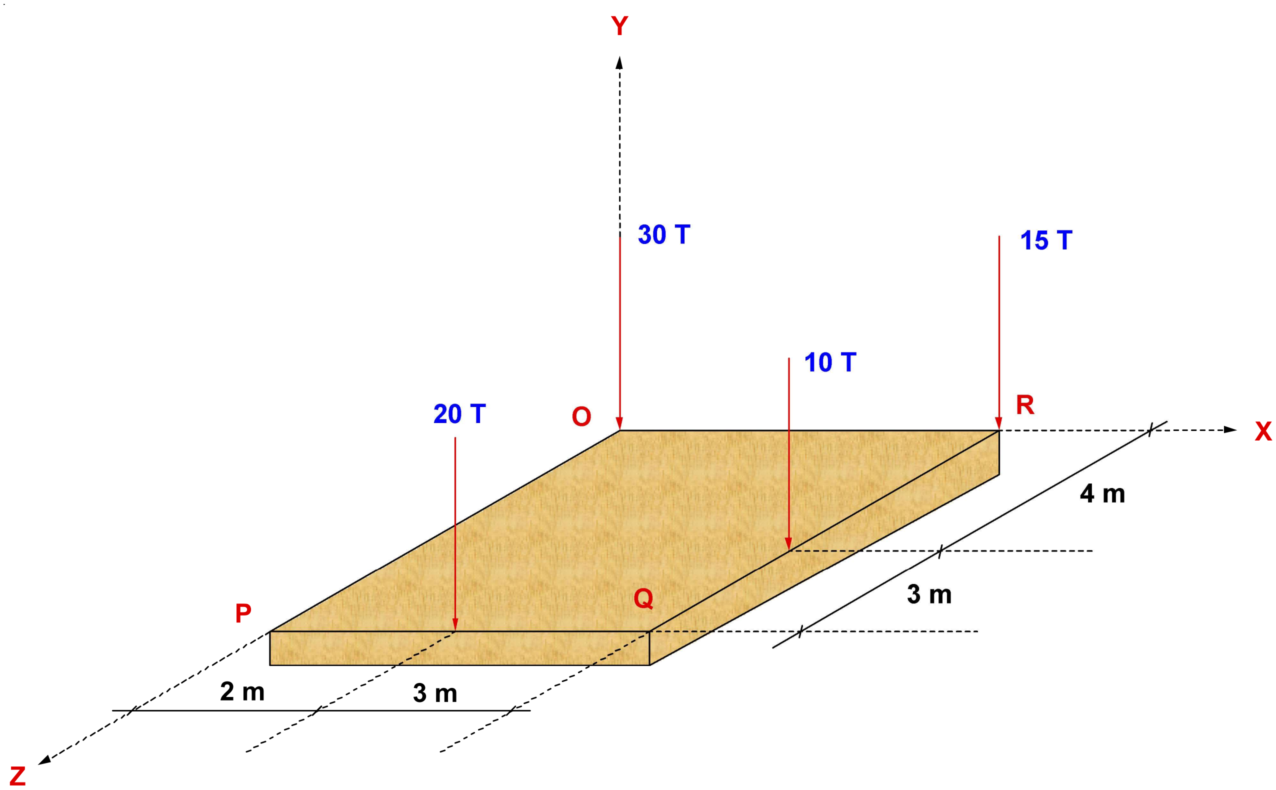



**FIGURA 177**

- **Datos.**

  Magnitud de las fuerzas aplicadas: 30 T, 15 T, 10 T, y 20 T.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

Calcular el valor de la magnitud y la ubicación de la fuerza resultante del sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- En el siguiente cuadro se muestran en forma tabulada los valores de la posición de los puntos de aplicación de cada fuerza en el sistema, el valor de la componente R y del par $M_O^R$.

| | **r (m)** | **FUERZA (TONELADAS)** | **r F ( Tm)** |
|---|---|---|---|
| F1=30T | 0 | -30 j Toneladas | 0 |
| F2=15T | 5m i | -15 j Toneladas | -75 Tm k |
| F3=10T | 5m i + 4m k | -10 j Toneladas | 40 Tm i - 50 Tm k |
| F4=20T | 2m i + 7m k | -20 j Toneladas | 140 Tm i - 40 Tm k |
| | | **R = -75 Toneladas.** | **$M_O^R$ = 180 i - 165 k** |

b).- Al representar como r al vector de posición y los valores de x e y como sus correspondientes coordenadas rectangulares de posición se tendrá:

$$\boldsymbol{r\ x\ R = \ M_R^O}$$

$$(\ xi + zK)\ x\ (\ -75\ j) = 180\ i - 165\ k$$

$$-75\ x\ k + 75\ z\ i = 180\ i - 165\ k$$

$$-75\ x\ k = \ -165\ k$$

$$x = \frac{-165\ k}{-75\ k}$$

$$\boldsymbol{x = 2.2\ m}$$

$$75\ z\ i = 180\ i$$

$$z = \frac{180\ i}{75\ i}$$

$$\boldsymbol{z = 2.4\ m}$$

c).- Se concluye entonces que, la magnitud de la resultante de las fuerzas aplicadas en el sistema es de 75 Toneladas, y está ubicada a 2.2 metros en el sentido x, y, a 2.4 metros en el sentido z.

**Ejemplo de cálculo 43.-** En el sistema mostrado en la figura, reemplace las fuerzas aplicadas por un sistema equivalente fuerza-par en O.

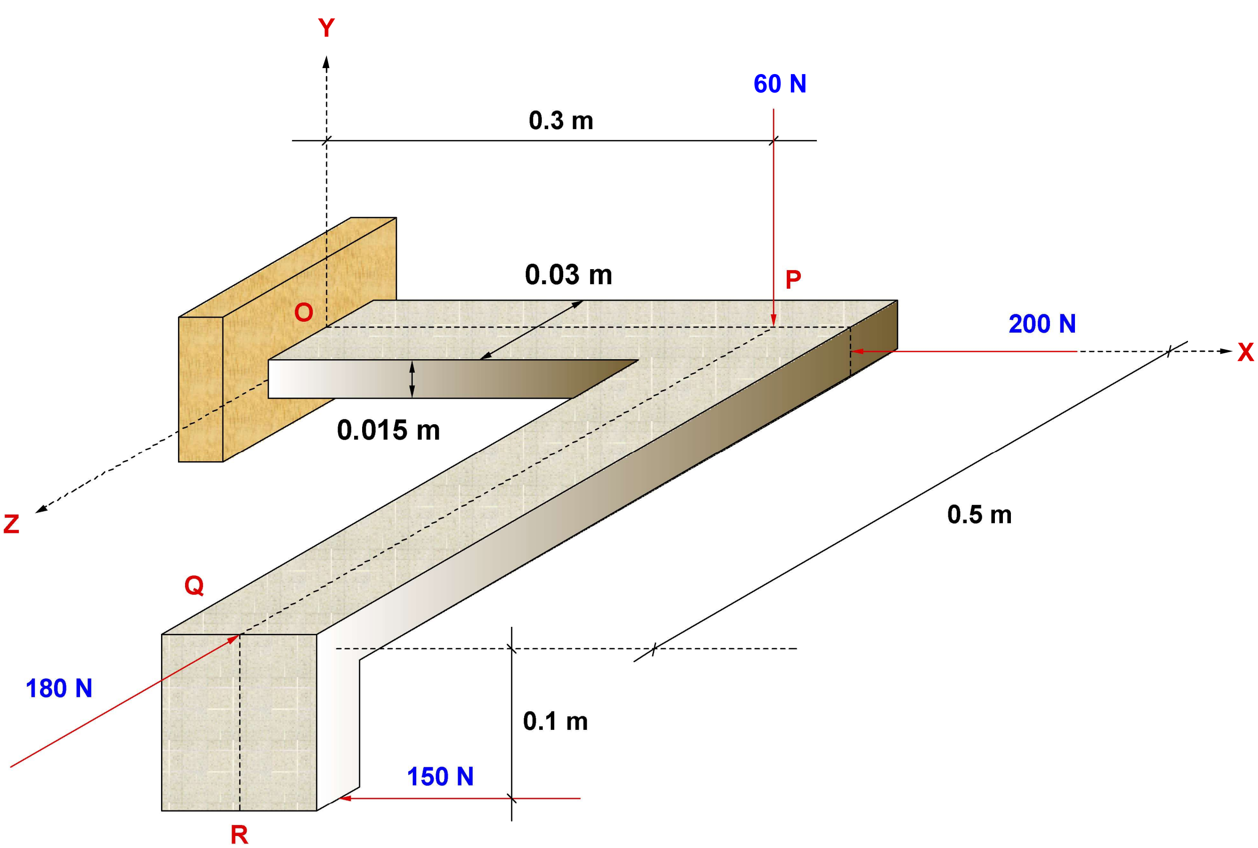



**FIGURA 178**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas aplicadas: 60 N, 200 N y, 180 N, 150 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

  Reemplazar las fuerzas aplicadas por un sistema equivalente fuerza-par en O.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Determinar las componentes rectangulares de la fuerza resultante:

$$\boldsymbol{R} = -(60\ N)j - (200\ N)i - (150\ N)i - (180\ N)k$$

$$\boldsymbol{R} = -(350\ N)i - (60\ N)j - (180\ N)k$$

  b).- Determinar los vectores posición r, de las fuerzas.

$$r_P = 0.3\ m\ i$$

$$r_Q = 0.3\ m\ i + 0.5\ m\ k$$

$$r_R = 0.3\ m\ i - 0.1\ m\ j + 0.5\ m\ k$$

  c).- Establecer la ecuación para $M_O^R$:

$$M_O^R = r_P\ x\ [-(200\ N)i - (60\ N)j] + r_Q\ x\ [-(180\ N)k] + r_R\ x\ [-(150\ N)i]$$

$$M_O^R = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0.3\ m & 0 & 0 \\ -200N & -60N & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0.3m & 0 & 0.5m \\ 0 & 0 & -180N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0.3m & -0.1m & 0.5m \\ -150N & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_O^R = -(18Nm)k + (54\ Nm)j + (75\ Nm)j - (15Nm)k$$

$$\boldsymbol{M_O^R} = (\boldsymbol{129Nm})\boldsymbol{j} - (\boldsymbol{33Nm})\boldsymbol{k}$$

## 3.18 EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS EN DOS DIMENSIONES.

En esta sección se estudiarán las condiciones necesarias para determinar el equilibrio estático de un cuerpo rígido sometido a la acción de varias fuerzas, o a un sistema de fuerzas aplicado sobre él.

Para poder determinar el equilibrio estático de un cuerpo es necesario plantear las denominadas "**ecuaciones del equilibrio**", las cuales se resumen de manera general de la siguiente manera, y considerando que en el presente estudio se aplicarán únicamente a un sistema bidimensional.

$$1.-\sum F_X = 0$$

$$2.-\sum F_y = 0$$

$$3.-\sum M_O = 0$$

Al plantear en un ejercicio las tres ecuaciones del equilibrio, se generará un sistema de ecuaciones lineales que permitirán determinar fuerzas desconocidas que estén actuando sobre el cuerpo, o reacciones sobre puntos de apoyo en estructuras. Además es requisito indispensable para la resolución de problemas relacionados, identificar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, y dibujarlas en un "**diagrama de cuerpo libre**" que facilite la identificación de las incógnitas, y la estructuración de las ecuaciones.

Para realizar el diagrama de cuerpo libre se recomienda tomar en cuenta las siguientes recomendaciones, diagramar o representar todo el conjunto de fuerzas externas, es decir el conjunto de acciones que se realizan sobre él, considerando aquellas que no están descritas de manera gráfica sino de manera intrínseca, como reacciones en los puntos de apoyo, anclajes (dependiendo del tipo), peso, entre otros.

Recordar además que, al hablar de fuerzas externas, en ellas se incluirán las conocidas (datos), como aquellas que constituyen las incógnitas del sistema de ecuaciones lineales generado, fundamentalmente reacciones o fuerzas de restricción.

Finalmente se recomienda adicionalmente, indicar de manera clara las dimensiones, pues esto es fundamental a la hora de determinar momentos de fuerzas aplicadas al sistema.

## 3.18.1 TABLA DE REACCIONES EN APOYOS Y CONEXIONES.

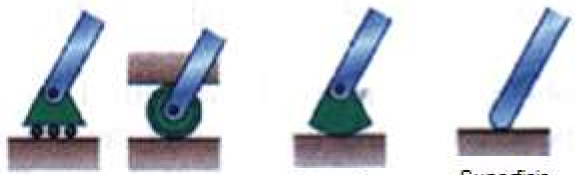
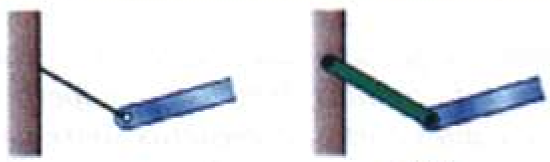
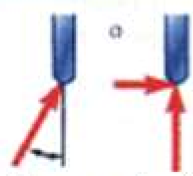
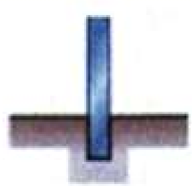
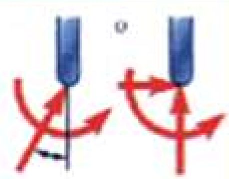
| Apoyo o enlace | Reacción | No. de incógnitas |
|---|---|---|
|  Rodillos, Balancín, Superficie lisa |  Fuerza con recta soporte conocida | 1 |
|  Cable, Bicla |  Fuerza con recta soporte conocida | 1 |
|  Corredera o cursor, Pasador en ranura lisa |  Fuerza con recta soporte conocida | 1 |
|  Articulación, Superficie rugosa |  Fuerza con dirección desconocida | 2 |
|  Empotramiento |  Fuerza y par | 3 |

Tabla 1[20]

[20] http://cursos.tecmilenio.edu.mx/cursos/at8q3ozr5p/prof/im/im09001/anexos/explica3.htm

## 3.19 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

**Ejemplo de cálculo 44.-** En el sistema mostrado en la figura. Determine el valor de las reacciones en los puntos de apoyo P y Q, despreciar el peso de la viga.

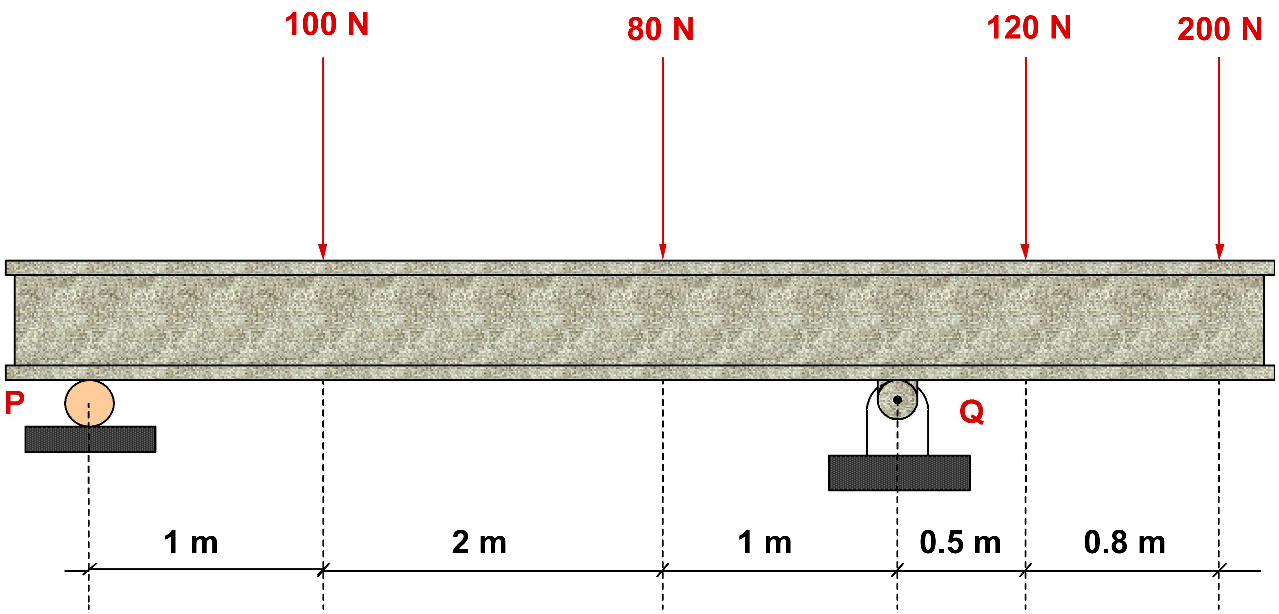



**FIGURA 179**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas aplicadas: 100 N, 80 N y, 120 N, 200 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

  Determinar el valor de las reacciones en los puntos de apoyo P y Q, despreciar el peso de la viga.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre, donde se indicarán tanto las fuerzas actuantes en el sistema como las reacciones en los puntos de apoyo (ver tabla 1, para apoyo tipo rodillo, y articulación)

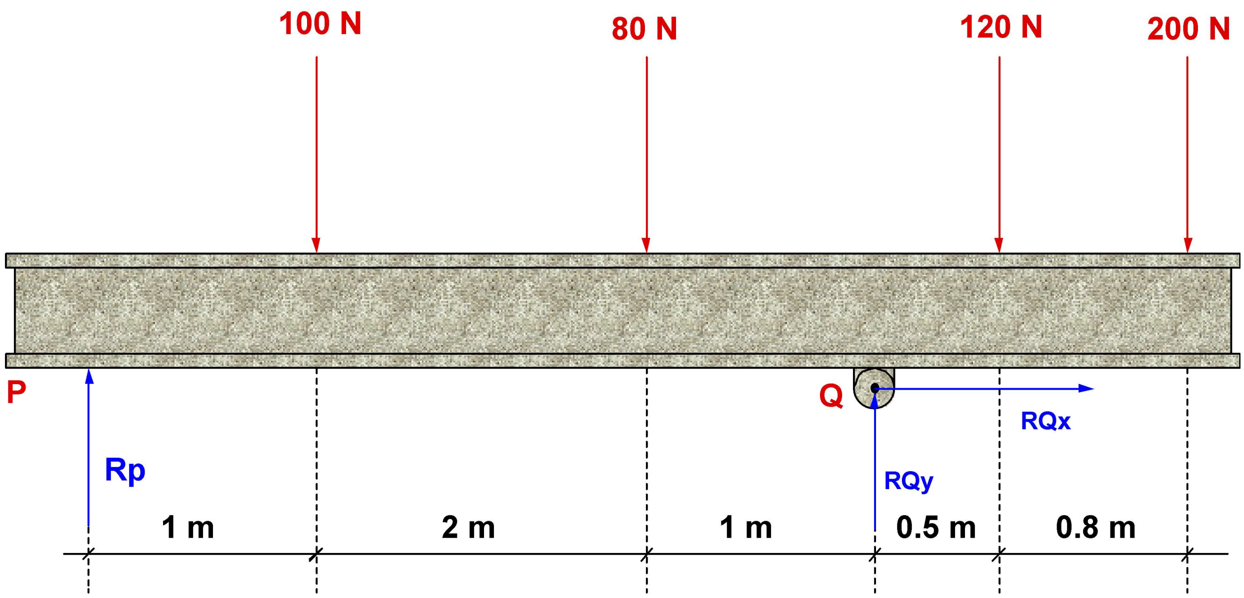



FIGURA 180

b).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá:

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = RQ_x$$

$$\boldsymbol{RQ_x = 0}$$

c).- De la tercera ecuación del equilibrio con respecto al punto P se tendrá:

$$\sum M_P = 0$$

$$\sum M_P = -(100N)(1m) - (80N)(3m) + RQ_y(4m) - (120N)(4.5m) - (200N)(5.3m) = 0$$

$$\sum M_P = -100Nm - 240Nm + RQ_y(4m) - 540Nm - 1060Nm = 0$$

$$\sum M_P = RQ_y(4m) - 1940Nm = 0$$

$$RQ_y = \frac{1940Nm}{4m}$$

$$\boldsymbol{RQ_y = 485\ N}$$

d).- De la tercera ecuación del equilibrio con respecto al punto Q se tendrá:

$$\sum M_Q = 0$$

$$\sum M_Q = -R_P(4m) + (100N)(3m) + (80N)(1m) - (120N)(0.5m) - (200N)(1.3m) = 0$$

$$\sum M_Q = -R_P(4m) + 300Nm + 80Nm \quad 60Nm \quad 260Nm = 0$$

$$\sum M_Q = -R_P(4m) + 380Nm \quad 320Nm \quad 0$$

$$\sum M_Q = -R_P(4m) + 60Nm \quad 0$$

$$-R_P(4m) = -60Nm$$

$$R_P(4m) = 60Nm$$

$$R_P = \frac{60Nm}{4m}$$

$$\boldsymbol{R_P = 15\ N}$$

e).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio, a fin de comprobar resultados obtenidos se tendrá:

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = 15N - 100N - 80N + 485N - 120N - 200N = 0$$

$$\sum F_y = 500N - 500N = 0$$

$$0 = 0$$

- **Conclusiones.**

Como se satisface la segunda condición de equilibrio, se concluye que los valores obtenidos dentro del proceso de cálculo son correctos.

**Ejemplo de cálculo 45.-** Una placa de madera está sometida al sistema de fuerzas mostrado en la figura. Calcule las reacciones en los apoyos P y Q.

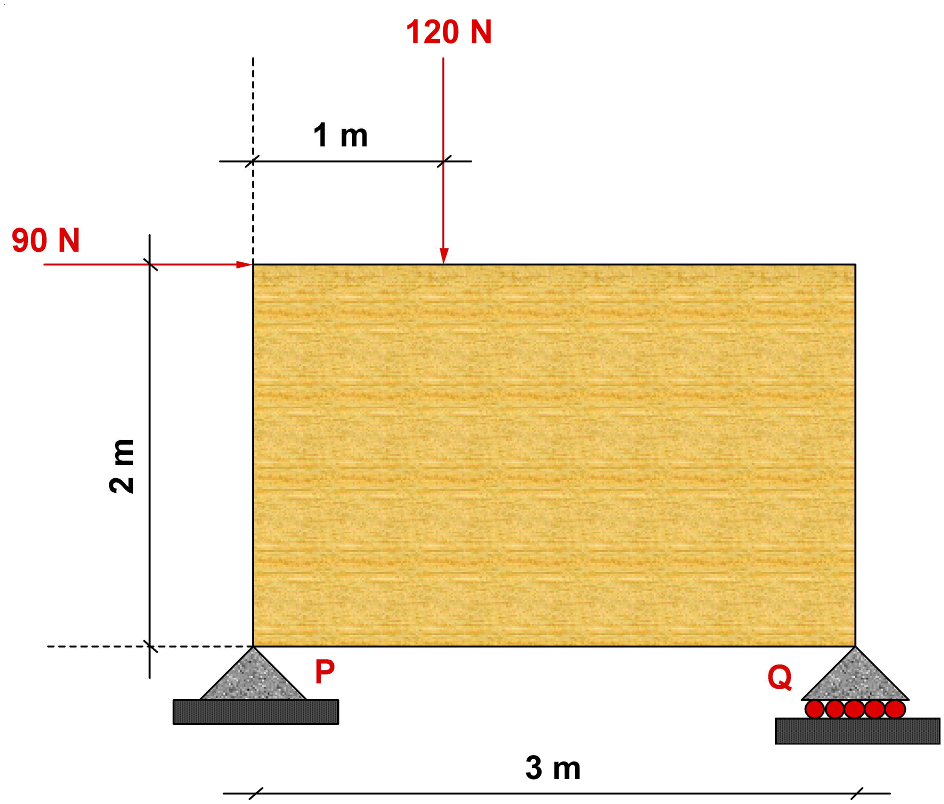



**FIGURA 181**

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas aplicadas: 90 N, y, 120 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

  Calcular, las reacciones en los apoyos P y Q.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre, donde se indicarán tanto las fuerzas actuantes en el sistema como las reacciones en los puntos de apoyo (ver tabla 1, para apoyo tipo rodillo, y apoyo simple)

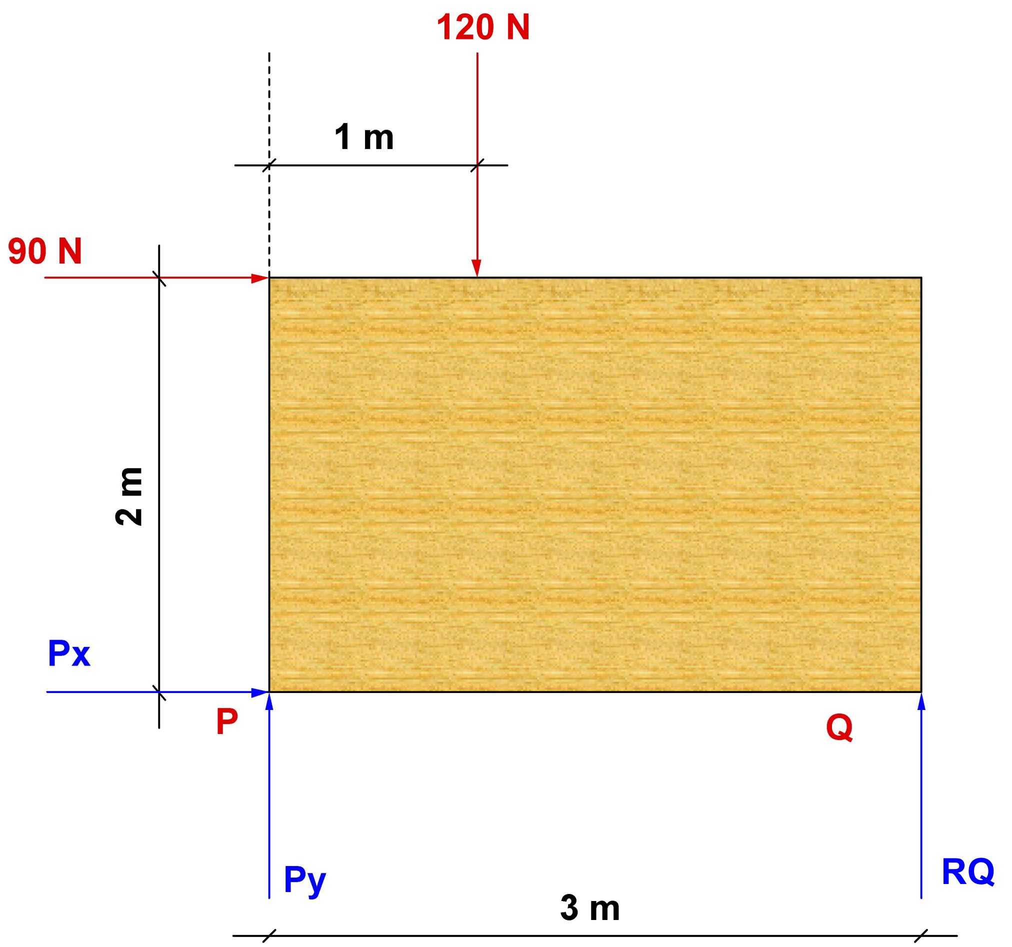



**FIGURA 182**

b).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá:

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = 90\ N + P_X = 0$$

$$\boldsymbol{P_X = -90\ N}$$

c).- De la tercera ecuación del equilibrio con respecto al punto P se tendrá:

$$\sum M_P = 0$$

$$\sum M_P = -(90\ N)(2\ m) - (120\ N)(1\ m) + R_Q(3m) = 0$$

$$\sum M_P = -180\ Nm - 120\ Nm + R_Q(3\ m) = 0$$

$$\sum M_P = R_Q(3m) - 300\ Nm = 0$$

$$R_Q = \frac{300\ Nm}{3\ m}$$

$$\boldsymbol{R_Q = 100\ N}$$

d).- De la tercera ecuación del equilibrio con respecto al punto Q se tendrá:

$$\sum M_Q = 0$$

$$\sum M_Q = -(90\ N)(2\ m) + (120\ N)(2\ m) - P_Y(2\ m) = 0$$

$$\sum M_Q = -180\ Nm \quad 240\ Nm - P_Y\ (2\ m) = 0$$

$$\sum M_Q = -P_Y(2\ m) + 60\ Nm \quad 0$$

$$-P_Y(2\ m) = -60Nm$$

$$P_Y(2\ m) = 60Nm$$

$$P_Y = \frac{60\ Nm}{2\ m}$$

$$\boldsymbol{P_Y = 30\ N}$$

e).- Para determinar la reacción en el punto P se tendrá:

$$R_P = \sqrt{P_X^2 + P_y^2}$$

$$R_P = \sqrt{(-90\ N)^2 + (30\ N)^2}$$

$$\boldsymbol{R_P = 94.868\ N}$$

f).- Determinación del ángulo director.

$$tang\ \theta = \frac{30\ N}{-90\ \ N}$$

$$tang\ \theta = \ -0.333$$

$$\theta = arc\ \text{tang}\ \ (-0.333)$$

$$\theta = \ \mathbf{-18^{\circ}\ 26'\ 5.82''}$$

**Ejemplo de cálculo 46.-** Una placa de madera está sometida al sistema de fuerzas mostrado en la figura. Determine, las reacciones en los apoyos P y Q.

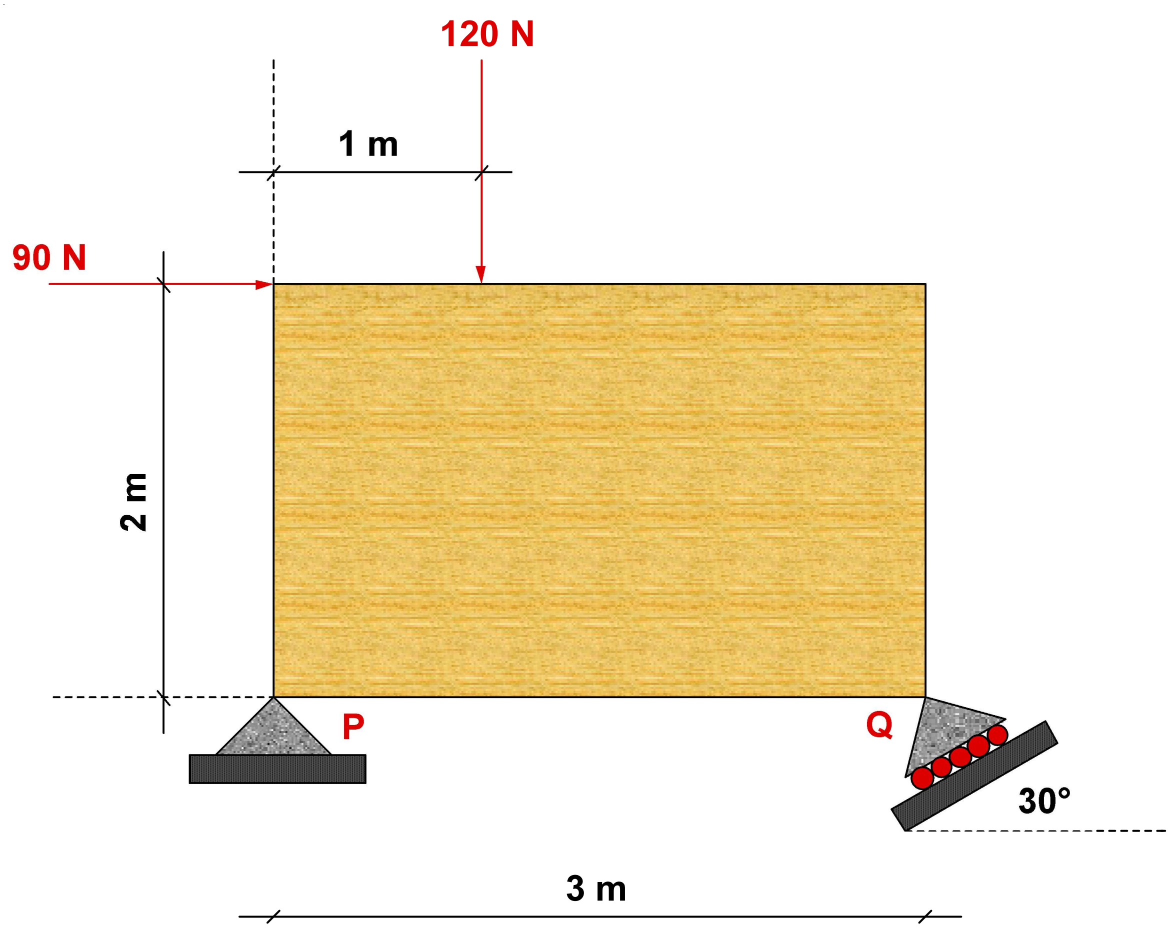



FIGURA 183

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerzas aplicadas: 90 N, y, 120 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

  Determinar, las reacciones en los apoyos P y Q.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre, donde se indicarán tanto las fuerzas actuantes en el sistema como las reacciones en los puntos de apoyo (ver tabla 1, para apoyo tipo rodillo, y apoyo simple)

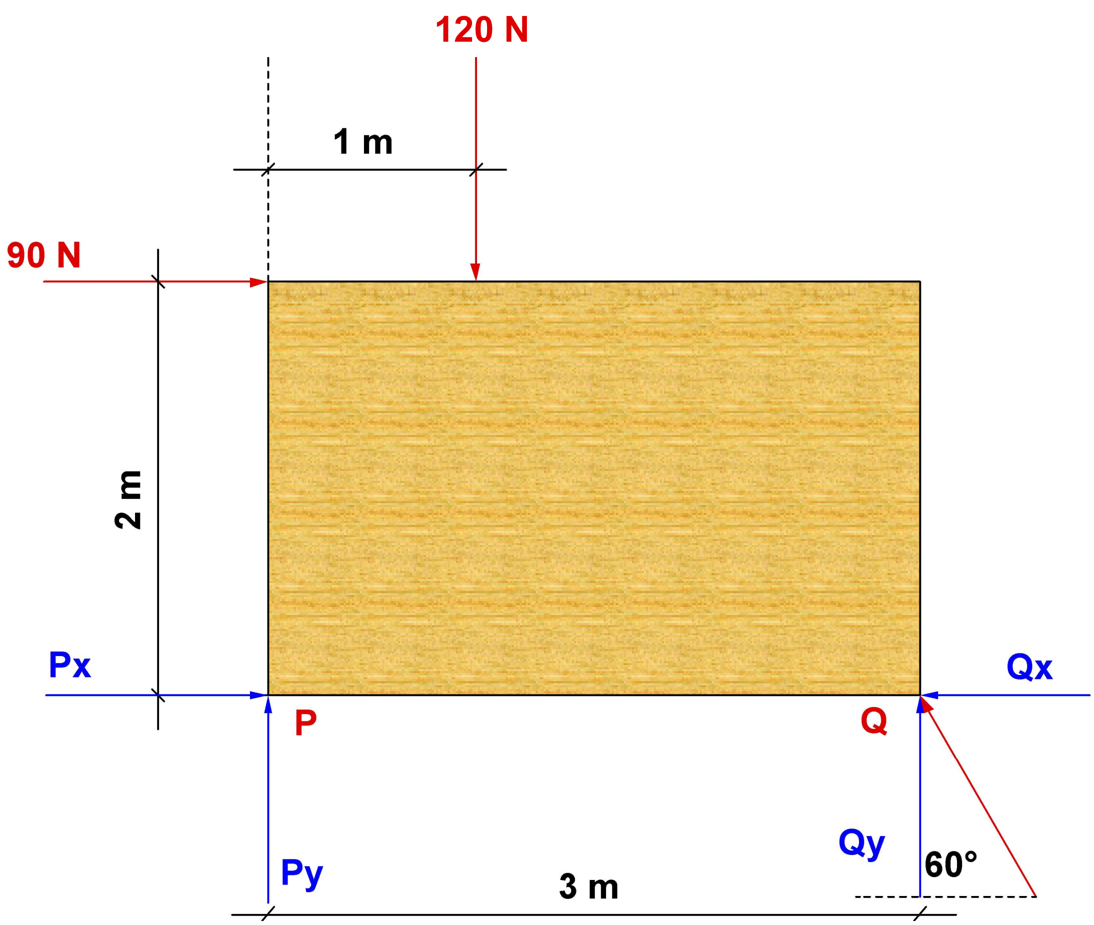



FIGURA 184

a).- Los valores de las componentes rectangulares de la reacción en el punto Q serán:

$$Q_X = Q\ cos\ 60°$$

$$Q_Y = Q\ sen\ 60°$$

b).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá:

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = 90\ N + P_X - Q_X = 0$$

$$\sum F_X = 90\ N + P_X - Q \cos 60° = 0$$

$$\mathbf{1)\ 90\ N + P_X - Q\ cos\ 60° = 0}$$

c).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio se tendrá:

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = -120\ N + P_Y + Q_Y = 0$$

$$\mathbf{2)\ -120\ N + P_Y + Q\ sen\ 60° = 0}$$

d).- De la tercera ecuación del equilibrio con respecto al punto P se tendrá:

$$\sum M_P = 0$$

$$\sum M_P = -(90\ N)(2\ m) - (120\ N)(1\ m) + Q_Y(3m) = 0$$

$$\sum M_P = -180\ Nm - 120\ Nm + Q(sen\ 60°)(3\ m) = 0$$

$$\sum M_P = -300\ Nm + Q(se\ \ 60°)(3m) = 0$$

$$Q = \frac{300\ Nm}{(sen\ 60°)(3\ m)}$$

$$\mathbf{Q = 115.470\ N}$$

e).- Reemplazando el valor obtenido de Q en 2) se tendrá:

$$2)\ -120\,N + P_Y + Q\ sen\ 60° = 0$$

$$-120\,N + P_Y + (115.470\,N)\ sen\ 60° = 0$$

$$P_Y = 120\,N - (115.470\,N)\ sen\ 60°$$

$$\boldsymbol{P_Y = 2\quad N}$$

f).- Reemplazando el valor obtenido de Q en 1) se tendrá:

$$1)\ 90\,N + P_X - Q\cos 60° = 0$$

$$90\,N + P_X - (115.470N)\cos 60° = 0$$

$$P_X = -90\,N + (115.470N)\cos 60°$$

$$\boldsymbol{P_X = -32.265\,N}$$

g).- Para determinar la reacción en el punto P:

$$R_P = \sqrt{P_X^2 + P_y^2}$$

$$R_P = \sqrt{(-32.265\,N)^2 + (20\,N)^2}$$

$$\boldsymbol{R_P = 37.960\,N}$$

h).- Determinación del ángulo director.

$$tang\ \Theta = \frac{20\,N}{-32.265\ N}$$

$$tang\ \Theta = -0.619$$

$$\Theta = arc\,\mathrm{tang}\ (-0.619)$$

$$\Theta = \boldsymbol{-3\ \ °45'27.03''}$$

i).- Para determinar la reacción en el punto Q:

$$Q_X = Q\ cos\ 60°$$

$$Q_Y = Q\ sen\ 60°$$

$$Q_X = (115.470\ N)\ cos\ 60°$$

$$Q_Y = (115.470\ N)\ sen\ 60°$$

$$\boldsymbol{Q_X = 57.735\ N.}$$

$$\boldsymbol{Q_Y = 99.999\ N.}$$

$$R_Q = \sqrt{P_X^2 + P_y^2}$$

$$R_Q = \sqrt{(57.735\ N)^2 + (99.999\ N)^2}$$

$$\boldsymbol{R_Q = 115.470\ N}$$

Que verifica resultados.

j).- Determinación del ángulo director.

$$tang\ \Theta = \frac{99.999\ N}{57.735\ \ N}$$

$$tang\ \Theta = 1.732$$

$$\Theta = arc\ \mathrm{tang}\ (1.732)$$

$$\Theta = \boldsymbol{60°}$$

Que verifica resultados.

k).- Para verificar resultados aplicando la ecuación de momentos con respecto al punto Q se tendrá:

$$\sum M_Q = 0$$

$$\sum M_Q = -(90\ N)(2\ m) + (120\ N)(2\ m) - P_Y(3\ m) = 0$$

$$\sum M_Q = -180\ Nm + 240\ Nm - P_Y\ (3\ m) = 0$$

$$-180\ Nm \quad 240\ Nm - (20\ N)\ (3\ m) = 0$$

$$-180\ Nm \quad 240\ Nm - 60\ Nm \quad 0$$

$$-240\ Nm + 240\ Nm = 0$$

$$0 = 0$$

- **Conclusiones.**

  Como se satisface la tercera condición de equilibrio, con respecto al punto Q, se concluye que los valores obtenidos dentro del proceso de cálculo son correctos.

**Ejemplo de cálculo 47.-** Un sistema de montaje levanta una carga de 30 KN, el peso de la estructura es 12 KN, concentrado en su centro de gravedad. Calcule las reacciones en los apoyos R y S del sistema mostrado.

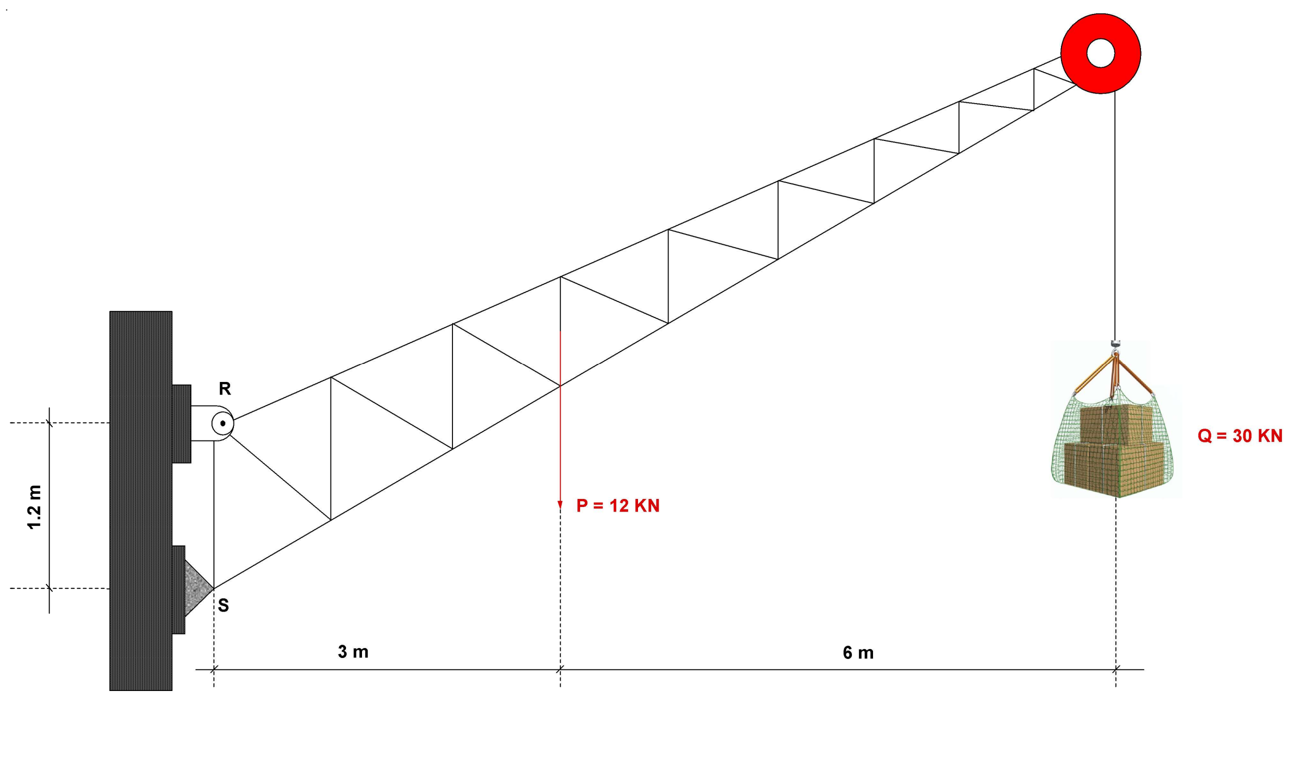



**FIGURA 185**

- **Datos.**

  Magnitud de las fuerzas: peso de la estructura de montaje 12 KN, carga 30 KN.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

  Calcular las reacciones en los apoyos R y S.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre, donde se indicarán tanto las fuerzas actuantes en el sistema como las reacciones en los puntos de apoyo (ver tabla 1)

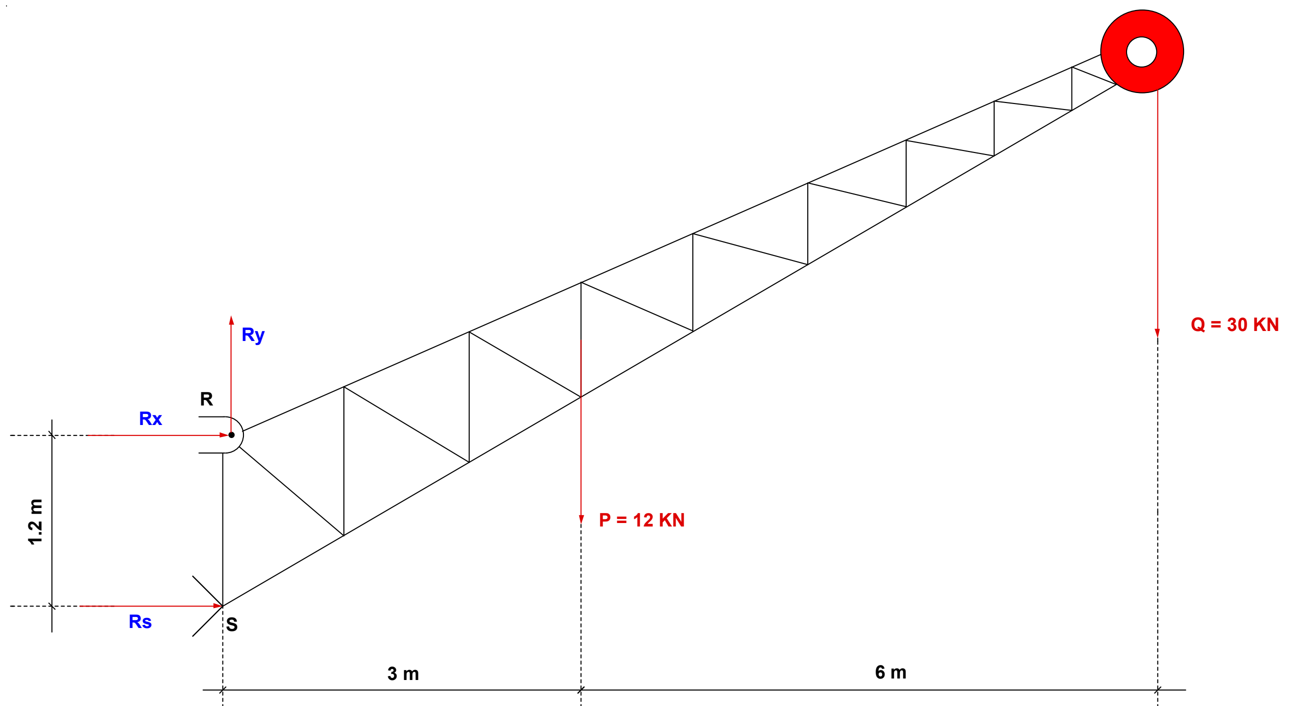



**FIGURA 186**

a).- De la tercera ecuación del equilibrio con respecto al punto R se tendrá:

$$\sum M_R = 0$$

$$\sum M_R = R_S\,(1.2\ m) - (12\ KN)(3\ m) - (30\ KN)(9\ m) = 0$$

$$\sum M_R = R_S\,(1.2\ m) - 36\ KNm - 270\ KNm = 0$$

$$\sum M_R = R_S\,(1.2\ m) - 306\ KNm = 0$$

$$R_S = \frac{306\ KNm}{1.2\ m}$$

$$\boldsymbol{R_S = 255\ KN.}$$

b).- De la primera ecuación del equilibrio se tendrá:

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = R_X + R_S = 0$$

$$\sum F_X = R_X + (255\ KN) = 0$$

$$\boldsymbol{R_X = -255\ KN}$$

El signo negativo implica que la dirección de la fuerza considerada es en el otro sentido.

c).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio se tendrá:

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = R_Y - 12\ KN - 30\ KN \quad 0$$

$$\sum F_y = R_Y - 42\ KN = 0$$

$$\boldsymbol{R_Y = 42\ KN}$$

d).- Para determinar la reacción en el punto R se tendrá:

$$R_R = \sqrt{R_X^2 + R_y^2}$$

$$R_R = \sqrt{(255\ KN)^2 + (42\ KN)^2}$$

$$\boldsymbol{R_R = 258.435\ KN}$$

e).- Determinación del ángulo director.

$$tang\ \Theta = \frac{42\ KN}{255\ \ KN}$$

$$tang\ \Theta = \ 0164$$

$$\Theta = arc\ \text{tang}\ (0.164)$$

$$\Theta = \ \mathbf{9°\ 18'48.96''}$$

f).- Para comprobar resultados se aplicaran momentos con respecto al punto S.

$$\sum M_S = 0$$

$$\sum M_S = \ R_X\ (1.2\ m) - (12\ KN)(3\ m) - (30\ KN)(9\ m)\ \ = 0$$

$$\sum M_S = \ R_X(1.2\ m) - 36\ KNm - 270\ KNm = 0$$

$$\sum M_P = \ R_X\ (1.2\ m) - 306\ KNm\ \ = 0$$

$$(255\ KN)\ (1.2\ m) - 306\ KN\ m = 0$$

$$306\ KNm - 306\ KN\ m = 0$$

$$0 = 0$$

- **Conclusiones.**

  Como se satisface la tercera condición de equilibrio, con respecto al punto S, se concluye que los valores obtenidos dentro del proceso de cálculo son correctos.

**Ejemplo de cálculo 48.-** En el siguiente sistema determine, las reacciones en el apoyo fijo W, y el momento en el mismo punto, sabiendo que la tensión en el cable UZ es de 200 N.

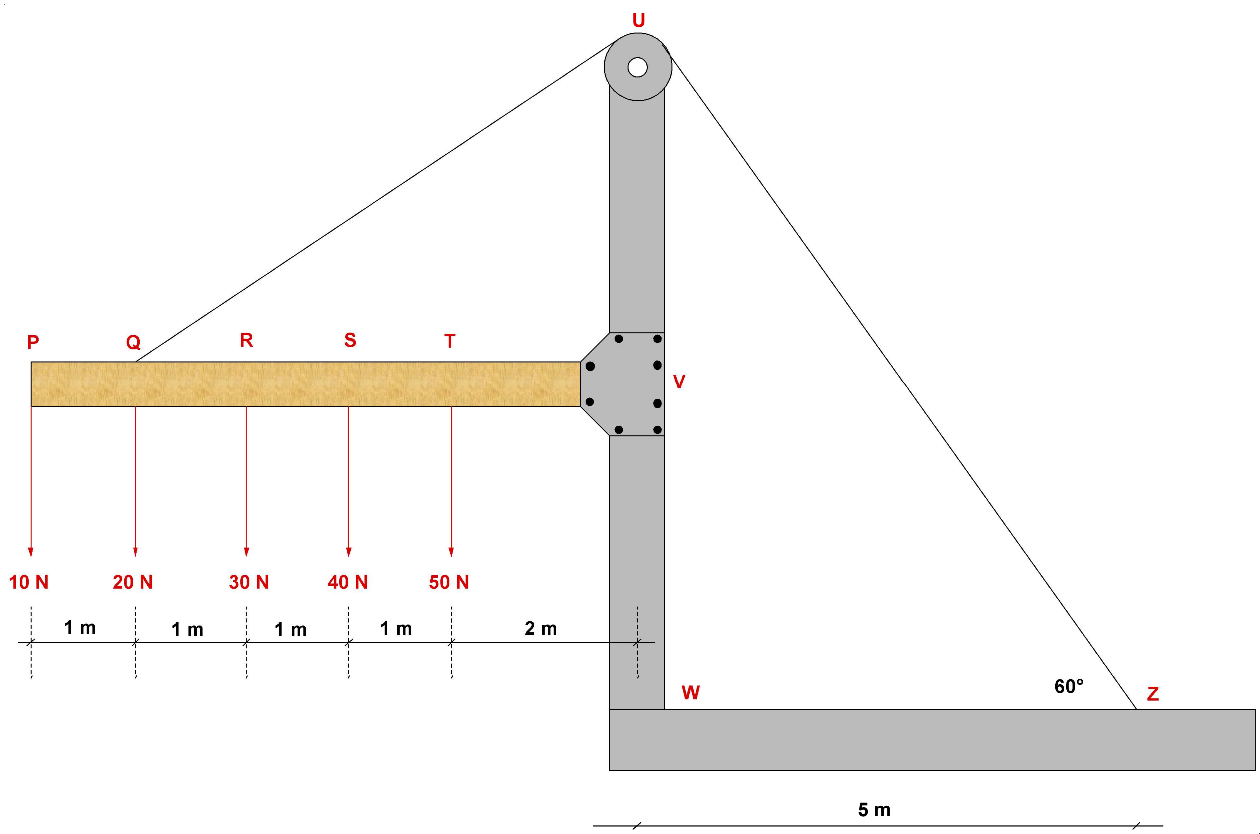



**FIGURA 187**

- **Datos.**

  Magnitud de las fuerzas aplicadas al sistema 10 N, 20N, 30N, 40N, 50N, valor de la tensión en el cable UZ, 200 N.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

  Determinar, las reacciones en el apoyo fijo W, y el momento en el mismo punto.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre, donde se indicarán tanto las fuerzas actuantes en el sistema como las reacciones en los puntos de apoyo (ver tabla 1)

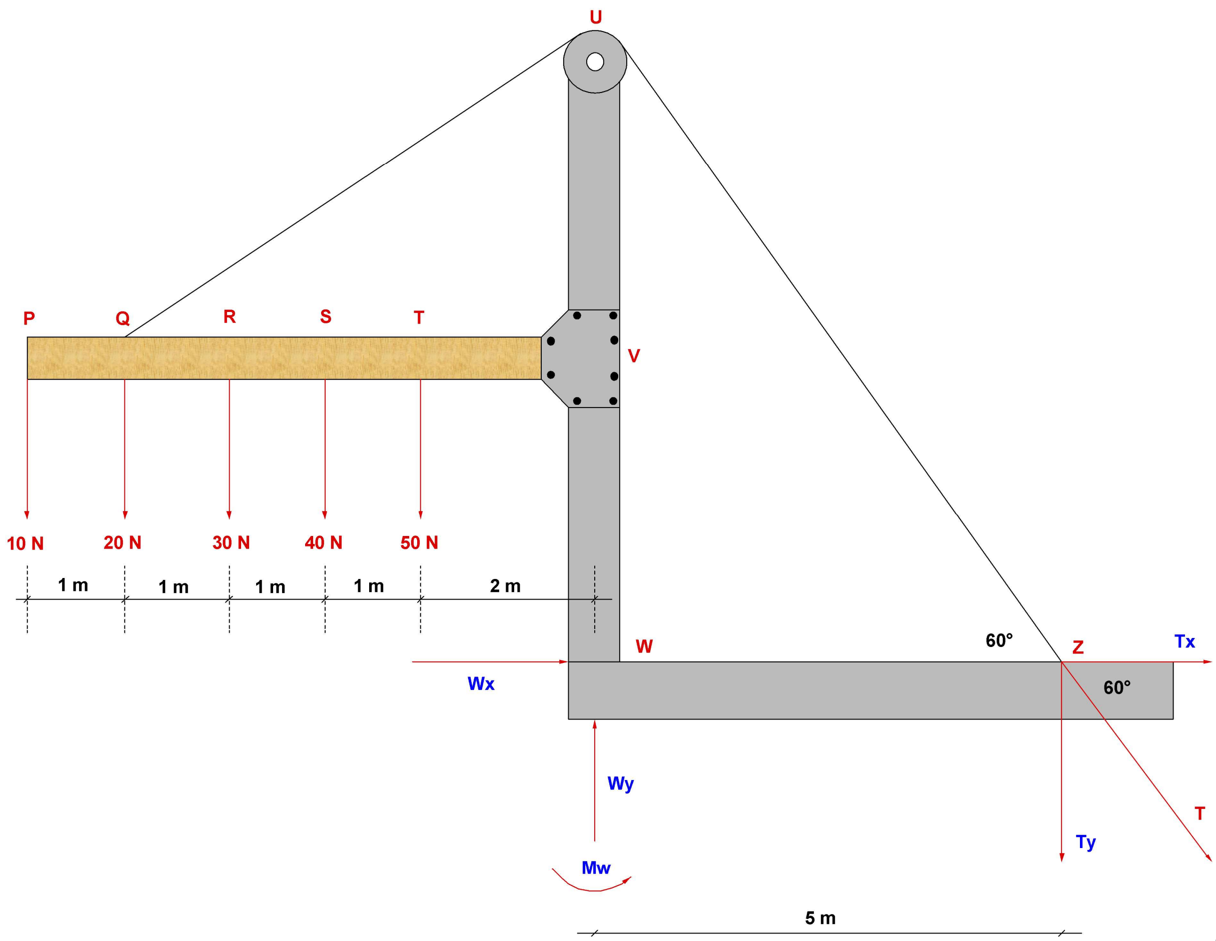



FIGURA 188

a).- Los valores de las componentes rectangulares de la tensión T serán:

$$T_x = T\ cos\ 60°$$

$$T_Y = T\ sen\ 60°$$

$$T_x = 200\ cos\ 60°$$

$$T_Y = 200\ sen\ 60°$$

$$\boldsymbol{T_x = 100\ N}$$

$$\boldsymbol{T_Y = 173.205\ N.}$$

b).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio tenemos:

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = W_X + T_X = 0$$

$$\sum F_X = W_X + (100\ N) = 0$$

$$\boldsymbol{W_X = -100\ N.}$$

El signo negativo implica cambio de sentido de la componente.

c).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio se tendrá:

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = -10\ N - 20\ N - 30N - 40\ N - 50\ N + W_Y - T_Y = 0$$

$$\sum F_y = -150\ N + W_Y - 173.205\ N = 0$$

$$\sum F_y = W_Y - 323.205\ N = 0$$

$$\boldsymbol{W_Y = 323.205\ N.}$$

d).- Para determinar la reacción en el punto W se tendrá:

$$R_W = \sqrt{W_X^2 + W_y^2}$$

$$R_W = \sqrt{(100\ N)^2 + (323.205\ N)^2}$$

$$\boldsymbol{R_W = 338.321\ N.}$$

e).- Determinación del ángulo director.

$$tang\ \Theta = \frac{323.205\ N}{100\ \ N}$$

$$tang\ \Theta = 3.232$$

$$\Theta = arc\,\mathrm{tang}\ (3.232)$$

$$\Theta = \boldsymbol{72°48'27.44''}$$

f).- Para determinar el momento $M_W$

$$\sum M_W = 0$$

$$\sum M_W = (10\ N)(6m) + (20\ N)(5m) + (30\ N)(4m) + (40\ N)(3m) + (50\ N)(2m) -$$

$$- T_Y(5m) + \ M_W = 0$$

$$\sum M_W = 60\ Nm + 100Nm \quad 120Nm \quad 120\ Nm \quad 100\ Nm - (173.205N)(5m) + M_W = 0$$

$$\sum M_W = \ 500\ Nm\ - 866.025\ Nm + \ M_W = 0$$

$$\sum M_W = \ -366.025\ Nm + \ M_W = 0$$

$$\boldsymbol{M_W = 366.025\ Nm}$$

**Ejemplo de cálculo 49.-** En el siguiente sistema. Calcule la posición de equilibrio estático.

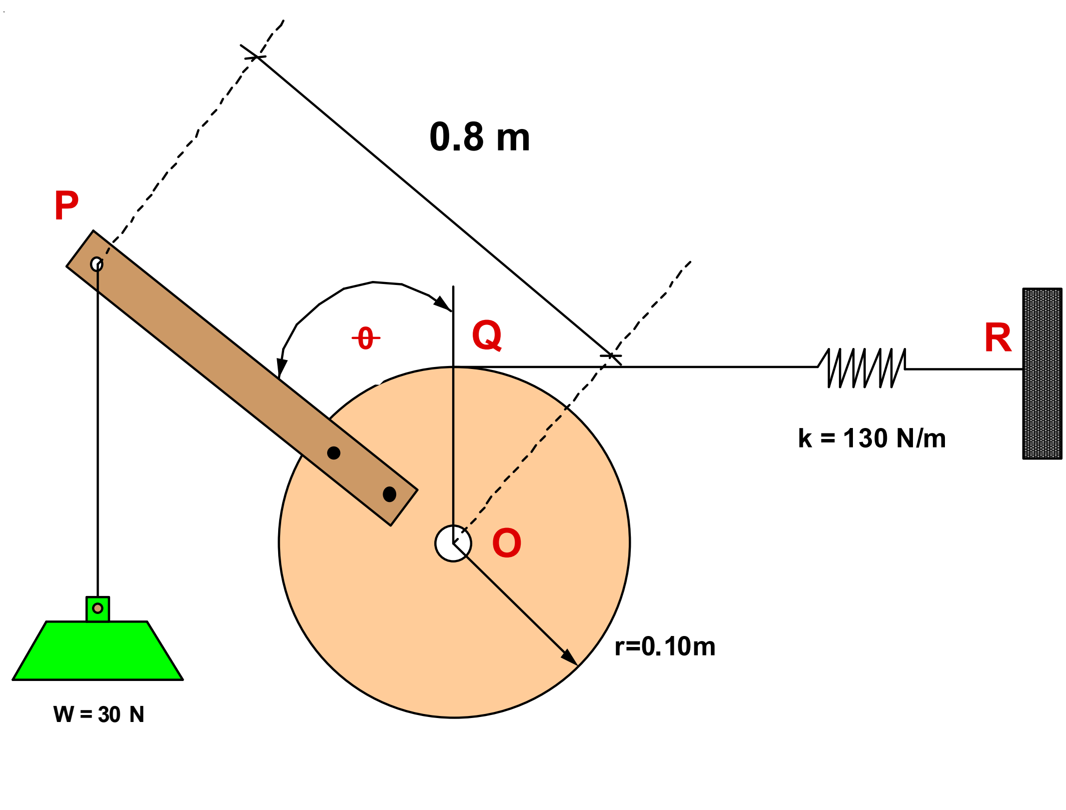



FIGURA 189

- **Datos.**

  Magnitud de la fuerza aplicada al sistema 30 N, constante del resorte 130 N/m.

  Distancias especificadas en la gráfica.

- **Objetivo.**

  Calcular la posición de equilibrio estático.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre, donde se indicarán tanto las fuerzas actuantes en el sistema como las reacciones en los puntos de apoyo (ver tabla 1)

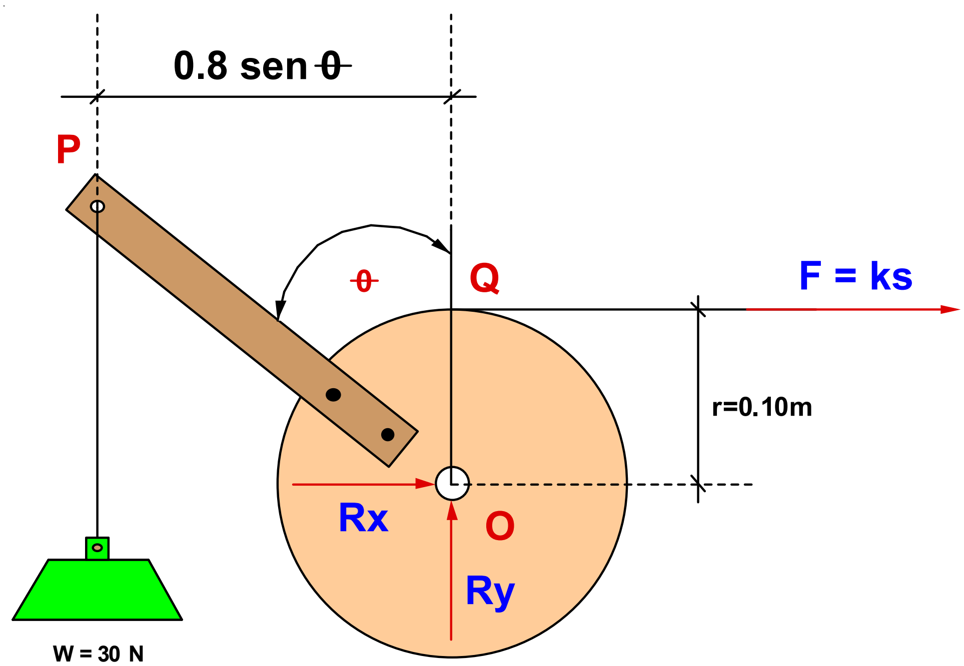



FIGURA 190

b).- Debemos recordar que, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ks} = \boldsymbol{Kr}\Theta$

c).- Calculando momentos con respecto al punto O, se tendrá:

$$\sum M_O = 0$$

$$\sum M_O = Wl\; sen\; \Theta - r(kr\Theta) = \; 0$$

$$\boldsymbol{sen}\,\Theta = \frac{\boldsymbol{kr^2}}{\boldsymbol{Wl}}\,\Theta$$

$$sen\,\Theta = \frac{(130\ Nm)(0.10m)^2}{(30\ N)(0.8\ m)}\,\Theta$$

$$\boldsymbol{sen}\,\Theta = \mathbf{0.054}\,\Theta$$

# UNIDAD 4

## FRICCIÓN.

# UNIDAD 4

## CONTENIDOS.

**4.1 INTRODUCCIÓN A LA FRICCIÓN.**

**4.2 LA FRICCIÓN SECA.**

**4.3 PROPIEDADES DE LA FRICCIÓN.**

**4.4 VALORES PARA LOS COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA.**

**4.5 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.**

## RESULTADOS DE APRENDIZAJE.

**DESCRIBIR LAS CARACTERÍSTICAS DE LA FRICCIÓN, Y, ANALIZAR Y SOLUCIONAR EJERCICIOS QUE IMPLIQUEN LA EXISTENCIA DE FRICCIÓN ESTÁTICA.**

## 4.1 INTRODUCCIÓN A LA FRICCIÓN.

El término fricción tiene su origen etimológico en el latín “frictio”, que deriva de friccionar, y se refiere a restregar o rozar un cuerpo con otro, frotar un cuerpo con otro.

La fricción no es un fenómeno ajeno a la experiencia cotidiana, ya que, siempre que se trata de mover un cuerpo que se encuentra en contacto directo con otro se puede notar claramente que existe cierta resistencia u oposición a dicho movimiento.

La razón de la existencia de esta fuerza se debe fundamentalmente a que las superficies de los cuerpos por más pulimentadas que estas aparenten, en la realidad no es así, vistas al microscopio, todas las superficies en mayor o menor grado presentan irregularidades y la interacción de ellas o el entrelazamiento o traba que ocurre entre ellas son las que producen la denominada fuerza de fricción, dificultando en suma el movimiento relativo entre las dos superficies, lo que directamente se traduce en una fuerza que se opone al movimiento.

Adicionalmente, aunque en menor grado, la fricción depende de la fuerza de adhesión que es producida a nivel molecular entre las superficies de los cuerpos en contacto.

Es importante recalcar que, si bien es cierto existe la idea que la fricción es un fenómeno totalmente negativo, por el desgaste que produce en las piezas mecánicas en contacto, con o sin lubricación, al provocar pérdidas de energía, elevar la temperatura, entre otros, es fundamental en muchos aspectos tan simples como el hecho de caminar, de mantenernos equilibrados aun estando detenidos, un vehículo no pudiese frenar o girar en una curva, las gotas de lluvia no alcanzarían una velocidad terminal, que de no existir la fricción, pudieran incluso acabar con la vida de una persona, etc.

En general existen dos tipos de fricción, la denominada “**fricción seca**”, y la fricción que ocurre dentro de los fluidos (líquidos y gases), en esta sección se tratará específicamente la fricción seca.

**FIGURA 191**[21]

[21] http://definicion.de/friccion/

## 4.2 LA FRICCIÓN SECA.

Al hablar de fricción seca se deberá diferenciar a su vez dos tipos de fricciones, la fricción estática y la cinética.

La fricción estática ocurre cuando un cuerpo se encuentra en reposo y descansa sobre otro, por lo tanto las únicas fuerzas actuantes en el sistema serán el peso del cuerpo y su contraparte a la cual llamaremos fuerza normal N, y que es la reacción de la superficie de contacto con respecto a él.

La característica fundamental de la fuerza normal N, es que la misma siempre será perpendicular o normal a las superficies en contacto.

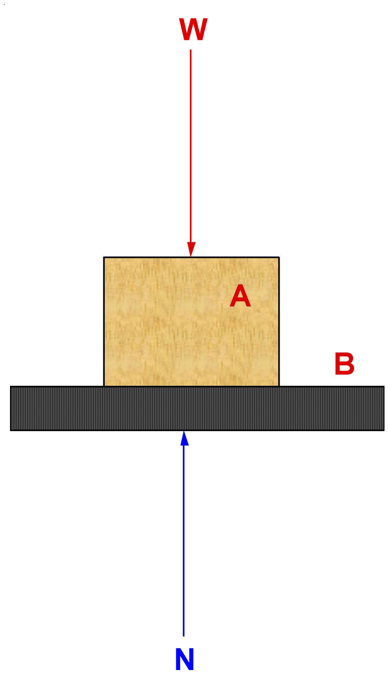



**FIGURA 192**

Bajo estas consideraciones y designando por $F_S$ al valor de la fuerza de fricción estática se tendrá:

$$F_S = u_S N \quad (43)$$

Donde $u_S$ es una constante denominada coeficiente de fricción estática y dependerá de las características de las superficies de contacto, e inferior a la unidad.

Ahora, analicemos lo que ocurre cuando al bloque A, se le aplica una fuerza horizontal F como se muestra en la siguiente figura, si la magnitud de dicha fuerza comienza a incrementarse hasta llegar a romper el estado de reposo, el cuerpo comenzará a desplazarse, y la magnitud de la fuerza de rozamiento cinético irá disminuyendo, es decir que, cuando el cuerpo se desplace el mismo adquiere una velocidad que va en aumento, mientras que la fuerza de fricción representada por $F_K$ permanecerá constante.

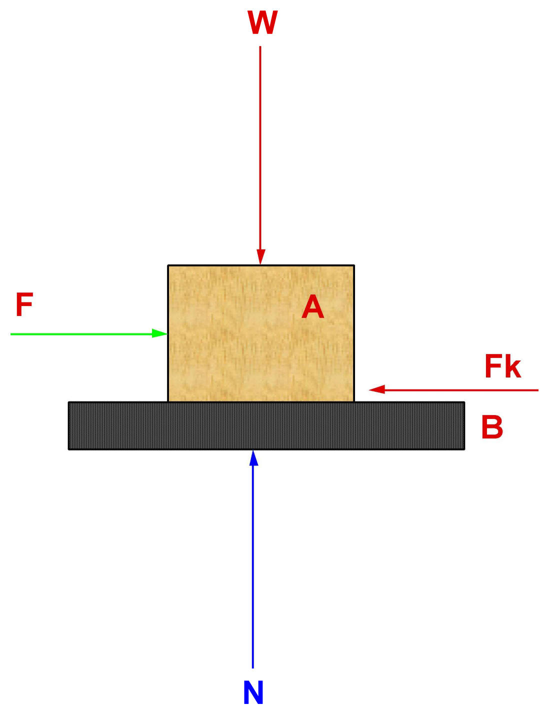



**FIGURA 193**

De lo antes expuesto y denotando por $\mathrm{F_K}$ al valor de la fuerza de fricción cinética se tendrá:

$$\boldsymbol{F_K = u_K N} \quad \textit{(44)}$$

Donde $u_K$ es una constante denominada coeficiente de fricción cinética y siempre menor al coeficiente de fricción estático $u_S$.

## 4.3 PROPIEDADES DE LA FRICCIÓN.

- La fricción depende de las características de las superficies de contacto.

- La fricción es independiente de la forma y del área de las superficies en contacto.

- La fricción es proporcional a la fuerza ejercida de manera perpendicular a las superficies en contacto.

- El coeficiente de fricción estático es variable y por lo general será inferior a la unidad.

- La fricción por deslizamiento irá disminuyendo conforme se incrementa la velocidad de los cuerpos considerados en contacto.

- La fricción será siempre contraria al sentido del desplazamiento del cuerpo considerado en movimiento.

## 4.4 VALORES PARA LOS COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA.

**Valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para superficies secas**

| | |
|---|---|
| Metal sobre metal | 0.15–0.60 |
| Metal sobre madera | 0.20–0.60 |
| Metal sobre piedra | 0.30–0.70 |
| Metal sobre cuero | 0.30–0.60 |
| Madera sobre madera | 0.25–0.50 |
| Madera sobre cuero | 0.25–0.50 |
| Piedra sobre piedra | 0.40–0.70 |
| Tierra sobre tierra | 0.20–1.00 |
| Hule sobre concreto | 0.60–0.90 |

Tabla 2[22]

[22] http://www.monografias.com/trabajos82/temario-temas-selectos-fisica/temario-temas-selectos-fisica2.shtml

## 4.5 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

**Ejemplo de cálculo 1.-** Para mover la caja de madera A de 250 lb de peso, por un plano inclinado, se emplea una fuerza de 180 lb como se indica en la figura. Determine las magnitudes de las fuerzas de fricción estática y cinética del sistema, coeficientes de fricción estático 0.25, coeficiente de fricción cinético 0.20.

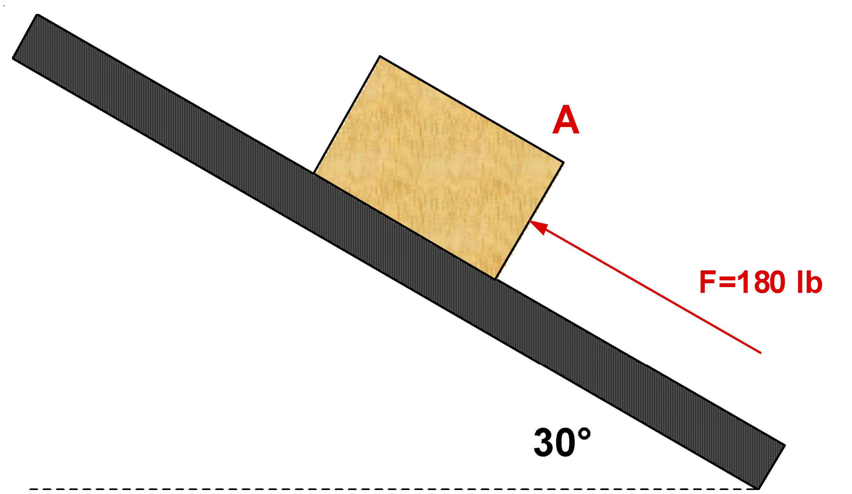



**FIGURA 194**

- **Datos.**

  Peso de la caja de madera 250 lb, magnitud de la fuerza aplicada 180 lb, ángulo formado por el plano inclinado y la horizontal 30°, $u_{S=}\ 0.25$, $u_{K=}\ 0.20$

- **Objetivo.**

  Determinar las magnitudes de las fuerzas de fricción estática y cinética del sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre.

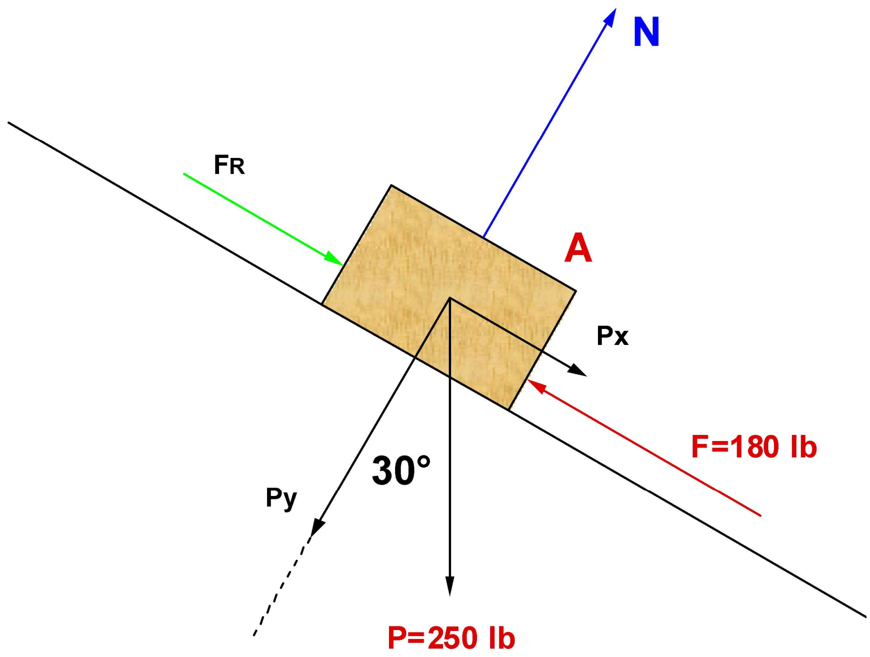



FIGURA 195

b).- Componentes rectangulares del peso P

$$P_X = P\ sen\ 30°$$

$$P_Y = P\ cos\ 30°$$

$$P_X = (250\ lb)\ sen\ 30°$$

$$P_Y = (250\ lb)\ cos\ 30°$$

$$\boldsymbol{P_X = 125\ lb}$$

$$\boldsymbol{P_Y = 216.506\ lb}$$

c).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_Y = N - P_Y = 0$$

$$\sum F_Y = N - (216.506\ lb) = 0$$

$$N - 216.506\ lb = 0$$

$$N = \mathbf{216.506}\ \boldsymbol{lb}$$

d).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = P_X + F_R - F = 0$$

$$\sum F_X = P_X + F_R - 180\ lb \quad 0$$

$$\sum F_X = 125\ lb \quad F_R - 180\ lb = 0$$

$$\sum F_X = F_R - 55\ lb = 0$$

$$F_R - 55\ lb = 0$$

$$\boldsymbol{F_R = 55\ lb}$$

d).- Para determinar las fuerzas de fricción estática y dinámica se tendrá.

$$F_S = u_S\, N$$

$$F_S = (0.25)(\ 216.506\ lb$$

$$\boldsymbol{F_S = 54.126\ lb}$$

$$F_K = u_K\, N$$

$$F_K = (0.20)(\ 216.506\ lb$$

$$\boldsymbol{F_S = 43.301\ lb}$$

**Ejemplo de cálculo 2.-** Para mover la caja de madera A de 500 lb de peso, por un plano inclinado, se emplea una fuerza de 400 lb como se indica en la figura. Halle las magnitudes de las fuerzas de fricción estática y cinética del sistema, coeficientes de fricción estático 0.50, coeficiente de fricción cinético 0.30.

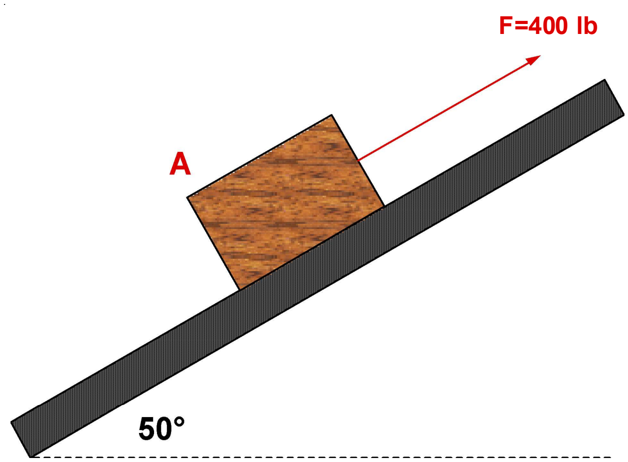



**FIGURA 196**

- **Datos.**

  Peso de la caja de madera 500 lb, magnitud de la fuerza aplicada 300 lb, ángulo formado por el plano inclinado y la horizontal 50°, $u_{S=}\ 0.50$, $u_{K=}\ 0.30$

- **Objetivo.**

  Hallar las magnitudes de las fuerzas de fricción estática y cinética del sistema.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre.

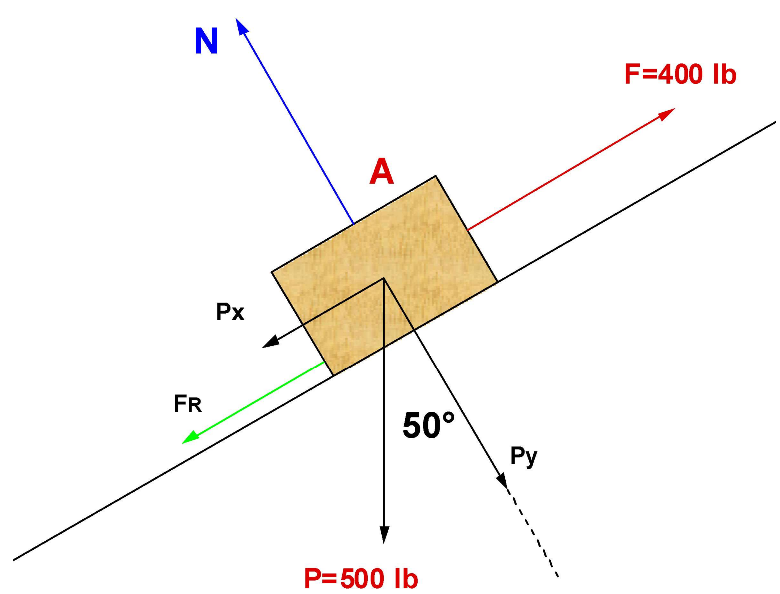



**FIGURA 197**

b).- Componentes rectangulares del peso P

$$P_X = P\ sen\ 50°$$

$$P_Y = P\ cos\ 50°$$

$$P_X = (500\ lb)\ sen\ 50°$$

$$P_Y = (500\ lb)\ cos\ 50°$$

$$\boldsymbol{P_X = 383.022\ lb}$$

$$\boldsymbol{P_Y = 321.393\ lb}$$

c).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_Y = N - P_Y = 0$$

$$\sum F_Y = N - (321.393\ lb) = 0$$

$$N - 321.393\ lb = 0$$

$$\boldsymbol{N = 321.393\ lb}$$

d).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = F - P_X - F_R = 0$$

$$\sum F_X = 400\ lb - 383.022\ lb - F_R = 0$$

$$\sum F_X = 16.978\ lb - F_R = 0$$

$$16.978\ lb - F_R = 0$$

$$\boldsymbol{F_R = 16.978\ lb}$$

d).- Para determinar las fuerzas de fricción estática y dinámica se tendrá.

$$F_S = u_S\ N$$

$$F_S = (0.50)(\ 321.393\ lb$$

$$\boldsymbol{F_S = 160.696\ lb}$$

$$F_K = u_K\ N$$

$$F_K = (0.30)(\ 321.393\ lb)$$

$$\boldsymbol{F_S = 96.417\ lb}$$

**Ejemplo de cálculo 3.-** Determine el mínimo valor de u, para que el cuerpo A cuyo peso es de 2500 N no resbale, si sobre él se aplica una fuerza de 3000 N, formando un ángulo de 30° con la horizontal.

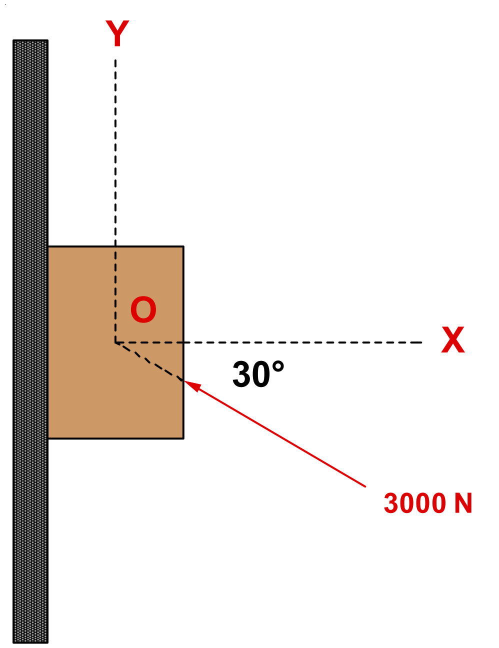



**FIGURA 198**

- **Datos.**

  Peso del cuerpo 2500 N, magnitud de la fuerza aplicada 3000 N formando un ángulo de 30° con la horizontal

- **Objetivo.**

Determinar la magnitud de u para que el cuerpo mostrado en la figura no resbale.

- **Procedimiento de cálculo.**

a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre.

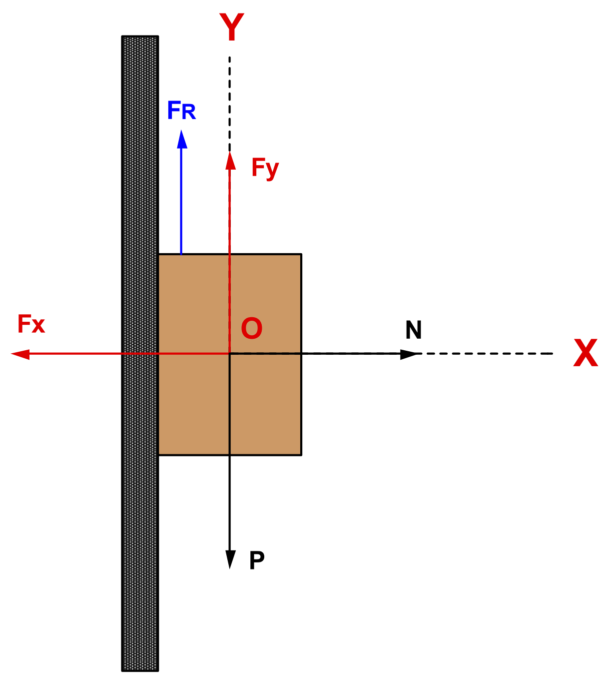



**FIGURA 199**

b).- Componentes rectangulares de la fuerza aplicada de 3000N.

$$F_X = F\ cos\ 30°$$

$$F_Y = F\ sen\ 30°$$

$$F_X = (3000\ N)\ cos\ 30°$$

$$F_Y = (3000\ N)\ sen\ 30°$$

$$\boldsymbol{F_X = 2598.076\ N}$$

$$\boldsymbol{F_Y = 1500\ N}$$

c).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = N - F_X = 0$$

$$\sum F_X = N - 2598.076\ N = 0$$

$$N - 2598.076\ N = 0$$

$$\boldsymbol{N = 2598.076\ N}$$

d).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_Y = F_R + F_Y - P = 0$$

$$\sum F_Y = F_R + 1500\ N - 2500N = 0$$

$$\sum F_Y = F_R - 1000\ N = 0$$

$$F_R - 1000\ N = 0$$

$$\boldsymbol{F_R = 1000\ N}$$

e).- Determinando u se tendrá:

$$\boldsymbol{F_R = u_S\ N}$$

$$u_S = \frac{F_R}{N}$$

$$u_S = \frac{1000N}{2598.076\ N}$$

$$\boldsymbol{u_S = 0.384}$$

**Ejemplo de cálculo 4.-** Determine el máximo valor del peso que puede tener el cuerpo Q, para que el sistema mostrado en la figura se mantenga en equilibrio, considere la polea en B sin fricción, peso del cuerpo P 50 N, $u_S = 0.2$

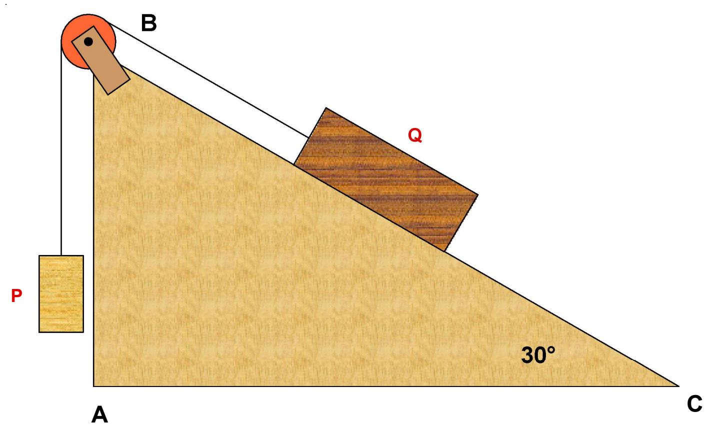



FIGURA 200

- **Datos.**

  Peso del cuerpo P 50N, ángulo del plano inclinado 30°, no considerar fricción en la polea B, $u_S = 0.2$

- **Objetivo.**

  Determinar el máximo valor del peso del cuerpo Q, para que el sistema esté en equilibrio.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre.

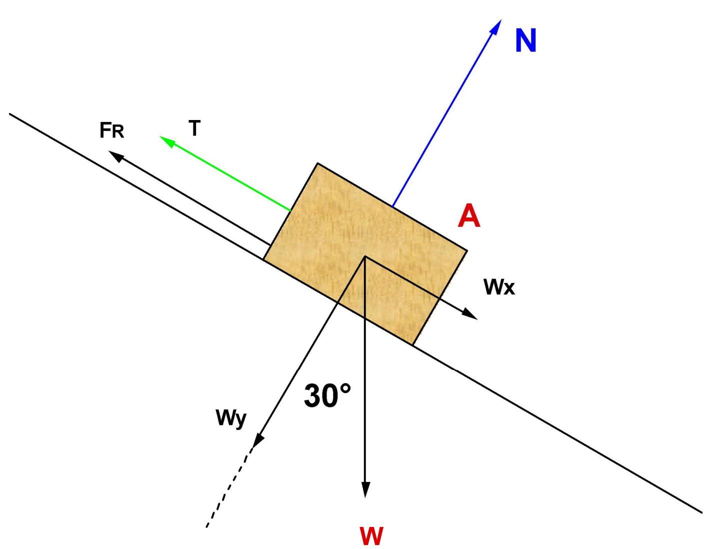



FIGURA 201

b).- Componentes rectangulares del peso W.

$$\boldsymbol{W_X = W\ sen\ 30°}$$

$$\boldsymbol{W_Y = W\ cos\ 30°}$$

c).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = W_X - T - F_R = 0$$

$$Wsen\ 30° - 50N - F_R = 0$$

d).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_Y = N - W_Y = 0$$

$$\sum F_Y = N - Wcos\ 30° = 0$$

$$N - Wcos\ 30° = 0$$

e).- Planteando la ecuación de $F_R$.

$$\boldsymbol{F_R = u_S\ N}$$

$$F_R = 0.2\ N$$

f).- Ecuaciones del equilibrio.

1. $Wsen\ 30° - 50 - 0.2\ N = 0$
2. $N - Wcos\ 30° = 0$

g).- Resolviendo las ecuaciones del equilibrio.

2. $N = Wco\ \ 30°$

Reemplazando en 1

1. $Wsen\ 30° - 50 - 0.2\ Wcos 30° = 0$

$$0.5W - 50 - 0.173\ W = 0$$

$$0.327W - 50 = 0$$

$$0.327W = 50$$

$$\boldsymbol{W = 152.905\ N}$$

**Ejemplo de cálculo 5.-** Establezca si el bloque de madera se encuentra en equilibrio, y calcule el valor y sentido de la fuerza de rozamiento, bajo las condiciones especificadas. $u_K = 0.2$ , $u_S = 0.3$

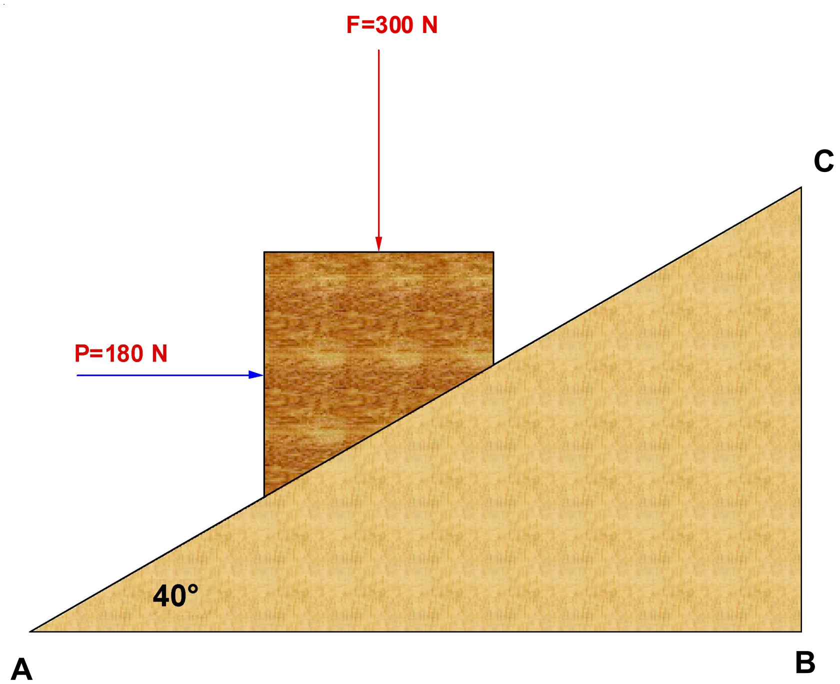



**FIGURA 202**

- **Datos.**

  F=300 N, P=180 N, ángulo de inclinación del plano 40° $u_K = 0.2$, $u_S = 0.3$

- **Objetivo.**

  Establecer si el bloque está en equilibrio, calcular el valor y sentido de la fuerza de rozamiento.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre.

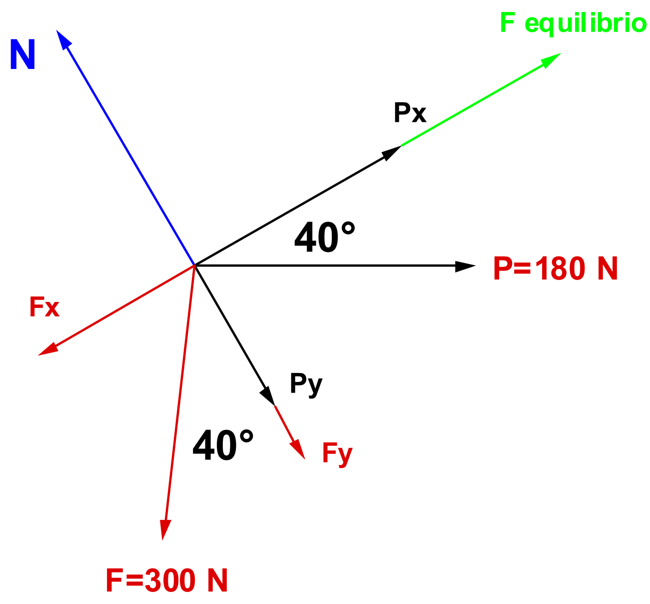



FIGURA 203

b).- Componentes rectangulares de P.

$$P_X = P\ cos\ 40°$$

$$P_Y = P\ sen\ 40°$$

$$P_X = 180\ N\ cos\ 40°$$

$$P_Y = 180\ N\ sen\ 40°$$

$$\boldsymbol{P_X = 137.887\ N}$$

$$\boldsymbol{P_Y = 115.701\ N}$$

c).- Componentes rectangulares de F.

$$F_X = F\ sen\ 40°$$

$$F_Y = F\ cos\ 40°$$

$$F_X = 300\ N\ sen\ 40°$$

$$F_Y = 300\ N\ cos\ 40°$$

$$\boldsymbol{F_X = 192.836\ N}$$

$$\boldsymbol{F_Y = 229.813\ N}$$

d).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_Y = N - P_Y - F_Y = 0$$

$$\sum F_Y = N - 115.701\ N - 229.813\ N = 0$$

$$\sum F_Y = N - 345.514\ N = 0$$

$$\boldsymbol{N = 345.514\ N}$$

e).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = F_{EQUILIBRIO} + P_X - F_X = 0$$

$$\sum F_X = F_{EQUILIBRIO} + 137.887\ N - 192.836\ N = 0$$

$$\sum F_X = F_{EQUILIBRIO} + 9.33\ N = 0$$

$$F_{EQUILIBRIO} - 54.949\ N = 0$$

$$\boldsymbol{F_{EQUILIBRIO} = 54.949\ N}$$

f).- Determinar la fuerza máxima $F_M$

$$F_M = u_S\ N$$

$$F_M = (0.3)(345.514\ N)$$

$$\boldsymbol{F_M = 103.654\ N}$$

Siendo esta la fuerza que se opone al movimiento.

$$\boldsymbol{F_M > F_{EQUILIBRIO}}$$

El cuerpo permanece en reposo.

g).- Calcular la fuerza de rozamiento, con $u_S$ por estar en reposo.

$$\boldsymbol{F_R = u_S\ N}$$

$$F_R = (0.3)(345.514\ N)$$

$$\boldsymbol{F_R = 103.654\ N}$$

Contraria al desplazamiento del cuerpo.

**Ejemplo de cálculo 6.-** Determine si el bloque de madera se encuentra en equilibrio, y calcule el valor y sentido de la fuerza de rozamiento, bajo las condiciones especificadas.
$P = 500\ N \quad \Theta = 50° \quad u_K = 0.15 \quad u_S = 0.25$

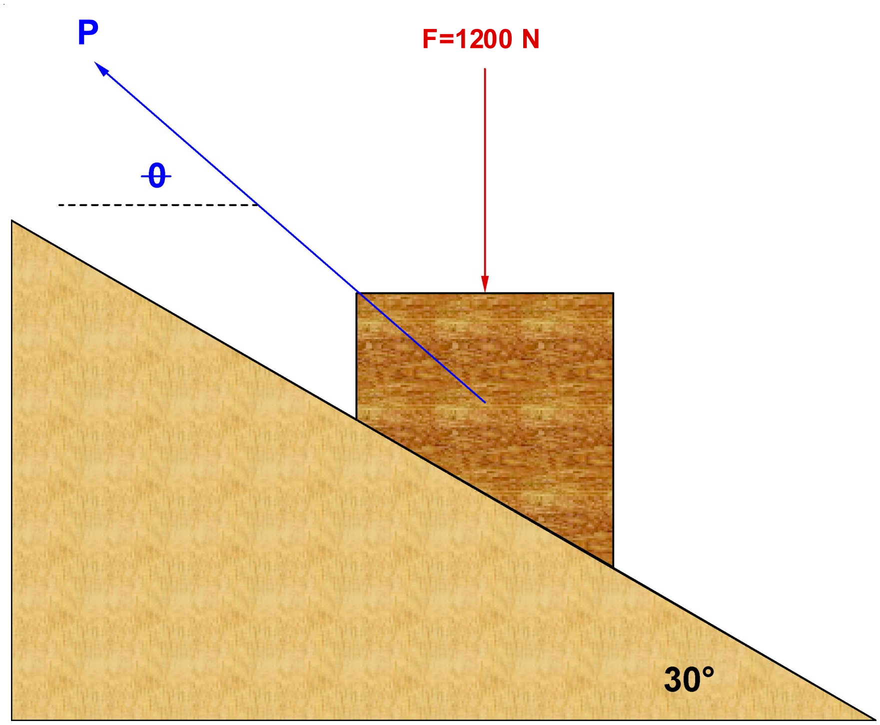



**FIGURA 204**

- **Datos.**

  F=900 N, P=500 N, ángulo de inclinación del plano 30° $u_K = 0.15,\ u_S = 0.25$

- **Objetivo.**

  Determinar si el bloque está en equilibrio, calcular el valor y sentido de la fuerza de rozamiento.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre.

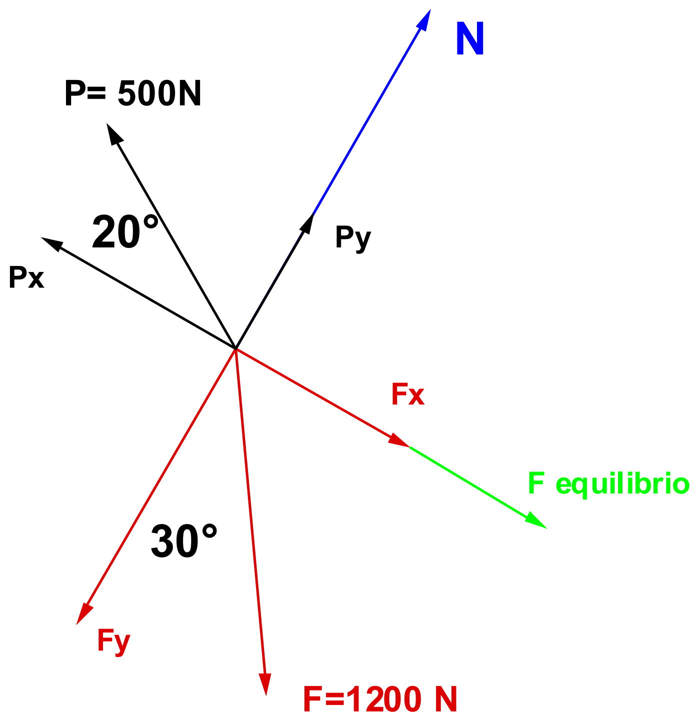



FIGURA 205

b).- Componentes rectangulares de P.

$$P_X = P\ cos\ 20°$$

$$P_Y = P\ sen\ 20°$$

$$P_X = 500\ N\ cos\ 20°$$

$$P_Y = 500\ N\ sen\ 20°$$

$$\boldsymbol{P_X = 469.846\ N}$$

$$\boldsymbol{P_Y = 17\ \ .010\ N}$$

c).- Componentes rectangulares de F.

$$F_X = F\ sen\ 30°$$

$$F_Y = F\ cos\ 30°$$

$$F_X = 1200\ N\ sen\ 30°$$

$$F_Y = 1200\ N\ cos\ 30°$$

$$\boldsymbol{F_X = 600\ N}$$

$$\boldsymbol{F_Y = 1039.230\ N}$$

d).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum F_Y = N + P_Y - F_Y = 0$$

$$\sum F_Y = N + 171.010\ N - 1039.230\ N = 0$$

$$N - 868.22\ = 0$$

$$\boldsymbol{N = 868.22\ N}$$

e).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá.

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = \ F_X - P_X - F_{EQUILIBRIO} = 0$$

$$\sum F_X = \ 600\ N - 469.846\ N - F_{EQUILIBRIO} = 0$$

$$\sum F_X = \ 130.154\ N - F_{EQUILIBRIO} = 0$$

$$130.154\ N - F_{EQUILIBRIO} = 0$$

$$\boldsymbol{F_{EQUILIBRIO} = 13\ \ .154\ N}$$

f).- Determinar la fuerza máxima $F_M$

$$F_M = \ u_S\ N$$

$$F_M = (0.25)(868.22\ N)$$

$$\boldsymbol{F_M = 217.055\ N}$$

Siendo esta la fuerza que se opone al movimiento.

$$\boldsymbol{F_M\ >\ F_{EQUILIBRIO}}$$

El cuerpo permanece en reposo.

g).- Calcular la fuerza de rozamiento, con $u_S$ por estar en reposo.

$$\boldsymbol{F_R = \ u_S\ N}$$

$$F_R = (0.25)(868.22\ N)$$

$$F_R = 217.055\ N$$

Contraria al desplazamiento del cuerpo.

**Ejemplo de cálculo 7.-** En el siguiente sistema. Halle el valor del ángulo Ɵ para el cual el cuerpo se mantendrá en equilibrio.

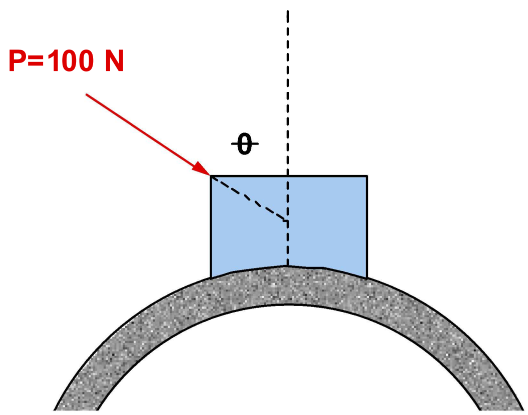



FIGURA 206

**W = 200 N**

**us=0.50**

**uk=0.35**

- **Datos.**

  W=200 N, P=100 N $u_K = 0.35,\ u_S = 0.50$

- **Objetivo.**

  Hallar el valor del ángulo Ɵ para el cual el cuerpo se mantendrá en equilibrio.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre.

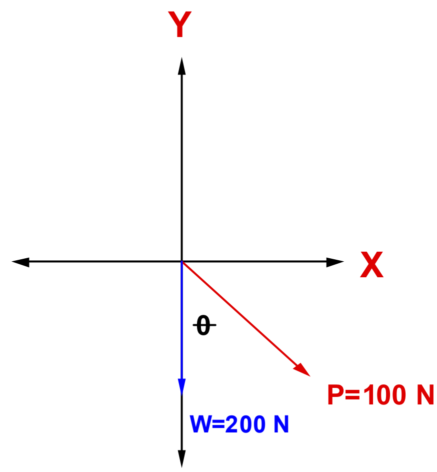



**FIGURA 207**

b).- Cálculo de $\Theta_1$

$$tang\ \Theta_1 = u_S$$

$$tang\ \Theta_1 = 0.50$$

$$\Theta_1 = ar\ \ tang\ (0.50)$$

$$\Theta_1 = \mathbf{26°33'18''}$$

c).- Diagramando el sistema de fuerzas en el sistema.

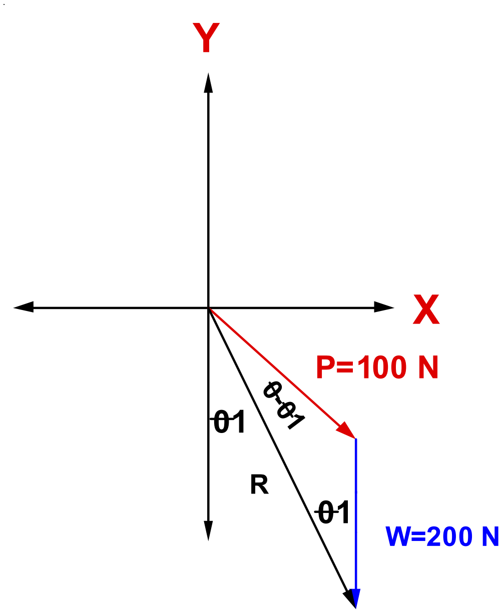



**FIGURA 208**

d).- Aplicando la ley de los senos en el triángulo de fuerzas se tendrá:

$$\frac{P}{sen\ \Theta_1} = \frac{W}{sen\ (\Theta - \ \Theta_1)}$$

$$\frac{100\ N}{sen\ (26°33'18'')} = \frac{200\ N}{sen\ (\Theta - \ 26°33'18'')}$$

$$(100\ N)\ [sen\ (\Theta - 26°33'18'')] = (200\ N)[sen\ (26°33'18'')]$$

$$(100\ N)\ [sen\ (\Theta - 26°33'18'')] = 89.411\ N$$

$$sen\ (\Theta - 26°33'18'') = \ 0.894$$

$$\Theta - 26°33'18'' \ = \ arc\ sen\ (0.894)$$

$$\Theta - 26°33'18'' \ = \ 63°\ 22'.48.97''$$

$$\Theta \ = \ 63°\ 22'.48.97'' + 26°\ 33'18''$$

$\Theta$ = **89° 56’ 6.97’’**

**Ejemplo de cálculo 8.-** Un bloque de madera es presionado fuertemente contra una pared vertical mediante una fuerza F de 200 N, formando un ángulo de 30° con la horizontal como se representa en la siguiente figura, si el coeficiente de fricción estático es de 0.99. Determine el valor del peso máximo en Newtons que puede tener el bloque para permanecer en equilibrio.

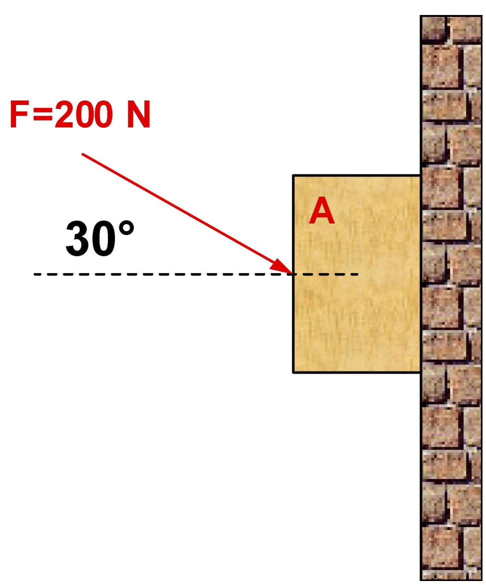



**FIGURA 209**

- **Datos.**

  F=200 N, ϴ = 30°, $u_S = 0.99$

- **Objetivo.**

  Determinar cuál es el valor del peso máximo en Newtons que puede tener el bloque para permanecer en equilibrio.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre.

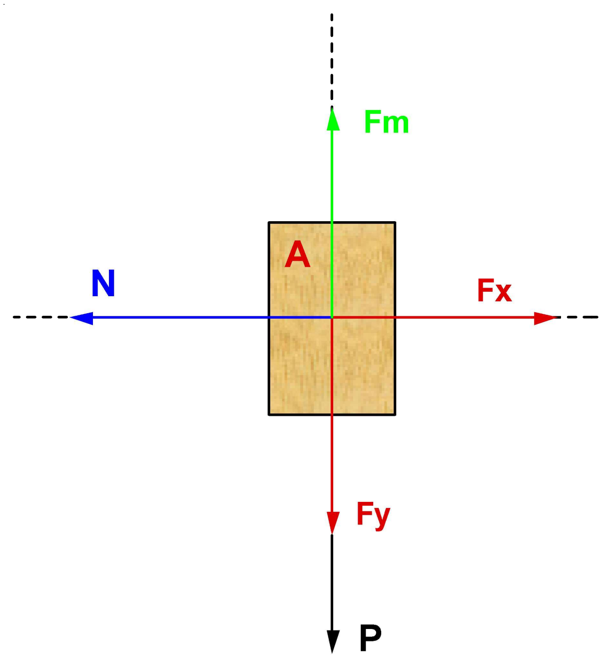



FIGURA 210

b).- Componentes rectangulares de F.

$$F_X = F\ cos\ 30°$$

$$F_Y = F\ sen\ 30°$$

$$F_X = 200\ N\ cos\ 30°$$

$$F_Y = 200\ N\ sen\ 30°$$

$$\boldsymbol{F_X = 173.205\ N}$$

$$\boldsymbol{F_Y = 100\ N}$$

c).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá

$$1)\ \sum Fx = 0$$

$$\sum Fx = Fx - N = 0$$

De donde se concluye

$$Fx = N$$

$$\boldsymbol{N = 173.205\ N}$$

d).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio

$$2)\ \sum Fy = 0$$

$$\sum Fy = Fm - Fy - P = 0$$

$$\sum Fy = Fm - 100 - P = 0$$

e).- Utilizando la relación para $F_m$

$$Fm = U_s N$$

$$Fm \quad 0.99\ (173.205\ \mathrm{N})$$

$$\boldsymbol{Fm} \quad \mathbf{171.472\ N}$$

f).- Reemplazando para encontrar el valor solicitado

$$\sum Fy \quad 171.472\ N - 100\ N - P = 0$$

$$71.472\ N - P = 0$$

$$\boldsymbol{P = 71.472\ N}$$

**Ejemplo de cálculo 9.-** Sobre una caja de madera se aplica una fuerza F que forma un ángulo de 60° con respecto a la horizontal. Calcule la magnitud de dicha fuerza si la caja pesa 600 N y el coeficiente de fricción $u_K = 0.45$.

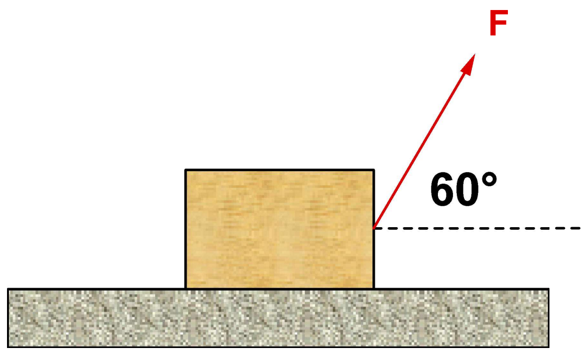



FIGURA 211

- **Datos.**

  P=600 N, ϴ = 60°, $u_K = 0.45$

- **Objetivo.**

  Calcular la magnitud de la fuerza aplicada F.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- Realizar el diagrama de cuerpo libre.

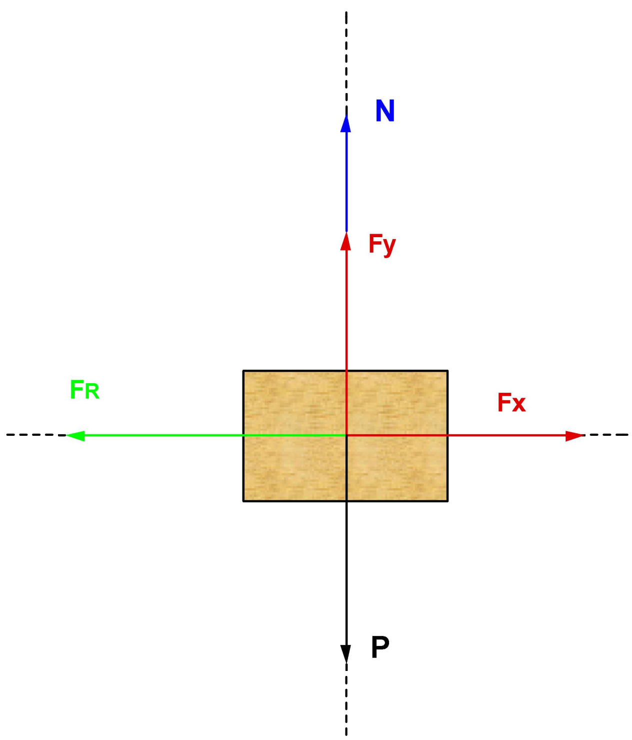



FIGURA 212

b).- Componentes rectangulares de F.

$$F_X = F\ cos\ 60°$$

$$F_Y = F\ sen\ 60°$$

c).- Aplicando la primera ecuación del equilibrio se tendrá

$$1)\ \ \sum Fx = 0$$

$$\sum Fx = Fx - F_R = 0$$

De donde se concluye

$$Fx = F_R$$

$$Fcos\ 60° = F_R$$

d).- Aplicando la segunda ecuación del equilibrio

$$2)\ \ \sum Fy = 0$$

$$\sum Fy = N + Fy - P = 0$$

$$\sum Fy = N + Fsen\ 60° - 600 = 0$$

$$N + Fs\ \ \ \ \ 60° - 600 = 0$$

g).- Utilizando la relación para $F_R$

$$F_R = \ u_K\ N$$

$$F_R = 0.45\ N$$

Por lo que

$$Fcos\ 60° = 0.45\ N$$

De lo que se tendrá

$$F = \frac{0.45\ N}{cos\ 60°}$$

Que al reemplazarlo resulta

$$N + Fsen\ 60° - 600 = 0$$

$$N + \frac{0.45\ N}{\cos 60°}\ (sen\ 60°) - 600 = 0$$

$$N + 0.45\ tang\ 60°\ N - 600 = 0$$

$$N + 0.779\ N - 600 = 0$$

$$1.779\ N = 600$$

$$N = \frac{600}{1.799}$$

$$\boldsymbol{N = 333.518}\ N$$

$$F = \frac{0.45\ N}{cos\ 60°}$$

$$F = \frac{0.45\ (333.518)}{cos\ 60°}$$

$$\boldsymbol{F = 300.166}\ N$$

**Ejemplo de cálculo 10.-** Un velero tiene una masa de 1000 Kg, suponiendo que existe una fuerza de fricción constante de 60 N, entre el casco y el mar tranquilo, y además que se requiere una aceleración constante de 2 $\frac{m}{seg^2}$. Halle cuál es la fuerza del viento Fv necesaria para cumplir con las condiciones expuestas en el problema.

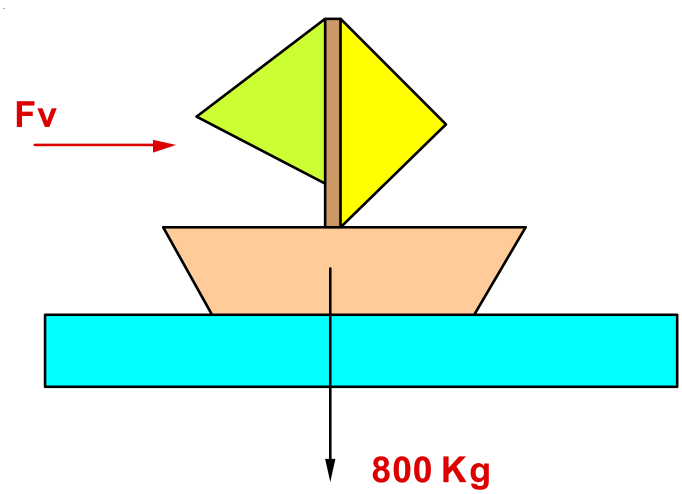



**FIGURA 213**

- **Datos.**

  Masa del velero 800 Kg, Fr = 60 N, $a = 2\ \frac{m}{seg^2}$

- **Objetivo.**

  Hallar cuál es la fuerza del viento necesario para cumplir con las condiciones expuestas en el problema.

- **Procedimiento de cálculo.**

  a).- De la primera ecuación del equilibrio:

$$\sum F_X = m$$

$$\sum F_X = F_V - 60\ N = 800\ Kg\ (2\ \frac{m}{seg^2})$$

$$F_V - 60\ N = 800\ Kg\ (2\ \frac{m}{seg^2})$$

$$F_V = 1600\ N + 60\ N$$

$$\boldsymbol{F_V = 166}\quad N$$

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:


[1] *LAPLACE, UNIVERSIDAD DE SEVILLA,* $[En\ linea]\ [citado\ noviembre\ 2011.]$ *ecuacionesdimensionales.http://laplace.us.es/wiki/index.php/1.2._Ecuaci%C3%B3n_dimensional_de_G_(Ex.Nov/11).*

[2] *[De: «Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms»; G. Rosi et al. en Nature, vol. 510, 26 de junio de 2014.]*

[3] *Ley de Gravitación Universal* $[En\ linea]$ *http://www2.udec.cl/~jinzunza/fisica/cap9.pdf*

[4] *Tippens, P. (1992). Física 1. McGraw-Hill Interamericana, S.A.*

[5] *http://www.monografias.com/trabajos35/newton-fuerza-aceleracion/newton-fuerza-aceleracion.shtml#ixzz3Ye8IqCZj*

[6] *Conceptos de Física Mecánica | La guía de Física http://fisica.laguia2000.com/fisica-mecanica/conceptos-de-fisica-mecanica#ixzz3YeOfvn2K*