



# **UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO**

**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, VINCULACIÓN Y POSGRADO**

**DIRECCIÓN DE POSGRADO**

**ANÁLISIS CUANTITATIVO DEL MODELO LOTKA-VOLTERRA APLICADO A LA  
PRODUCCIÓN AGRÍCOLA DE CACAO EN LA PROVINCIA DE SANTO DOMINGO.**

Trabajo de Titulación para optar al título de Magíster en Matemática aplicada con mención  
en Matemática Computacional

**AUTOR:**

Ing. Revelo Alava Héctor Paul

**TUTOR:**

Ing. Atal Kumar Vivas Paspuel, Msc.

Riobamba, Ecuador. 2025

## DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y CESIÓN DE DERECHOS

Yo, Revelo Álava, Héctor Paul, con número único de identificación **171802029-8**, declaro y acepto ser responsable de las ideas, doctrinas, resultados y lineamientos alternativos realizados en el presente trabajo de titulación denominado “Análisis cuantitativo del modelo lotka-volterra aplicado a la producción agrícola de cacao en la provincia de Santo Domingo”

Previo a la obtención del grado de **Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional**.

Declaro que mi trabajo investigativo pertenece al patrimonio de la Universidad Nacional de Chimborazo de conformidad con lo establecido en el artículo 20 literal j) de la Ley Orgánica de Educación Superior LOES.

Autorizo a la Universidad Nacional de Chimborazo que pueda hacer uso del referido trabajo de titulación y a difundirlo como estime conveniente por cualquier medio conocido, y para que sea integrado en formato digital al Sistema de Información de la Educación Superior del Ecuador para su difusión pública respetando los derechos de autor, dando cumplimiento de esta manera a lo estipulado en el artículo 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior LOES.

Riobamba, 31 de julio de 2025.



---

Héctor Paul Revelo Álava

N.U.I. 171802029-8

## ACTA DE CULMINACIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

En la ciudad de Riobamba, a los 30 días del mes de julio del año 2025, los miembros del Tribunal designado por la Comisión de Posgrado de la Universidad Nacional de Chimborazo, reunidos con el propósito de analizar y evaluar el Trabajo de Titulación bajo la modalidad Proyecto de titulación con componente investigación aplicada y/o desarrollo, CERTIFICAMOS lo siguiente: Que, una vez revisado el trabajo titulado: “ANÁLISIS CUANTITATIVO DEL MODELO LOTKA-VOLTERRA APLICADO A LA PRODUCCIÓN AGRÍCOLA DE CACAO EN LA PROVINCIA DE SANTO DOMINGO”, perteneciente a la línea de investigación: INGENIERÍA INFORMÁTICA, AMBIENTE Y BIODIVERSIDAD, presentado por el maestrante Revelo Alava Héctor Paul, portador de la cédula de ciudadanía No. 1718020298, estudiante del programa de Maestría en Maestría en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional, se ha verificado que dicho trabajo cumple al 100% con los parámetros establecidos por la Dirección de Posgrado de la Universidad Nacional de Chimborazo. Es todo cuanto podemos certificar, en honor a la verdad y para los fines pertinentes. Atentamente,



Firmado electrónicamente por:  
ATAL KUMAR VIVAS  
PASPUEL

Validar únicamente con FirmaEC

---

**ATAL VIVAS PASPUEL**

**TUTOR/A**



Firmado electrónicamente por:  
CIRO DIEGO  
RADICELLI GARCIA

Validar únicamente con FirmaEC

---

**CIRO RADICELLI  
GARCÍA  
MIEMBRO DEL  
TRIBUNAL**



Firmado electrónicamente por:  
SAYURI MONSERRATH  
BONILLA NOVILLO

Validar únicamente con FirmaEC

---

**SAYURI BONILLA  
NOVILLO  
MIEMBRO DEL  
TRIBUNAL**

## CERTIFICADO DEL CONTENIDO DE SIMILITUD

De mi consideración:

Yo, Atal Kumar Vivas Paspuel, certifico que Héctor Paul Revelo Alava con cédula de identidad No. 1718020298 estudiante del programa de Maestría en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional , cohorte 03 presentó su Trabajo de Titulación bajo la modalidad de Proyecto de titulación con componente de investigación aplicada/desarrollo denominado: Análisis cuantitativo del modelo Lotka-Volterra aplicado a la producción agrícola de cacao en la provincia de Santo Domingo., el mismo que fue sometido al sistema de verificación de similitud de contenido COMPILATIO, identificando un porcentaje de similitud del 9% en el texto y un porcentaje de similitud del 9% en inteligencia artificial.

Es todo en cuanto puedo certificar en honor a la verdad.

Atentamente,



Firmado electrónicamente por:  
ATAL KUMAR VIVAS  
PASPUEL  
Validar únicamente con FirmaEC

Atal Kumar Vivas Paspuel

CI: 1715643977

## DEDICATORIA

Dedico este trabajo, en primer lugar, a **Dios**, por haber guiado cada uno de mis pasos, por brindarme fortaleza en los momentos difíciles y por permitirme alcanzar esta meta.

A mi **familia**, por su apoyo incondicional, por creer en mí y por ser el pilar que ha sostenido mi crecimiento personal y académico.

Y de manera muy especial, a **mi hija**, mi mayor inspiración, quien me motiva a seguir luchando cada día y a ser una mejor versión de mí mismo.

## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar doy gracias A Dios, por darme la vida, fortaleza y sabiduría para culminar este proceso académico; por guiarme y brindarme la oportunidad de seguir creciendo personal y profesionalmente.

A mis padres, Héctor Revelo y Carmen Álava, por su amor incondicional, por ser mi guía y sostén en los momentos más importantes de mi vida. Su ejemplo, esfuerzo y constante apoyo han sido fundamentales en mi vida profesional.

A los docentes de esta maestría, por compartir generosamente sus conocimientos y experiencias, por sus enseñanzas .

## INDICE GENERAL

DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y CESIÓN DE DERECHOS .....	I
ACTA DE CULMINACIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN .....	II
CERTIFICADO DEL CONTENIDO DE SIMILITUD .....	III
DEDICATORIA .....	IV
AGRADECIMIENTOS .....	V
INDICE GENERAL .....	VI
INDICE TABLAS .....	IX
INDICE FIGURAS .....	IX
RESUMEN .....	X
ABSTRACT .....	XI
INTRODUCCIÓN .....	1
1. GENERALIDADES .....	2
1.1 Planteamiento del problema .....	2
1.2 Justificación de la investigación .....	4
1.3 Objetivos .....	6
1.3.1 Objetivo general .....	6
1.3.2 Objetivos específicos .....	6
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS . .....	7
2.1 El Cacao y su importancia agroeconómica en la región .....	7
2.2 El proceso de producción de Cacao en Santo Domingo .....	9
2.2.1 Plantación y establecimiento del cultivo .....	9
2.2.2 Manejo agronómico y cuidados culturales .....	10
2.2.3 Etapas fenológicas del cacao .....	10
2.2.4 Control de plagas y enfermedades .....	11
2.2.5 Cosecha y postcosecha .....	12
2.2.6 Importancia del manejo adecuado .....	12

2.2.7	La hormiga chacarrera ( <i>Atta cephalotes</i> ): biología y afectación .....	13
2.3	El modelado matemático en la agricultura. ....	14
2.4	El modelo Lotka-Volterra .....	15
2.5	Variaciones y extensiones del modelo Lotka-Volterra .....	17
2.5.1	Modelo Logístico-Depredador .....	18
2.5.2	Modelos Tritróficos .....	19
2.5.3	Modelos de multiplicidad de especies .....	19
2.6	Sistemas Dinámicos.....	21
2.6.1	Definición de un sistema dinámico .....	21
2.6.2	Clasificación general de los Sistemas Dinámicos .....	22
2.6.3	Linealización de sistemas dinámicos continuos .....	24
2.6.4	Puntos de equilibrio .....	25
2.6.5	La linealización de campos vectoriales para EDOs.....	26
2.6.6	Matriz Jacobiana.....	26
2.7	Estabilidad de sistemas dinámicos .....	26
2.7.1	Puntos fijos y periódicos .....	27
2.7.2	Estabilidad en el sentido de Lyapunov .....	27
2.7.3	Estabilidad Asintótica: .....	28
2.7.4	Estabilidad de Órbitas Periódicas .....	28
2.7.5	Estabilidad espectral (Valores y vectores propios).....	28
2.8	Optimización de parámetros en ecuaciones diferenciales .....	31
2.8.1	Formulación del Problema de Optimización .....	31
2.8.2	Métodos comunes de optimización de parámetros en EDOs .....	33
3.	METODOLOGÍA.....	37
3.1.	Enfoque metodológico.....	37
3.1.1	Tipo de investigación.....	37
3.1.2	Paradigma de la investigación .....	38
3.2.	Población y Muestra .....	39
3.2.1	Valoración de Datos .....	39
3.2.2	Selección.....	40
3.2.3	Recolección de datos .....	41

3.3	Técnicas y Herramientas. ....	42
3.3.1	Técnicas .....	42
3.3.2	Herramientas.....	43
3.4	Variables y operacionalización. ....	43
3.5	Procesamiento y análisis de datos. ....	47
3.6	Planteamiento del modelo matemático.....	52
3.6.1	Fundamentación del enfoque modelo-dependiente .....	52
3.6.2	Consideraciones agrícolas y ecológicas .....	53
3.6.3	Consideraciones matemáticas y estructurales .....	53
3.6.4	Parametrización y escalamiento .....	54
3.6.5	Limitaciones y supuestos iniciales .....	55
3.7	Descripción del procedimiento.....	55
4.	RESULTADOS .....	59
4.1	Organización de datos recolectados .....	59
4.2	Análisis descriptivo del sistema cacao–hormiga.....	63
4.2.1	Evolución individual y promedio de frutos semanales.....	63
4.2.2	Comparación de la variabilidad entre árboles .....	64
4.2.3	Relación preliminar entre frutos dañados y actividad estimada de hormigas	65
4.3	Estimación empírica de la población de hormigas .....	66
4.4	Desarrollo del modelo Lotka-Volterra logístico .....	69
4.4.1	Formulación conceptual del sistema.....	70
4.4.2	Modelo matemático propuesto .....	70
4.4.3	Supuestos y consideraciones agrícolas .....	71
4.4.4	Relevancia del modelo para el contexto ecuatoriano .....	71
4.5	Análisis dinámico del modelo. ....	72
4.5.1	Puntos críticos .....	72
4.5.2	Estabilidad local: análisis lineal del Jacobiano.....	74
4.6	Estimación y optimización de parámetros del modelo.....	77
4.7	Diagrama de fase del sistema C–H.....	82
4.8	Validación del modelo .....	84

CONCLUSIONES.....	88
RECOMENDACIONES .....	92
BIBLIOGRAFÍA .....	1

### INDICE TABLAS

Tabla I. Resumen de variables de estudio.....	46
Tabla II. Resumen de valores de los parámetros optimizados.....	80

### INDICE FIGURAS

Figura1.- Esquema fenológico del cacao (Cumbicos Sarango, 2024).....	11
Figura2.- Flujograma metodológico (Autor).....	58
Figura3.- Muestra de frutos en Semana 1.....	61
Figura4.- Muestra de frutos en Semana 8.....	61
Figura5.- Muestra de frutos en Semana 16.....	62
Figura6.- Muestra de frutos en Semana 32.....	62
Figura7.- Evolución semanal del promedio de frutos sanos, dañados y no desarrollados ...	64
Figura8.- Diagramas de caja para análisis de variabilidad de frutos.....	64
Figura9.- Relación de Frutos dañados y Frutos sanos .....	66
Figura10.- Evolución de promedios de la presión de carga de las hormigas. ....	68
Figura11.- Diagrama de flujo de optimización de parámetros del modelo. ....	79
.....	79
Figura12.- Dinámica del modelo con parámetros optimizados.....	82
Figura13.- Diagramas de fase entre Cacao y Hormiga.....	84
Figura14.- Comparativa entre el modelo y datos de poblaciones.....	85
Figura15.- Métricas de errores del modelo.....	86

## RESUMEN

La presente investigación tiene como propósito analizar la dinámica poblacional del cultivo de cacao (*Theobroma cacao*) en interacción con la plaga conocida como hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*), una de las principales amenazas para la producción cacaotera en la provincia de Santo Domingo de los Tsáchilas, específicamente en la parroquia San Jacinto del Búa. En este estudio se desarrolló un modelo matemático basado en el sistema de Lotka-Volterra, que es bien conocido en ecología como forma de representar relaciones de depredación-presa y que también se ajusta fácilmente para modelar la relación cultivo-plaga.

La metodología cuantitativa utilizada en este estudio se basa en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que representan las tasas de crecimiento de las plantas de cacao y la plaga; en el cual mediante la recopilación de datos de campo que incluyó el muestreo de 100 plantas de cacao prolíficas, complementada con entrevistas a expertos agricultores con más de 30 años de experiencia agrícola, se obtienen un ajuste de sus parámetros mediante métodos de mínimos cuadrados y simulaciones numéricas para investigar diversas infestaciones y escenarios de recuperación de cultivos.

Los resultados obtenidos en la presente investigación permitieron identificar puntos de equilibrio y características dinámicas del modelo planteado, además de determinar los valores numéricos de los parámetros del modelo que se ajustan a los datos recolectados sobre la producción de frutas de cacao, y de esta manera tener un modelo dinámico que permite ver las relaciones poblacionales entre el cacao y la hormiga chacarrera a lo largo del periodo de floración hasta cosecha, identificando condiciones bajo las cuales el sistema se comporta de forma estable o inestable.

**Palabras clave:** Modelado matemático, cacao, Lotka-Volterra, plagas agrícolas, sistemas dinámicos, hormiga chacarrera.

## ABSTRACT

The purpose of this research is to analyze the population dynamics of the cacao crop (*Theobroma cacao*) and its interaction with the pest known as the chacarrera ant (*Atta cephalotes*). This ant is one of the main threats to cacao production in the province of Santo Domingo de los Tsáchilas, specifically in the parish of San Jacinto del Búa. In this study, a mathematical model was developed based on the Lotka-Volterra system. This system is well known in ecology for representing predation-prey relationships and is also easily adjusted to model the crop-pest relationship. This study used a quantitative methodology based on a system of nonlinear differential equations to represent the growth rates of cacao plants and the pest. Field data collection included sampling 100 prolific cacao plants. This was complemented by interviews with expert farmers with over 30 years of agricultural experience. The parameters were fitted using least squares methods and numerical simulations to investigate various infestations and crop recovery scenarios. The results of this research allowed us to identify equilibrium points and dynamic characteristics of the proposed model. We also determined the numerical values of the model parameters that best fit the collected data on cocoa fruit production. This resulted in a dynamic model that shows the population relationships between cocoa and the chacarrera ant throughout the flowering period until harvest. The model helps identify conditions under which the system behaves in a stable or unstable manner.

**Keywords:** Mathematical modeling, cacao, Lotka-Volterra, agricultural pests, dynamic systems, , leaf-cutting ant.



Firmado electrónicamente por:  
**SOFIA FERNANDA  
FREIRE CARRILLO**  
Validar Únicamente con FirmaEC

Reviewed by: Mgs. Sofía Freire Carrillo

ENGLISH PROFESSOR

C.C. 0604257881

## INTRODUCCIÓN

El cacao es vital en la agricultura de Ecuador, país muy famoso por su cacao de gran aroma. En zonas como Santo Domingo de los Tsáchilas, sobre todo en San Jacinto del Búa, la siembra de cacao es una de las principales actividades económicas y ayuda al desarrollo de las familias en la zona (MAG Ecuador, 2021).

Pero, este cultivo tiene problemas con el clima y las plagas que dañan su producción. Por ejemplo, la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*) ataca a las plantas jóvenes, comiéndose hojas y flores, lo que puede arruinar toda la cosecha si no se realiza el control adecuado (Arias Brito & Loor Moreira, 2024). Además, el clima cambia, el suelo no es muy bueno, no se cuida bien y otras plantas compiten con el cacao, haciendo que este cultivo sea complicado y fácil de dañar.

Por eso, las matemáticas son muy útiles para entender cómo funcionan estos cultivos. El modelo Lotka-Volterra (Monteiro et al., 2024), es utilizado para estudiar la interacción entre los depredadores y sus presas, ayuda a entender cómo el cacao y las plagas se relacionan. Así, se puede ver cómo crecen las poblaciones y cómo afectan las diferentes formas de cuidar el cultivo, como la poda, la fertilización o el control biológico.

La incorporación de factores relacionados propiamente con el fenómeno de producción de cacao dentro del modelo matemático, permite dar una percepción más realista, o al menos una aproximación más cercana a la misma, donde se muestra las situaciones cambiantes del sector agrícola, tales como situaciones climáticas, aparición de plagas, control químico, condiciones y otras (López-Hernández et al., 2021). Con esta retrospectiva se propone, no solo una aproximación teórica del sistema, sino también una representación más apegada a la realidad del contexto local, que sirve de forma práctica a los productores y ayuda a la toma de decisiones.

## GENERALIDADES

### 1.1 Planteamiento del problema

La agricultura ecuatoriana enfrenta múltiples desafíos relacionados con el rendimiento de los cultivos, el uso eficiente de los recursos naturales y el control de plagas que afectan la productividad. Dentro de este contexto, el cultivo de cacao representa uno de los principales productos de exportación no petroleros del país, siendo un motor de desarrollo económico para regiones como Santo Domingo de los Tsáchilas (MAG Ecuador, 2021)

En la parroquia San Jacinto del Búa, este cultivo constituye una actividad esencial para decenas de familias que dependen directamente de su producción.

No obstante, a pesar de su importancia, la producción de cacao en esta zona ha sido históricamente afectada por diversos factores, entre los que destacan: las condiciones climáticas extremas, el agotamiento del suelo y, principalmente, la incidencia de plagas como la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*). Esta especie ha sido identificada como una de las principales amenazas en plantaciones jóvenes y en estados intermedios de desarrollo, provocando pérdidas que, según los agricultores locales, pueden superar el 50% de la producción durante los meses de mayor humedad (García-Briones et al., 2021)

Si bien el manejo tradicional y empírico del cultivo, basado en la experiencia, ha sido fundamental para la sostenibilidad de la actividad agrícola, presenta limitaciones al momento de predecir o controlar los brotes de plagas. Esto genera incertidumbre productiva, incremento en los costos de manejo y una mayor vulnerabilidad del agricultor frente a fenómenos adversos. Además, la carencia de herramientas científicas adaptadas al entorno local restringe la capacidad de anticiparse a situaciones de riesgo y tomar decisiones informadas (Cedeño Coll & Dilas-Jiménez, 2022).

Frente a este panorama es indispensable el desarrollo de modelos matemáticos que representen el desarrollo del cultivo de cacao frente a agentes de depredación, como plagas, insectos, clima y otros, se vuelve una herramienta útil y de mucha ayuda sobre todo para los pequeños productores agrícolas (Assis et al., 2024).

El objeto de este estudio es modelar el antagonismo que existe entre la planta de cacao y sus depredadores, especialmente los insectos para una finca agrícola ubicada en San Jacinto del Búa. Con los resultados obtenidos, se busca ayudar a entender los sistemas que cacao y su interacción con la hormiga chacarrera, en estas zonas.

Más específicamente, se desea conocer como el modelo de Lotka Volterra puede determinar y predecir la interacción entre la planta de cacao y la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*).

Este modelo nos permitió observar las oscilaciones que se dan entre la producción del cacao y la reproducción de los insectos estudiados. También se deberán controlar los parámetros para ajustar de forma eficiente al modelo.

Además, dentro del estudio se investigará factores externos como, la fertilización, control de plagas y la estacionalidad afectan el comportamiento del sistema cacao-plaga, incorporando estas prácticas agrícolas dentro del esquema de modelización.

Finalmente, mediante el modelo propuesto en base a investigaciones previas y experiencias de agricultores, se buscará simular distintos escenarios de manejo agrícola, con el propósito de identificar estrategias que permitan reducir la incidencia de la plaga y mejorar el rendimiento del cultivo, ofreciendo así recomendaciones prácticas para productores locales en la búsqueda de una agricultura más sostenible y eficiente.

## 1.2 Justificación de la investigación

La producción de cacao en Ecuador, y en la provincia de Santo Domingo de los Tsáchilas en particular, es una actividad agrícola estratégica de alto interés para la economía regional, la seguridad alimentaria de la población, la creación de empleo rural y la sostenibilidad de los sistemas agroecológicos basados en la producción. En tal contexto, se torna cada vez más urgente la necesidad de encontrar formas efectivas de aumentar la productividad del cultivo del cacao, ya que el rendimiento se ve limitado por varios factores en los territorios agrícolas con altos niveles de sensibilidad a la ecología local. Por lo tanto, no se puede llegar a este objetivo sin usar un enfoque interdisciplinario de la agricultura lleno de conocimiento tecnológico, experiencia empírica de los agricultores y evidencia científica actualizada (MAG, 2021).

Un problema recurrente para los agricultores que cosechan el cacao en San Jacinto del Búa es el ataque de ciertas plagas en sus cultivos. La especie común más dañina es la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*). Su presencia, especialmente en condiciones de humedad elevada y manejo agronómico limitado, puede comprometer más de la mitad de la producción anual, provocando pérdidas económicas significativas para los pequeños y medianos agricultores (Cedeño Coll & Dilas-Jiménez, 2022). Si bien las prácticas agrícolas tradicionales transmitidas generacionalmente han sido fundamentales para sostener el cultivo, su eficacia disminuye ante escenarios crecientemente influenciados por la variabilidad climática, el empobrecimiento progresivo del suelo y la imprevisibilidad de los ciclos de infestación (Anzules-Toala et al., 2022). Por tanto, se vuelve crucial fortalecer estas prácticas mediante herramientas científicas que permitan anticipar los efectos de las plagas y tomar decisiones agronómicas más informadas, adaptadas a las condiciones específicas del territorio.

Ante esta situación, el uso de modelos matemáticos constituye una herramienta valiosa para comprender la evolución de los sistemas agrícolas, anticipar riesgos y proponer estrategias de control efectivas. El modelo de Lotka-Volterra, por su capacidad para representar interacciones entre especies mediante sistemas de ecuaciones diferenciales, permite describir

y analizar la dinámica poblacional entre el cultivo y la plaga de manera formal, cuantificable y proyectiva (Cambisaca-Díaz & Macías-Badaraco, 2023).

Además, la presente investigación se justifica por su pertinencia social y académica. Desde el punto de vista práctico, busca ofrecer a los productores una herramienta científica que les permita mejorar el manejo del cultivo mediante decisiones basadas en datos y simulaciones. Desde el ámbito académico, se inscribe en la línea de investigación en sistemas dinámicos y modelado matemático, aportando un caso de estudio aplicado a un problema real, con posibilidad de ser replicado en otros cultivos o regiones (Monteiro et al., 2024).

La investigación se ha estructurado en cuatro secciones, cuidadosamente diseñados para dejar espacio a un desarrollo lógico, progresivo y articulado del estudio propuesto. Cada parte desarrolla una finalidad específica en el esquema general, respondiendo a la problemática planteada y a la comprensión integral de ésta.

La primera sección del presente trabajo, da a conocer la problemática central de la investigación, aquí se presenta el objetivo de estudio, la justificación de su pertinencia y se establecen tanto el objetivo general de estudio como las preguntas que orientarán el estudio, y además, se definen las hipótesis de trabajo, sentando las bases conceptuales y metodológicas sobre las que se apoya el desarrollo posterior del proyecto.

A continuación, el capítulo I desarrolla el marco teórico, fruto de una lectura exhaustiva de obra científica y técnica sobre los principales ejes de estudio. Este capítulo presenta una visión general sobre la producción de cacao y desarrolla los fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos, entre ellos el análisis de ecuaciones diferenciales, la noción de estabilidad y el modelo de Lotka–Volterra, que forma el núcleo formal del modelo presentado.

El capítulo II describe de manera minuciosa de la metodología empleada en el desarrollo de la investigación, en este apartado se detallan los procedimientos seguidos para la recolección, organización y procesamiento de los datos, así como el método utilizado para el ajuste de parámetros y las simulaciones numéricas, en este capítulo también se explica cómo se contextualizó el modelo matemático a las condiciones específicas de una finca de San Jacinto del Búa.

El capítulo III, está dedicado al análisis de los resultados obtenido, en esta sección se comparan las salidas teóricas del modelo con los datos empíricos recogidos en campo, se evalúa la capacidad predictiva del sistema propuesto y se discuten las implicaciones en términos de manejo agrícola, control de plagas y sostenibilidad productiva.

Al final de esta investigación se presentan las conclusiones generales del estudio, se ofrecen recomendaciones prácticas para promover un manejo agrícola sostenible e investigaciones futuras, se destacan los principales aportes de esta investigación tanto en el ámbito académico como en el sector productivo.

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo general**

Desarrollar un modelo matemático en base al sistema de Lotka-Volterra, que describa la interacción entre la producción de cacao y la plaga hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*) en la parroquia San Jacinto del Búa.

### **1.3.2 Objetivos específicos**

1. Diseñar un modelo matemático tipo Lotka–Volterra que represente la interacción entre el cultivo de cacao y la hormiga chacarrera en San Jacinto del Búa.
2. Validar datos empíricos recogidos en campo para estimar los parámetros del modelo y verificar su validez contra observaciones reales.
3. Simular diversos escenarios de manejo agrícola evaluar su efecto sobre la productividad del cacao ante la presencia de plagas.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo busca darle una base teórica al estudio, mostrando las ideas, reglas y datos clave para entender cómo funciona el sistema cacao-plagas en San Jacinto del Búa y cómo usar el modelo de Lotka-Volterra para estudiarlo. Se revisará de forma crítica y detallada lo que se ha escrito sobre el tema, para entender el problema y apoyar el modelo matemático que se propone.

Primero, se hablará de por qué el cacao es importante en el país y la región, explicando cómo se cultiva, cómo las plagas afectan su producción y qué se suele hacer para cuidarlo. Luego, se explicarán los principios de los sistemas dinámicos y las ecuaciones diferenciales, que son muy útiles para crear modelos de cosas biológicas y agrícolas.

Después, se analizarán las ideas de estabilidad de los sistemas dinámicos y por qué son importantes para estudiar modelos de este tipo en poblaciones agrícolas. Por último, se explicará bien el modelo de Lotka-Volterra, mostrando cómo se calcula, qué significa en términos biológicos y cómo se puede usar para estudiar las relaciones entre seres vivos, adaptándolo a la relación entre el cacao y la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*) (GADPSD, 2025).

Así, este marco teórico da la base necesaria para crear, usar y analizar el modelo en los siguientes capítulos, asegurando que la investigación sea científicamente sólida.

### 2.1 El Cacao y su importancia agroeconómica en la región.

La provincia de Santo Domingo de los Tsáchilas se ha consolidado como una región emergente en la producción de cacao en el Ecuador. Su clima tropical húmedo, con temperaturas medias anuales entre 23 °C y 26 °C y precipitaciones superiores a los 2.000 mm, proporciona condiciones óptimas para el cultivo de *Theobroma cacao* (MAG, 2021). Esta actividad agrícola no solo tiene un valor económico, sino también social y cultural, especialmente en zonas rurales como San Jacinto del Búa, donde constituye una de las principales fuentes de ingreso familiar. La producción está mayormente en manos de

pequeños y medianos agricultores organizados en asociaciones, lo cual fomenta la cohesión comunitaria y facilita el acceso a asistencia técnica y mercados especializados (GADPSD, 2025).

El cultivo de cacao representa una actividad clave dentro del contexto económico y social del Ecuador, no solo por el empleo directo que genera en el campo, sino también por el impulso y respaldo que brinda a actividades conexas como el transporte, la comercialización y la elaboración de productos derivados con valor agregado, incluyendo aquellos de carácter artesanal (Cambisaca-Díaz & Macías-Badaraco, 2023). A escala nacional, el cacao constituye uno de los pilares del Producto Interno Bruto agrícola y se posiciona entre los principales productos de exportación no petrolera del país. Aunque tradicionalmente las provincias de Los Ríos y Manabí han liderado la producción, en los últimos años Santo Domingo de los Tsáchilas ha comenzado a destacar, especialmente con la incorporación de variedades como el cacao nacional fino de aroma. Esta apuesta por la calidad ha permitido a productores locales acceder a nichos de mercado especializados que valoran sus atributos organolépticos y su origen diferenciado (Toala et al., 2021).

Pese a ser uno de los cultivos de mayor importancia económica y social en la región y el país, el sector cacaotero enfrenta varios retos estructurales y agroecológicos que limitan su desarrollo sostenido, entre ellos se encuentran la creciente variabilidad climática en los últimos años, la incidencia de plagas y enfermedades como la moniliasis, la escoba de bruja o las hormigas chacareras, así como restricciones en el acceso a financiamiento, asistencia técnica y formación continua (Cedeño Coll & Dilas-Jiménez, 2022).

Todos estas dificultades y limitantes inciden directamente en el rendimiento de la producción por hectárea, reduciendo su potencial agro productivo y económico, a pesar de estas adversidades, el cultivo de cacao sigue desempeñando un rol estratégico para las economías rurales, no solo como fuente generadora de ingresos, sino también como motor para la diversificación productiva, la conservación de los ecosistemas agrícolas y el fortalecimiento de las cadenas de valor vinculadas al desarrollo local (Sornoza Vélez et al., 2022).

## **2.2 El proceso de producción de Cacao en Santo Domingo.**

La producción de cacao en la provincia de Santo Domingo de los Tsáchilas es una actividad agrícola que tiene un gran impacto. Esta actividad se caracteriza por el uso de técnicas tradicionales, pero también incorpora prácticas modernas que buscan mejorar tanto el rendimiento como la calidad del grano(Cusco Cuzco & Mancheno Ñacata, 2024).

El proceso de cultivo se divide en varias etapas importantes: desde la siembra y el manejo agronómico hasta el control de plagas y la cosecha. Cada una de estas etapas presenta características únicas que están ligadas a las condiciones del suelo y el clima de la región (Bravo Aguilera, 2024).

### **2.2.1 Plantación y establecimiento del cultivo**

El establecimiento de una plantación de cacao inicia con la selección del sitio, que debe presentar suelos profundos, bien drenados y con alta fertilidad natural, además de ubicarse en zonas con precipitaciones anuales entre 1.500 y 2.500 mm y temperaturas promedio de 24 °C a 26 °C. El primer paso técnico consiste en la preparación del terreno, que incluye la limpieza de malezas, el subsolado y la nivelación del suelo para facilitar el drenaje(MAG Ecuador, 2021)

La expansión del cultivo de cacao se realiza preferentemente por injertos, utilizando patrones resistentes a enfermedades como la moniliasis y la escoba de bruja, durante el proceso de la siembra se realizan en hoyos de 30 x 30 x 30 cm, en un marco de plantación que varía entre 3 x 3 m y 4 x 4 m, dependiendo del sistema de cultivo y de la variedad utilizada, para esto se recomienda la instalación de sombrío temporal con especies como plátano o maíz para proteger las plántulas durante sus primeras etapas de desarrollo(Correa et al., 2024).

### **2.2.2 Manejo agronómico y cuidados culturales**

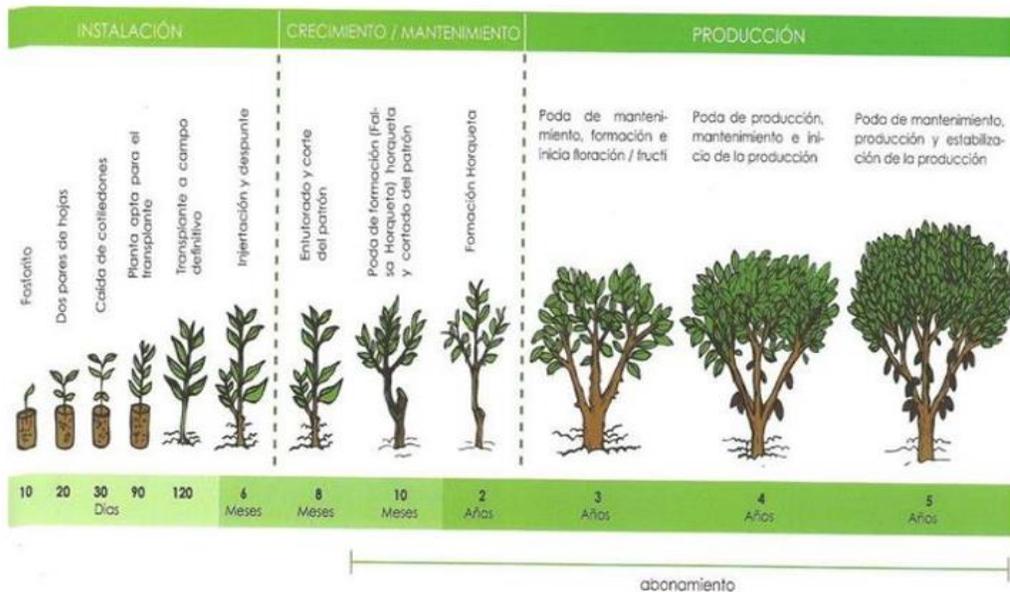
El manejo técnico del cultivo involucra labores constantes como la fertilización, el control de malezas y las podas de formación, mantenimiento y producción. La fertilización se basa en un diagnóstico previo de suelo y hojas, aplicándose nutrientes esenciales como nitrógeno, fósforo y potasio, además de micronutrientes como magnesio y boro, claves para la floración y el llenado de mazorcas (Instituto Nacional de Investigaciones Agropecuarias (MAG Ecuador, 2021).

La poda es una práctica crucial en la región, dado el alto crecimiento vegetativo favorecido por las condiciones climáticas, al cual se realiza para eliminar ramas enfermas, estimular la aireación de la copa y regular la producción de frutos, el desarrollo de esta actividad mejora también la eficiencia en el control de plagas y enfermedades, al reducir los espacios propicios para su desarrollo (Vera-Chang et al., 2024).

### **2.2.3 Etapas fenológicas del cacao**

El desarrollo del cacao comprende varias fases críticas: la germinación, el crecimiento vegetativo, la floración, el cuajado de frutos, y finalmente, la maduración. Cada etapa requiere atenciones específicas. Durante la floración, que suele intensificarse en épocas de lluvias moderadas, se deben reforzar los cuidados fitosanitarios para proteger las flores de infecciones fúngicas y asegurar un buen porcentaje de cuajado (MAG Ecuador, 2021). La Figura 1, muestra estas etapas fenológicas del cacao.

Figura1.- Esquema fenológico del cacao (Cumbicos Sarango, 2024)



Fuente: Tomado de (Amores, 2024)

### 2.2.4 Control de plagas y enfermedades

El cacao en Santo Domingo enfrenta amenazas fitosanitarias relevantes, entre las que destacan la moniliasis (*Moniliophthora roreri*), la escoba de bruja (*Moniliophthora perniciosa*), y la acción de insectos plaga como la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*) (Amores, 2024)

El control de estas plagas y demás que se presentan a lo largo del desarrollo del cultivo, se basa en un manejo integrado que combina métodos culturales, biológicos y químicos, destacando entre las prácticas culturales más importantes, la poda sanitaria, la recolección de frutos enfermos, la regulación del sombrío y la eliminación de focos de infección, en tanto que el control biológico incluye el uso de microorganismos antagonistas como *Trichoderma spp.*, que inhiben el crecimiento de patógenos (Pazmiño et al., 2025).

En el caso específico de la hormiga chacarrera, reconocida como una plaga de gran impacto debido a su capacidad para defoliar plantas por completo, las medidas de control contemplan la localización y eliminación de sus nidos, la aplicación de cebos tóxicos especializados y el impulso de enemigos naturales, como ciertas especies de hormigas depredadoras (Amores, 2024).

El control químico se emplea como último recurso y bajo criterios de manejo responsable, para evitar la resistencia de los patógenos y minimizar los efectos ambientales, en donde dado el caso se utilizan fungicidas sistémicos y de contacto, aplicados en momentos estratégicos del ciclo fenológico, especialmente en la floración y maduración de frutos (Pazmiño et al., 2025).

### **2.2.5 Cosecha y postcosecha**

El proceso de recolección o cosecha del cacao se realiza manualmente cuando las mazorcas alcanzan la madurez fisiológica, evidenciada por un cambio de color característico dependiendo de la variedad, por lo general pasa de rojizo a anaranjado, esta operación es sumamente importante, ya que una recolección prematura o tardía afecta la calidad del grano, cabe recalcar que la cosecha se realiza de manera continua a lo largo del año, con picos marcados tras las estaciones lluviosas (Cumbicos Sarango, 2024).

Posteriormente, se lleva a cabo el proceso de beneficio que comprende las etapas de fermentación y secado, fundamentales para el desarrollo de los precursores de sabor y aroma. La fermentación suele durar entre cinco y siete días en cajas de madera, y el secado se realiza al sol o en secadores mecánicos, buscando reducir la humedad al 7 % para su almacenamiento seguro (Parra Forero et al., 2021).

### **2.2.6 Importancia del manejo adecuado**

La correcta ejecución de cada una de estas etapas es determinante para garantizar una producción de cacao de alta calidad, capaz de competir en mercados especializados. Además, un manejo técnico adecuado contribuye a la sostenibilidad del sistema agrícola, preservando

los recursos naturales, mejorando los ingresos de los productores y fortaleciendo la resiliencia frente a factores adversos como el cambio climático (Zambrano et al., 2023).

### **2.2.7 La hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*): biología y afectación**

La hormiga chacarrera es una especie de hormiga defoliadora de árboles, y esta es una de las principales plagas que afectan la producción de cacao en zonas tropicales húmedas como Santo Domingo de los Tsáchilas.

Esta especie de insecto, perteneciente al orden *Hymenoptera*, se caracteriza por su organización social jerárquica y su capacidad para defoliar rápidamente cultivos mediante el corte de grandes cantidades de hojas, utilizadas para cultivar hongos simbióticos de los que se alimenta, sus colonias pueden alcanzar millones de individuos y construir nidos subterráneos extensos, lo que dificulta su control (Ortíz, 2022) .

Así, en el cultivo del cacao en etapas iniciales, la hormiga chacarrera se convierte en uno de los factores que agravan significativamente el estado de las plantas. Reducen la capacidad fotosintética, elevan la mortalidad y, en las plantas ya adultas, la floración, la fructificación y el crecimiento de nuevas ramas. Los informes locales en San Jacinto del Búa establecen que una sola colonia puede comprometer hasta 20-30 plantas en menos de cuatro días, durante la estación de lluvia(Correa et al., 2024).

La desventaja del control químico radica en las restricciones ecológicas y de efectividad a largo plazo, mientras que las estrategias más sostenibles, como el uso de hongos entomopatógenos y la eliminación cultural del hábitat de plaga, exigen el nivel adecuado de conocimiento técnico y seguimiento(Rodríguez-Castro, 2024).

En este contexto se hace necesario un modelo matemático que represente la interacción entre el cacao y la plaga, mediante las ecuaciones de Lotka-Volterra, la cual es una representación dinámica, que permite representar de manera aproximada la dinámica provocada por presión de la hormiga sobre la producción de frutales, para así de esta forma evaluar diversas estrategias de manejo en función de su impacto sobre la dinámica y estabilidad del sistema.

### **2.3 El modelado matemático en la agricultura.**

Los modelos matemáticos junto al machine learning se han convertido en una de las herramientas más importantes y potentes dentro del estudio de fenómenos naturales, pues en base a su capacidad para describir, analizar en base a ecuaciones y conjunto de datos, distintos comportamientos de sistemas físicos, químicos, biológicos agrícolas, epidemiológicos, ecológicos y demás, se pueden establecer formas de control de estos fenómenos(Chuairey et al., 2024).

De forma particular en modelos dinámicos poblacionales agrícolas que nos permiten observar y evidenciar de qué manera interactúan ciertas especies a través del tiempo, a nivel de ecosistema o de agroecosistema, tanto en términos de competitividad como en los de predación o simbiosis(Palácio, 2021).

El modelo de un sistema agrícola, el cual se considera matemáticamente complejo, está compuesto de interacciones biológicas, físicas y socioeconómicas, requiere herramientas cuantitativas para su comprensión, predicción y gestión eficaz y en este contexto el modelado matemático proporciona un marco formal para representar dichos procesos, permitiendo simular escenarios, identificar variables críticas y optimizar la producción de cultivos, tal como lo exponen (Pramanik et al., 2024), estos modelos integran principios de biología, física, química y economía, lo cual es esencial para abordar los múltiples factores que afectan los sistemas agrícolas modernos.

El modelado en agricultura tiene como objetivo principal representar la realidad de la situación poblacional de especies dentro de un agroecosistema, de manera simplificada pero útil, para poder estudiar el comportamiento de los sistemas ante cambios en las variables de entrada y/o perturbaciones que ingresan al sistema y así con esta información tomar medidas de control.

Según como lo indican (Lucido et al., 2025), existen tres niveles principales de modelos:

**Modelos descriptivos:** Basados en leyes estocásticas y datos empíricos, para su modelado.

**Modelos deterministas:** Representan un conjunto de ecuaciones basadas en procesos biológicos mediante leyes físicas y químicas.

**Modelos predictivos:** Basados en experiencias previas y modelos anteriores y utilizados para simular escenarios y tomar decisiones.

Los modelos más utilizados en agroecosistemas incluyen:

- Modelos de crecimiento poblacional (exponencial, logístico).
- Modelos de competencia y depredación (Lotka-Volterra).
- Modelos econométricos aplicados a rendimientos y precios.

En este trabajo nos enfocaremos en un modelo particular, el modelo Lotka-Volterra se alinea con los modelos determinísticos y predictivos, ya que permite representar interacciones dinámicas entre plagas y sus enemigos naturales, algo fundamental en cultivos como el cacao, que son susceptibles a enfermedades fúngicas y ataques de insectos.

## 2.4 El modelo Lotka-Volterra

El modelo de Lotka-Volterra es uno de los modelos teóricos más importantes y fundamentales para el estudio de la dinámica poblacional en el sistema ecológico, este fue desarrollado de manera independiente por Lotka A.J. en 1925 y Volterra V. en 1926, en su concepción original, fue aplicado a campos ecológicos puros, sin embargo, conforme se ha ido mejorando el mismo, ha sido implementado en muchas disciplinas; así, en la agricultura, sirve para describir la relación entre agentes y poblaciones depredadoras, permitiendo incluir distintos factores agrícolas importantes en la dinámica poblacional (Pramanik et al., 2024).

Una de las razones por las que considero relevante este modelo es su capacidad para modelar los mecanismos dinámicos subyacentes responsables de la disminución y fluctuaciones poblacionales que se han observado en la naturaleza. Además, este particular modelo matemático se ha usado mucho para probar los diferentes escenarios de control biológico, ¿cómo cambia el equilibrio ecológico? y analizar su estabilidad, ¿cómo reacciona un sistema biológico si cambiamos o eliminamos de un plumazo la población de otra especie mediante un pesticida?, si introducimos una especie controladora, etc (Rojano et al., 2024).

El modelo se escribe de manera clásica mediante dos ecuaciones diferenciales no lineales, definidas por cuatro parámetros biológicos que relacionan 2 poblaciones que hacen el papel de presa y depredador, las cuales se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde:

- $x$ : población de la presa (plaga en el contexto agrícola),
- $y$ : población del depredador (control biológico),
- $\alpha$ : tasa de crecimiento natural de la presa,
- $\beta$ : tasa de encuentro y depredación,
- $\delta$ : eficiencia de conversión del depredador,
- $\gamma$ : tasa de mortalidad del depredador.

Este modelo representa una relación depredador-presa idealizada bajo los siguientes supuestos:

- La población de presas crece de forma exponencial en ausencia de depredadores.
- La única fuente de alimento del depredador es la presa en cuestión.
- El entorno es homogéneo, sin migración ni dispersión.

- Las tasas de encuentro y reproducción son constantes.

Bajo estos supuestos, las soluciones del sistema exhiben oscilaciones cíclicas cerradas en el espacio de fases  $(x, y)$ , donde las poblaciones de presa y depredador se regulan mutuamente. El comportamiento es conservativo: no hay disipación de energía ni tendencia a un equilibrio estable, a menos que se introduzcan modificaciones estructurales en el modelo (Zhou et al., 2025).

Aunque el modelo estándar de Lotka-Volterra es una representación teórica elegante, su utilidad práctica a la realidad se ve limitada por aspectos que consideran a continuación:

- **Suposiciones sencillas:** El modelo no considera la capacidad de carga del medio ni el agotamiento de recursos para cada una de las especies.
- **Interacciones lineales:** Se consideran que los parámetros de predación y el crecimiento vienen dados de forma lineal, lo cual es algo no muy cercano a la realidad.
- **Estabilidad estructural débil:** El modelo frente a pequeñas perturbaciones puede ser susceptible a un cambio de estabilidad considerable en su comportamiento.
- **Ausencia de respuesta funcional:** No se considera, la saturación del depredador ante altas densidades de presas.

Todas estas limitaciones han llevado a lo largo del tiempo, al desarrollo de múltiples extensiones y “mejoras” del modelo original, para de esta manera ajustarse mejor a situaciones reales, como las que presentan los ecosistemas agrícolas.

## 2.5 Variaciones y extensiones del modelo Lotka-Volterra

A lo largo del estudio de los sistemas dinámicos y en este caso, de manera puntual, dentro del análisis del modelo clásico de Lotka-Volterra han surgido diversas propuestas de

variaciones y extensiones con el fin de representar de forma más realista las complejas interacciones naturales, que ocurren en los sistemas ecológico y agrícolas.

Todas estas “mejoras” y adaptaciones del modelo, incluyen la incorporación de términos y parámetros considerados de gran impacto en la dinámica del mismo, tales como: de capacidad de carga, tasas de depredación y crecimiento no lineales, además de retardos temporales, efectos estacionales y múltiples especies en competencia o depredación(Júnior, 2024).

Dentro del ámbito agrícola, tales mejoras permiten simular dinámicas más ajustadas a la realidad de plagas como *Atta Cephalotes*, cuyos efectos sobre cultivos como el cacao no solo dependen de su densidad poblacional, sino también de factores climáticos, buenas prácticas de manejo y estados fenológicos del cultivo, todas estas modificaciones al modelo estándar facilitan la evaluación de la dinámica de las especies y por ende sustentan de manera informada la toma de decisiones y elaboración de estrategias para el control de estas plagas(Bauer & Schwarzmayr, 2023).

### 2.5.1 Modelo Logístico-Depredador

Para incorporar la capacidad de carga del medio, se modifica la ecuación de la presa introduciendo un término logístico:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y\end{aligned}\tag{1.2}$$

Donde:

- $r$ : Tasa intrínseca de crecimiento de la presa.
- $K$ : Capacidad de carga del ecosistema.
- $\beta$ : tasa de encuentro y depredación,
- $\delta$ : eficiencia de conversión del depredador,
- $\gamma$ : tasa de mortalidad del depredador.

Este modelo refleja que el crecimiento de la presa se desacelera a medida que la población se acerca a la capacidad máxima del entorno.

### 2.5.2 Modelos Tritróficos

En agroecosistemas, es común considerar interacciones entre tres niveles tróficos: planta, herbívoro y depredador. El modelo se expande para incluir estas relaciones (Pramanik et al., 2024):

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= r_P P \left(1 - \frac{P}{K}\right) - c_1 HP \\ \frac{dH}{dt} &= c_1 HP - c_2 CH - d_H H \\ \frac{dC}{dt} &= e c_2 HC - d_C C\end{aligned}\tag{1.3}$$

Donde:

- $P$ : Población de plantas.
- $H$ : Población de herbívoros.
- $C$ : Población de depredadores.
- $c_1, c_2, c_3$ : Coeficientes de interacción.
- $d_H, d_C, d_P$ : Tasas de mortalidad.
- $e$ : Eficiencia de conversión.

Este modelo permite analizar estrategias de control biológico en cultivos, considerando las interacciones entre plantas, plagas y enemigos naturales.

### 2.5.3 Modelos de multiplicidad de especies

En los sistemas agroecológicos reales, rara vez se presenta una interacción simple entre una sola especie de cultivo y una única especie de plaga o depredador. En cambio, se observa una **dinámica compleja de múltiples especies** que incluye, por ejemplo, diferentes tipos de

plagas que compiten por el mismo recurso, depredadores naturales que controlan más de una plaga, cultivos asociados o intercalados, y organismos beneficiosos que influyen en los ciclos tróficos (Pramanik et al., 2024).

La extensión del modelo clásico de Lotka-Volterra a sistemas multi especie permite representar con mayor fidelidad estas interacciones complejas. Este tipo de modelos es fundamental en el análisis de agroecosistemas sostenibles y en la implementación de estrategias integradas de manejo de plagas y control biológico.

- **Formulación Matemática General**

Supongamos un sistema agrícola que involucra una planta hospedera (cacao), dos especies de plagas herbívoras y una especie de depredador o agente de control biológico.

Sea:

- $x(t)$ : biomasa o población de la planta (cacao),
- $y_1(t)$ : población de la plaga 1 (ej. *Moniliophthora roreri*),
- $y_2(t)$ : población de la plaga 2 (ej. *Helicoverpa zea*),
- $z(t)$ : población del depredador natural (ej. avispas parasitoides).

El sistema dinámico extendido se puede modelar como:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - a_1xy_1 - a_2xy_2 \\
 \frac{dy_1}{dt} &= b_1xy_1 - c_1y_1z - d_1y_1 \\
 \frac{dy_2}{dt} &= b_2xy_2 - c_2y_2z - d_2y_2 \\
 \frac{dz}{dt} &= e_1y_1z + e_2y_2z - fz
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

**Parámetros:**

- $r$ : tasa de crecimiento del cultivo de cacao.
- $K$ : capacidad de carga del sistema para el cultivo.

- $a_i$ : tasa de daño que cada plaga  $y_i$  causa al cultivo.
- $b_i$ : eficiencia reproductiva de las plagas alimentándose del cultivo.
- $c_i$ : eficiencia de depredación del controlador sobre cada plaga.
- $d_i$ : tasa de mortalidad natural de las plagas.
- $e_i$ : ganancia neta del depredador al consumir plagas.
- $f$ : tasa de mortalidad natural del depredador.

## 2.6 Sistemas Dinámicos

La producción agrícola en regiones tropicales como Santo Domingo, Ecuador, se desarrolla en un entorno dinámico, influenciado por factores climáticos, biológicos y humanos que interactúan de manera no lineal, por lo que el establecer un modelo real se torna en un desafío, sin embargo ante esta dificultad, los sistemas dinámicos constituyen una herramienta muy útil para modelar la evolución temporal de estas interacciones, al menos de manera muy aproximada, donde, mediante la representación de su dinámica mediante ecuaciones diferenciales, estos modelos permiten analizar la relación entre cultivos, plagas y factores de manejo, facilitando la identificación de patrones, equilibrios y escenarios críticos (Cobiaga, 2024).

Dentro de los múltiples modelos dinámicos existentes y que pueden ser utilizados en la mayoría de fenómenos de la naturaleza, el modelo de Lotka-Volterra es uno de los más clásicos y más utilizados dentro de estos, que con sus variaciones y extensiones son ampliamente utilizados para representar la dinámica entre poblaciones, como la del cacao y sus plagas. Esta sección aborda los fundamentos de los sistemas dinámicos, su clasificación y análisis cualitativo, proporcionando una base teórica para comprender y gestionar de manera científica y sostenible los desafíos agrícolas en sistemas complejos (Castillo, 2025).

### 2.6.1 Definición de un sistema dinámico

Un **sistema dinámico** es una representación matemática de un fenómeno natural, el cual describe cómo evoluciona el estado de un sistema físico, biológico o socioeconómico a lo largo del tiempo, los sistemas dinámicos se modelan como un conjunto de ecuaciones basadas en principios y leyes naturales, que muestran la tasa de cambio de las variables con

respecto al tiempo. Todas estas ecuaciones pueden representar cantidades físicas y se modelan de manera determinística o estocástica según la naturaleza del sistema (Brunton & Kutz, 2022).

Puede definirse formalmente como una tupla  $(M, \varphi_t)$ , donde:

- $M$  es una variedad diferenciable (el **espacio de fases**), generalmente  $R^n$  o un subconjunto abierto de  $R^n$ ,
- $\varphi_t: M \rightarrow M$  : es un flujo (en el caso continuo) o un operador de evolución (en el caso discreto), que satisface las propiedades:
  - a)  $\varphi_0(x) = x$
  - b)  $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ ; Para  $\forall t, s \in R$  y  $x \in M$

## 2.6.2 Clasificación general de los Sistemas Dinámicos

- **Según la Naturaleza del Tiempo**

### a) Sistemas Dinámicos Continuos

Un sistema dinámico es continuo si el dominio temporal es  $R$ . Matemáticamente, se representa por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinaria (EDOs) de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t); \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.5)$$

donde:

- $x: R \rightarrow R^n$  es una función vectorial absolutamente continua,
- $f: R^n \times R \rightarrow R^n$  es una función al menos  $C_1$  (continuamente diferenciable),
- $x_0 \in R^n$  es la condición inicial del sistema.

Se dice que  $x(t)$  es una solución si satisface la EDO en casi todo  $t \in R$

### b) Sistemas Dinámicos Discretos

Un sistema dinámico discreto se define como una sucesión o sistema de ecuaciones en diferencias de la forma:

$$x_{n+1} = F(x_n, n) \quad (1.6)$$

donde:

- $x_n: \mathbb{R} \rightarrow R^n$  es una función vectorial absolutamente continua,
- $F: R^n \times R \rightarrow R^n$  es una función al menos  $C_1$  (continuamente diferenciable),
- $n \in \mathbb{Z}$

Se dice que  $x(n)$  es una solución si satisface el sistema de ecuaciones en diferencias o en casi todo  $n \in \mathbb{Z}$

- **Según la Dependencia Temporal Explícita**

- a) **Sistemas Autónomos**

Un sistema es autónomo si la función vectorial  $f$  no depende explícitamente del tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1.7)$$

lo cual implica que el campo vectorial que define el sistema es estacionario. El flujo asociado  $\varphi_t$  depende solo del tiempo transcurrido y del estado inicial (Brunton et al., 2021).

- b) **Sistemas No Autónomos**

Un sistema es no autónomo si la función  $f$  depende explícitamente de  $t$ , como lo indicado en la ecuación (1.5):

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

En este caso, el campo vectorial puede variar con el tiempo y el sistema pierde invariancia temporal. El flujo ya no es un grupo, sino una familia de aplicaciones que dependen de dos tiempos  $\varphi(t, s): \varphi(s) \rightarrow \varphi(t)$ .

- **Según la Estructura Algebraica del Campo Vectorial**

- a) **Sistemas Lineales**

Un sistema dinámico es lineal si  $f(x, t)$  es lineal en  $x$ , es decir, existe una matriz  $A(t) \in R^{n \times n}$  y un vector  $b(t) \in R^n$  tales que:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t) \quad (1.8)$$

Cuando  $A$  y  $b$  son constantes, el sistema es lineal homogéneo o no homogéneo con coeficientes constantes.

- b) **Sistemas No Lineales**

Un sistema es no lineal cuando, no puede expresarse como combinación lineal de las variables. Esto incluye términos de interacción, productos cruzados, funciones trascendentales, etc.

Es decir  $\frac{dx}{dt} = f_i(x)$ , con  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  como una transformación no lineal.

En estos casos, no se cumple el principio de superposición, y el análisis cualitativo (geometría del flujo, espacio de fases) adquiere mayor importancia.

### 2.6.3 Linealización de sistemas dinámicos continuos

El estudio de sistemas dinámicos no lineales es fundamental en la modelación de fenómenos complejos en agroecosistemas. Procesos como la interacción entre cultivos y plagas, o entre organismos competidores o cooperadores, presentan una dinámica intrínsecamente no lineal, donde la evolución temporal no puede describirse mediante combinaciones lineales simples de las variables del sistema (Zino & Cao, 2021).

Sin embargo, el análisis cualitativo de estos modelos matemáticos puede realizarse mediante técnicas de linealización local alrededor de puntos de operación del sistema que sean de interés, de manera esencial, en los puntos de equilibrio, este método consiste en aproximar el comportamiento del sistema no lineal a un sistema lineal que captura la dinámica del sistema en dichos puntos y en vecindades de los mismos.

Esta técnica es de gran relevancia en la tesis, pues el modelo de Lotka-Volterra aplicado a la producción de cacao presenta comportamientos no lineales que pueden ser estudiados a través de su aproximación lineal en entornos locales, permitiendo inferencias sobre estabilidad y comportamiento dinámico sin resolver el sistema completo (Teschl, 2022).

#### 2.6.4 Puntos de equilibrio

Sea un sistema dinámico autónomo definido por:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in R^n$$

donde  $f: R^n \rightarrow R^n$  es una función de clase  $C_1$  (continuamente diferenciable). Se denomina un **punto de equilibrio**  $x^* \in R^n$  del sistema si satisface:

$$f(x^*) = 0 \tag{1.9}$$

Esto implica que, si la solución inicia en  $x^*$  permanece constante en el tiempo, es decir,  $x(t) = x^*$  para  $\forall t \in R$ .

### 2.6.5 La linealización de campos vectoriales para EDOs

Dado un punto de equilibrio  $x^*$ , se puede realizar una expansión en serie de Taylor de primer orden de  $f(x)$  alrededor de  $x^*$  :

$$f(x) = f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*) + O(\|x - x^*\|)$$

donde el término de orden superior  $O(\|x - x^*\|)$  tiende a cero más rápidamente que  $\|x - x^*\|$  cuando  $x \rightarrow x^*$ . Dado que  $f(x^*) = 0$ , se obtiene la **aproximación lineal**:

$$\frac{dx}{dt} \approx Df(x^*)(x - x^*) \quad (1.10)$$

Definiendo el cambio de variable  $u = x - x^*$  el sistema se reduce a:

$$\frac{du}{dt} = Df(x^*)u = Au \quad (1.11)$$

donde  $A$  es la matriz **jacobiana** de  $f$  evaluada en  $x^*$

### 2.6.6 Matriz Jacobiana

Sea  $f = f(f_1, f_2, f_3 \dots f_n) : R^n \rightarrow R^n$  una función vectorial de clase  $C_1$ . La **matriz jacobiana** de  $f$  en un punto  $x \in R^n$  denotada  $Df(x)$  es la matriz  $n \times n$  cuyas entradas están dadas por las derivadas parciales de los componentes de  $f$  respecto a las variables del sistema (Meng et al., 2023):

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Cada fila  $i$  corresponde al gradiente de la función escalar  $f_i$  y la matriz en su conjunto representa la derivada total de  $f$ .

## 2.7 Estabilidad de sistemas dinámicos

El análisis de estabilidad es un componente fundamental en el estudio cualitativo de sistemas dinámicos. Permite determinar si pequeñas perturbaciones alrededor de un estado de equilibrio o de una solución periódica tienden a disiparse con el tiempo (estabilidad) o se

amplifican (inestabilidad). En el contexto de la presente tesis, comprender la estabilidad de los equilibrios en modelos poblacionales (como el modelo de Lotka-Volterra aplicado al cultivo de cacao y sus agentes bióticos) es esencial para identificar condiciones en las cuales el sistema agrícola tiende a un comportamiento deseado, como la coexistencia sostenible entre cultivos, plagas y controladores biológicos (Luongo et al., 2023).

### 2.7.1 Puntos fijos y periódicos

Dentro del análisis cualitativo de un sistema dinámico, los puntos fijos o de equilibrio juegan un papel fundamental para la determinación de la estabilidad y comportamiento del modelo, sin embargo existe otros puntos propios de cada sistema que definen otro tipo de comportamiento del modelo, estos son los puntos periódicos, los puntos fijos o críticos fueron definidos anteriormente, por lo que en este sentido daremos una definición formal de los puntos periódicos (Strogatz, 2022).

Una función  $x$  es **periódica** si existe un período  $T > 0$  tal que:

$$x(t + T) = x(t) \text{ para } \forall t \in R$$

Dicho  $T$  se denomina el **período primitivo** si es el menor valor positivo con esta propiedad. Una trayectoria periódica es un lazo cerrado en el espacio de fases, y su estabilidad implica que soluciones próximas se mantendrán cercanas a la órbita periódica con el tiempo.

Es decir si el sistema se representa mediante una ecuación diferencial autónoma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

entonces  $x_0$  es periódico si la solución  $x(t) = x(t + T)$  para  $\forall t \in R$

### 2.7.2 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Sea  $x^* \in R^n$  un punto de equilibrio del sistema. La estabilidad se define con respecto a las trayectorias del sistema que parten cerca de  $x^*$ , de la siguiente manera (Brunton et al., 2021):

El punto  $x^*$  es **estable (en el sentido de Lyapunov)** si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|x_0 - x^*\| < \delta$  entonces la solución  $x(t)$  con  $x(0) = x_0$  satisface:

$$\|x - x^*\| < \varepsilon \text{ para } \forall t \geq 0$$

Esto significa que cualquier trayectoria que comienza suficientemente cerca de  $x^*$  permanece arbitrariamente cerca de él.

### 2.7.3 Estabilidad Asintótica:

El punto  $x^*$  es **asintóticamente estable** si:

1. Es estable en el sentido de Lyapunov, y
2. Existe  $\delta' > 0$  tal que si  $\|x_0 - x^*\| < \delta'$ , entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

Es decir, además de que las trayectorias se mantienen cercanas, convergen a  $x^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$

### 2.7.4 Estabilidad de Órbitas Periódicas

Una **órbita periódica**  $\gamma(t)$  de período  $T$  es estable si,  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que cualquier solución  $x(t)$  con  $\|x(0) - \gamma(0)\| < \delta$  satisface:

$$\inf_{\tau \in [0, T]} \|x(t) - \gamma(t + T)\| < \varepsilon \tag{1.13}$$

En respuestas periódicas la estabilidad de este tipo de soluciones fundamental en el análisis general de sistemas agroecológicos con ciclos estacionales es decir con dinámicas recurrentes de manera periódica.

### 2.7.5 Estabilidad espectral (Valores y vectores propios)

En el estudio de sistemas dinámicos no lineales, uno de los objetivos más importantes es determinar el comportamiento de la respuesta del sistema entorno a un punto de equilibrio o

sus vecindades, dado que la solución general del sistema no es accesible de manera analítica, en la mayoría de los casos, por la complejidad funcional del mismo, por lo que se emplea la técnica de **linealización**, que consiste en aproximar el sistema no lineal a un sistema lineal alrededor de su punto de equilibrio(Teschl, 2022).

Una de las herramientas matemáticas más utilizada para determinar la estabilidad alrededor de estos puntos, es el análisis espectral de la matriz jacobiana, es decir, el estudio de los autovalores y autovectores de dicha matriz, los cuales permiten identificar la dinámica local del sistema, para de este modo poder clasificar el comportamiento de las soluciones, como su convergencia o divergencia respecto del equilibrio(Meng et al., 2023).

Dentro de este estudio, el uso de esta metodología es muy útil, ya que permite estudiar la dinámica de interacción entre especies en sistemas agrícolas no lineales como los que surgen del modelo Lotka-Volterra, aplicado a cultivos como el cacao y la hormiga chacarrera.

En este sentido la estabilidad espectral parte de un sistema lineal autónomo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in R^n$$

y un punto de equilibrio  $x^*$  tal que  $f(x^*) = 0$ , entonces, se define el **sistema linealizado** alrededor de  $x^*$  mediante la matriz jacobiana:

$$\frac{du}{dt} = Au \text{ con } A = Df(x^*)$$

Este sistema describe la evolución de pequeñas perturbaciones alrededor de  $x^*$ . El comportamiento de sus soluciones está determinado completamente por la **estructura espectral** de la matriz  $A$ (Despons et al., 2025).

- **Autovalores y Autovectores**

Sea  $A \in R^{n \times n}$ . Un **autovalor**  $\lambda \in \mathbb{C}$  y un **autovector** asociado  $v \in \mathbb{C}^n - \{\vec{0}\}$  satisfacen:

$$Av = \lambda v \tag{1.14}$$

El conjunto de autovalores de  $A$ , denotado  $\sigma(A)$  determina el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema linealizado. La solución general del sistema lineal puede expresarse (cuando  $A$  es diagonalizable) como una combinación lineal de modos del tipo:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i \quad (1.15)$$

donde  $\lambda_i$  son los autovalores y  $v_i$  los autovectores asociados. La naturaleza de cada término depende de la parte real de  $\lambda_i$ .

- **Criterio Estabilidad**

Sea  $A \in R^{n \times n}$  la matriz jacobiana del sistema linealizado. El punto de equilibrio  $x^*$  del sistema no lineal original es:

- **Asintóticamente estable:**

$$\text{Si } \text{Re}\{\lambda_i\} < 0$$

- **Inestable :**

- $\exists \lambda_i \ ; \ \text{Re}\{\lambda_i\} > 0$

- **No asintótico:**

$$\exists \lambda_i \ ; \ \text{Re}\{\lambda_i\} = 0$$

En este caso, el sistema no puede clasificarse únicamente mediante el análisis lineal, y se requieren métodos no lineales (formas normales, teoría de bifurcaciones, etc.).

Estos criterios se derivan del teorema de Hartman–Grobman, el cual garantiza que si el equilibrio es hiperbólico, entonces el sistema no lineal y su linealización son topológicamente equivalentes en un entorno de  $x^*$  (Teschl, 2022).

## 2.8 Optimización de parámetros en ecuaciones diferenciales

El modelado de un sistema dinámico, como cualquier otro tipo de modelado requiere de un proceso de estimación y cálculo de parámetros involucrados en la naturaleza del fenómeno, en el caso de sistemas agrícolas, la exactitud de la determinación de estos permite la validación y aplicación del mismo, en el caso particular de modelos del tipo Lotka-Volterra, cada parámetro representa un factor biológico específico de la interacción en el sistema de las variables de cultivo, plaga y controlador, por lo que su adecuada calibración es fundamental para reflejar fielmente la dinámica observada en campo. Dado que muchos de estos parámetros no pueden medirse directamente, se recurre a técnicas de optimización que ajustan el modelo a datos empíricos mediante la minimización de una función de costo (Avazzadeh et al., 2024).

La estimación de parámetros en el modelo de un sistema dinámico, implica muchos desafíos matemáticos y computacionales, según la naturaleza del mismo, ante estas situaciones, han surgido muchos métodos deterministas como Levenberg-Marquardt, o heurísticos como algoritmos evolutivos y enjambres de partículas que están basados en inteligencia artificial, para esta investigación, la optimización del modelo Lotka-Volterra aplicado al cultivo de cacao, esta basado en los datos recolectados por lo que Levenberg-Marquardt, permite es el método seleccionado, que como se mencionó anteriormente, usa estos datos y va aproximando las respuestas del modelo a este conjunto de tal forma que se tenga la mejor aproximación (Kumar & Sinha, 2023).

### 2.8.1 Formulación del Problema de Optimización

Sea un sistema dinámico continuo descrito por un conjunto de **ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)** de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), \theta) ; x(0) = x_0 \quad (1.16)$$

donde:

- $x(t) \in R^n$  representa el vector de variables de estado del sistema.

- $\theta$  es el vector de **parámetros a estimar**, que determinan la dinámica del sistema.
- $f: R^n \times R^p \rightarrow R^n$  es una función vectorial suficientemente regular (usualmente de clase  $C^1$ ).
- $x_0$  es la condición inicial del sistema en el tiempo  $t = 0$

El objetivo de la **optimización de parámetros** consiste en determinar el valor óptimo de  $\theta$  tal que las soluciones del modelo ajusten de la mejor manera posible a un conjunto de **datos observados**  $x^{obs}(t_i)_{i=1}^N$  correspondientes a tiempos discretos  $(t_1, t_2 \dots t_n) \subset [0, T]$

Para ello, se define una **función de costo** (o función objetivo)  $J: R^p \rightarrow R_0$ , que cuantifica el error de ajuste del modelo, típicamente mediante una métrica de tipo cuadrático:

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^N \|x(t_i, \theta) - x^{obs}(t_i)\|^2 \quad (1.17)$$

donde  $x(t_i, \theta)$  representa la solución numérica del sistema con parámetros  $\theta$  evaluada en el tiempo  $t_i$ .

El problema de optimización de parámetros se formula entonces como:

$$\min_{\theta \in \mathcal{U}} J(\theta) \quad (1.18)$$

sujeito a:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), \theta) ; x(0) = x_0$$

donde  $\mathcal{U} \subseteq R^p$  es un conjunto de restricciones (por ejemplo, cotas fisiológicas o ecológicas que aseguran que los parámetros sean biológicamente plausibles).

El problema definido es un caso particular de **optimización no lineal** con restricciones implícitas (la solución del sistema de EDOs), y presenta las siguientes características:

- La función objetivo  $J(\theta)$  **no es explícita**, ya que depende de la solución numérica del sistema de EDOs para cada  $\theta$

- El espacio de búsqueda puede ser de **alta dimensión** (cuando hay muchos parámetros), y la función objetivo puede presentar **múltiples mínimos locales**.
- El proceso de optimización puede ser **computacionalmente costoso**, ya que cada evaluación de  $J(\theta)$  requiere resolver un sistema dinámico completo.

## 2.8.2 Métodos comunes de optimización de parámetros en EDOs

La solución del problema de estimación de parámetros en sistemas dinámicos modelados por EDOs requiere la utilización de técnicas de optimización numérica. Estas técnicas pueden clasificarse en dos grandes grupos: métodos deterministas, que se basan en información local del gradiente o la forma funcional de la función objetivo, y métodos heurísticos o estocásticos, que emplean reglas evolutivas, poblaciones o principios probabilísticos para explorar el espacio de búsqueda (Grippo & Sciandrone, 2023).

A continuación, se describen los métodos numéricos más utilizados en el ajuste de modelos dinámicos.

### 2.8.2.1 Método del Gradiente Descendente

Sea  $J: R^p \rightarrow R$  la función objetivo a minimizar. El algoritmo del **gradiente descendente** genera una secuencia de iteraciones (Phillips, 2021):

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \eta_k \nabla J(\theta_k) \quad (1.19)$$

donde:

- $\eta_k > 0$  es la **tasa de aprendizaje** (o paso),
- $\nabla J(\theta_k)$  es el **gradiente** de la función objetivo respecto a los parámetros.

Este método se basa en la dirección de máxima disminución local. Para su aplicación en problemas de EDOs, se requiere estimar numéricamente las derivadas  $\frac{\partial J}{\partial \theta_i}$  lo cual

puede hacerse por diferencias finitas o por **métodos adjuntos** en sistemas grandes (Grippo & Sciandrone, 2023).

### 2.8.2.2 Optimización por Enjambre de Partículas

Este método simula el comportamiento de enjambres (como bandadas de aves o bancos de peces). Cada **partícula** es una solución candidata  $\theta_i$ , con una posición y una velocidad en el espacio de parámetros (Shami et al., 2022). Las actualizaciones siguen la regla:

$$v_i^{k+1} = wv_i^k + c_1r_1(p_i - \theta_i^k) + c_2r_2(g_i - \theta_i^k) \quad (1.20)$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + v_i^{k+1}$$

donde:

- $p_i$ : mejor posición individual alcanzada por la partícula  $i$ ,
- $g$ : mejor posición global de toda la población,
- $w, c_1, c_2$  coeficientes de inercia y atracción,
- $r_1, r_2$  son números aleatorios en  $[0,1]$ .

PSO es eficiente en problemas de optimización continua y se ha usado con éxito en sistemas biológicos y ecológicos.

### 2.8.2.3 Método de Levenberg–Marquardt

El ajuste y validación de modelos dinámicos, como el sistema Lotka-Volterra aplicado a la interacción biológica de especies, requiere estimar parámetros clave a partir de datos observacionales, generalmente este proceso, se lo trata como un problema de optimización no lineal, en el cual se busca minimizar una función de costo que calcule la diferencia entre la salida del modelo y los datos recolectados, en este sentido el método de Levenberg–Marquardt (LM) se ha consolidado como uno de los algoritmos

más eficaces para estimar y ajustar los parámetros de este modelo de ecuaciones diferenciales, debido a su gran capacidad de combinar la robustez y rapidez de los algoritmos del gradiente descendiente y de Gauss-Newton respectivamente (Strogatz, 2022).

El método **Levenberg–Marquardt** mejora la robustez del método anterior interpolando entre el descenso por gradiente y el método de Gauss–Newton (Haring et al., 2023):

$$\theta_{k+1} = \theta_k - [J_k^T J_k + \lambda_k I]^{-1} J_k^T r(\theta_k) \quad (1.21)$$

donde  $\lambda_k > 0$  es un parámetro de amortiguamiento que se ajusta adaptativamente y donde  $J_k = \frac{\partial J}{\partial \theta_i}$  es la matriz jacobiana de los residuos.

En cada paso, el método evalúa si la nueva solución reduce el error. Si lo hace, se acepta y se reduce  $\lambda_k$ ; si no, se incrementa  $\lambda_k$  para dar más peso al descenso de gradiente y evitar movimientos inestables.

En el caso del modelo Lotka-Volterra aplicado al cacao en Santo Domingo, este método permite estimar parámetros biológicamente significativos —como la tasa de crecimiento del cultivo, la tasa de daño por plagas y la eficiencia de los controladores biológicos— ajustando el modelo a datos temporales de campo o simulados. Para cada conjunto candidato de parámetros, se debe resolver el sistema de EDOs correspondiente, lo que implica combinar el método LM con esquemas de integración numérica (como Runge-Kutta) para obtener la solución del sistema dinámico (Kochenderfer & Wheeler, 2021.).

Una ventaja clave del método LM en este contexto es su eficiencia computacional y su habilidad para lidiar con modelos altamente no lineales, como los que surgen de interacciones ecológicas complejas. Sin embargo, su desempeño también depende de una buena elección inicial de los parámetros y de la calidad de los datos de entrada,

ya que puede converger a mínimos locales si la función objetivo presenta múltiples valles o irregularidades.

### **III. METODOLOGÍA**

El presente capítulo muestra el sustento metodológico empleado para el desarrollo de esta investigación, la cual está orientada al análisis cuantitativo de un modelo dinámico tipo Lotka-Volterra con dos especies, una de presa (cacao) y otra depredadora (hormiga chacarrera), aplicado a la producción agrícola de cacao en la parroquia San Jacinto del Búa, cantón Santo Domingo. El diseño metodológico responde a la necesidad de articular un modelo matemático que no solo represente adecuadamente las interacciones biológicas en el ecosistema agrícola, sino que además pueda ser validado empíricamente a partir de datos reales obtenidos en campo.

Del mismo modo, esta sección detalla el tipo y diseño de la investigación, los métodos teóricos y prácticos aplicados en el desarrollo del estudio, además de las técnicas e instrumentos de recolección de datos, así como los métodos ya algoritmos computacionales empleados para el ajuste, simulación y análisis del modelo.

#### **3.1. Enfoque metodológico**

##### **3.1.1 Tipo de investigación**

Esta investigación se inscribe dentro del enfoque cuantitativo, de carácter explicativo, fundamentado en la formulación, análisis y calibración de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. El modelo propuesto considera la dinámica poblacional de dos especies: la planta de cacao como recurso, y un depredador biológico que actúan como agentes de presión sobre el sistema, en este caso la hormiga chacarrera.

El presente estudio presenta una metodología de carácter explicativo, donde se pretende identificar y analizar las relaciones causales y consecuentes entre las especies agrícolas involucradas en el sistema productivo, por medio un modelado matemático de tipo dinámico, esta narrativa explicativa se fundamenta a través de un sistema de ecuaciones que incorpora

parámetros ecológicos que serán determinados a partir de datos reales para su validación con el fin de comprender cómo influyen en el comportamiento de la fenomenología estudiada.

El desarrollo de la investigación se apoya en la formalización matemática de un modelo dinámico, el ajuste numérico de sus parámetros por medio de datos reales y la validación del mismo mediante cálculo de métricas de errores, el enfoque cuantitativo sobre el cual se sustenta el objetivo de este trabajo, permite evaluar el nivel de aplicabilidad del modelo al fenómeno en estudio en base a su nivel de adecuación a los datos observados, lo cual a su vez define si con este modelo se puede realizar toma de decisiones en cuanto al control mejoramiento de producción agrícola reales, en base a su análisis matemático y cálculo de predicciones, contribuyendo así a una mejor comprensión de los factores que influyen en la sostenibilidad y control de la producción de cacao en la región.

### **3.1.2 Paradigma de la investigación**

El paradigma de este trabajo se centra en el objetivo principal, de determinar los valores de los parámetros clave del modelo matemático tipo Lotka-Volterra empleado, utilizando datos de producción de cacao, recopilados en diversas plantaciones agrícolas de la zona de estudio, para de esta forma comprobar si el modelo se adapta, refleja y pronostica con precisión el comportamiento de las interacciones agroecológicas entre el cacao y la hormiga chacarrera en situaciones reales.

La metodología empleada en el paradigma de esta investigación, se centra en el algoritmo de optimización no lineal, de Levenberg–Marquardt, un método numérico ampliamente utilizado para la estimación de parámetros en modelos dinámicos, el cual resulta muy efectivo cuando se dispone de datos experimentales y se requiere ajustar la solución de un sistema de EDOs a dichos datos, este proceso de optimización está acompañado por métodos computacionales matemáticos de alta complejidad.

El paradigma presentado en este estudio es de tipo experimental y longitudinal, por las siguientes razones:

- **Experimental**, porque si bien se trabajan con datos reales de producción de cacao, en fincas cacaoteras de la parroquia San Jacinto del Búa, se hace una manipulación de estos con el fin de obtener otros datos importantes como la población de hormigas, de manera empírica.
- **Longitudinal**, ya que el estudio considera la evolución temporal de las variables del sistema, en este caso población de cacao y hormigas.

Esta observación se la hace a lo largo de un intervalo de tiempo definido, el cual, es esencial para el modelado dinámico, ya que estos requieren información secuencial de las variables a lo largo del tiempo, para así dar una formulación y posterior ajuste.

El diseño metodológico también contempla un componente **teórico-computacional**, que consiste en:

- La formulación de un modelo no lineal de tipo Lotka-Volterra con dos especies.
- La implementación computacional del sistema para su simulación numérica.
- La optimización de parámetros mediante el algoritmo de Levenberg–Marquardt.
- La validación del modelo ajustado contra los datos observados.

Este diseño permite articular adecuadamente el componente teórico del modelo con su validación empírica, lo que fortalece el carácter explicativo y predictivo de la investigación.

## 3.2. Población y Muestra

### i. Valoración de Datos

Con el propósito de establecer un modelo matemático confiable que describa la interacción entre el cultivo de cacao y su principal plaga la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*), se realizó un análisis de campo en una finca ubicada en la parroquia San Jacinto del Búa, en la provincia de Santo Domingo de los Tsáchilas. La zona es reconocida por su producción de cacao fino de aroma, así como por enfrentar desafíos constantes relacionados con plagas y manejo fitosanitario.

## ii. Selección

La población sobre la cual se llevó a cabo este estudio estuvo conformada por las plantaciones de cacao en producción dentro de la finca mencionada, la cual fue seleccionada dada su larga trayectoria dentro de la producción agrícola local. La zona donde se ubica esta finca es reconocida por su producción de cacao fino de aroma y, al mismo tiempo, por enfrentar condiciones ambientales y sanitarias que favorecen la proliferación de plagas, especialmente insectos defoliadores como las hormigas chacarreras.

Para la obtención de datos, se delimitó una muestra a partir de un sector específico del terreno de cultivo que incluye áreas afectadas en distintos niveles por *Atta Cephalotes*, con el fin de capturar la variabilidad espacial y temporal de la interacción plaga-cultivo, esta muestra seleccionada fue de tipo no probabilístico, por criterios, priorizando sectores con registros históricos de infestación.

Si bien la selección de unidades muestrales se realizó mediante criterios agronómicos y fitosanitarios (muestreo no probabilístico), se estimó un tamaño de muestra mínimo teórico utilizando la fórmula clásica para poblaciones grandes:

$$n = Z^2 \cdot \frac{p(1-p)}{e^2} \quad (2.1)$$

donde:

- n: tamaño mínimo de la muestra,
- Z: valor crítico de la distribución normal estándar
- p: proporción esperada de infestación
- e: error de estimación

Teniendo en cuenta valores clásicos de cada parámetro se tiene que:

$$Z = 1.96 ; p = 0.5 ; e = 0.1$$

Se tiene que  $n = 96.04$ , lo que indica y se toma como referencia para seleccionar al menos 100 árboles como entes de recopilación de datos.

### iii. Recolección de datos

Para el desarrollo del estudio, se eligió un sector de cultivo típico para el seguimiento y estudio de la producción, además de las pérdidas de frutos por razones biológicas. Los árboles de cacao que estaban dando frutos formaron el conjunto total; de ellos, se escogieron 100, puestos de manera pareja por todo el terreno y parecidos en edad, cómo se cuidaban, la luz que recibían y la clase de tierra. Esta cantidad fue suficiente para apreciar los cambios importantes en la producción y cómo las plagas afectaban dentro de la finca.

La información fue recolectada de manera directa, observado la evolución de la producción de manera ordenada durante cinco meses, desde enero hasta mayo de 2025, de esta manera se cubre todo el proceso de crecimiento del fruto, desde que nacen las primeras flores hasta la etapa de cosecha. Se eligió este tiempo en base a otros estudios de agricultura semejantez realizados en el Ecuador, como el mostrado en (Rodríguez-Castro, 2024) y (Correa et al., 2024) donde señalan que en un ciclo normal de producción de cacao, desde que florece hasta que se recoge, dura de 140 a 160 días por lo general en zonas cerca del Ecuador.

Durante este tiempo, cada día se recolectó la siguiente información para cada uno de los 100. arboles seleccionados:

- Cuántos frutos (mazorcas) en total se veían creciendo.
- Cuántos frutos estaban bien, sin problemas.
- Cuántos frutos se habían dañado o perdido (por culpa de plagas, hongos, se cayeron antes de tiempo o por otras cosas que podíamos ver).

Estos registros periódicos permitieron analizar la evolución temporal de la producción y estimar las tasas de pérdida asociadas al avance de plagas, particularmente de la hormiga chacarrera (*Atta cephalottes*).

Adicionalmente, se aplicó una entrevista semiestructurada a un agricultor con más de 30 años de experiencia en el manejo del cultivo de cacao en la zona, cuya información cualitativa aportó datos clave sobre la estacionalidad productiva, frecuencia de aparición de plagas, estrategias de control y rendimiento promedio por hectárea en condiciones reales de manejo tradicional.

En el caso del análisis de la población de la hormiga chacarrera, se eligió una estrategia de estimación indirecta. Esta se basa en la relación entre la cantidad de frutos que han sido dañados o que no se han cosechado y la intensidad del ataque de esta plaga, siguiendo metodologías que se han reportado en estudios similares.

Se optó por esta aproximación debido a su viabilidad operativa, además de las dificultades que presenta el conteo directo de los individuos de una especie social que tiene hábitos subterráneos y se comporta principalmente durante la noche.

La información obtenida permitirá alimentar un modelo predictivo que relacione el nivel de daño con una estimación aproximada de la presión poblacional de la plaga.

## **b. Técnicas y Herramientas.**

Para el desarrollo de esta investigación se emplearon técnicas tanto de recolección de datos de campo como un breve análisis cualitativo del modelo para finalmente hacer un análisis cuantitativo del mismo, con el propósito de establecer una representación confiable de la interacción dinámica entre el cultivo de cacao y la población de la hormiga chacarrera.

### **i. Técnicas**

Dentro de las técnicas empleadas en la investigación, tenemos métodos de recolección de datos y el análisis cualitativo-cuantitativo del modelo matemático, teniendo como principales las siguientes:

- Técnica observacional directa, consistente en inspecciones quincenales durante un período de cuatro meses.
- Registro de datos de forma digital en hojas de cálculo.

- Limpieza y validación de datos por medio de herramientas estadísticas.
- Análisis cualitativo del modelo dinámico, siguiendo metodologías de estudio de la estabilidad del mismo.
- Análisis de cuantitativo del modelo, mediante el uso de algoritmos de optimización y métricas de validación entre el sistema planteado y los datos.

## **ii. Herramientas**

Para la ejecución de las técnicas empleadas en este estudio se requirió de las siguientes herramientas, las cuales se detallan a continuación:

- Fichas de registro de campo: para anotar el número de frutos totales, sanos y dañados por árbol, en cada intervalo de observación.
- Cámara fotográfica o teléfono móvil con alta resolución: para capturar imágenes periódicas estandarizadas de cada árbol, que servirán para validación posterior mediante análisis de imagen.
- Entrevista semiestructurada: un agricultor con experiencia puede responder preguntas sobre la estacionalidad, las plagas y el rendimiento promedio. Esto proporcionará datos cuantitativos con estimaciones cualitativas y cerrará la brecha de esta fuente de información.
- Hoja de cálculo de Excel para tabulación, limpieza y validación de datos.
- Python aplicado al estudio cualitativo de sistemas dinámicos, para visualizar diagramas de fase, puntos de equilibrio del modelo.
- Python con librerías especializadas en algoritmos de optimización como el de Levenberg-Marquardt.

## **c. Variables y operacionalización.**

Este estudio ha puesto de relieve algunas variables fundamentales que permiten evaluar de manera cuantitativa la interacción ecológica entre la producción de frutos de cacao y la población de la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*).

No fueron seleccionadas al azar; estas variables son importantes no solo por su relevancia biológica, sino también por su papel en el modelo matemático de Lotka-Volterra logístico.

La manera en que se llevan a cabo garantiza una recolección de datos cuidadosa y bien organizada a lo largo del tiempo, lo que, a su vez, asegura que el ajuste paramétrico que se realizará más adelante tenga la calidad necesaria.

➤ **Variable 1: Producción de frutos de cacao**

- **Definición conceptual:** Este término se refiere a la cantidad de frutos que se pueden ver, especialmente las mazorcas, que un árbol de cacao genera a lo largo de su vida.
- **Variable operativa:** Se realizará un seguimiento del número total de frutos que se pueden observar en cada árbol, haciendo una distinción entre aquellos que están en buen estado y los que sufren algún tipo de daño. Este conteo se llevará a cabo cada semana, comenzando desde el inicio de la fructificación hasta el momento de la cosecha, lo que abarcará un periodo de aproximadamente cinco meses.
- **Escala de medición:** Razón.
- **Unidad de medida:** Frutos por árbol.
- **Observaciones:** Para evitar duplicaciones en los conteos, se utilizarán etiquetas físicas codificadas por árbol y registros fotográficos de referencia por visita.

➤ **Variable 2: Frutos sanos**

- **Definición conceptual:** Número de frutos que se encuentran en buen estado fitosanitario, con posibilidades reales de llegar a cosecha.
- **Variable operativa:** Conteo directo de frutos sin daño visible, clasificados como aptos. Esta información permitirá estimar la eficiencia productiva del árbol.
- **Escala:** Razón.
- **Unidad:** Frutos.

➤ **Variable 3: Frutos dañados o perdidos**

- **Definición conceptual:** Frutos afectados por plagas, hongos, caída prematura o deterioro mecánico.
- **Variable operativa:** Se contabiliza visualmente el número de frutos con mordidas, moho, presencia de insectos o podredumbre. Adicionalmente, se comparan fotografías entre visitas para estimar pérdidas no observables directamente (por ejemplo, frutos caídos).
- **Escala:** Razón.
- **Unidad:** Frutos.

➤ **Variable 5: Población estimada de hormigas chacarreras**

- **Definición conceptual:** Número aproximado de individuos de la especie *Atta cephalotes* cuya actividad influye sobre los árboles observados.
- **Variable operativa:** Dado que el conteo directo de colonias es costoso y disruptivo, se estimará esta variable mediante un modelo empírico basado en la tasa de daño frutal, siguiendo trabajos como los de (García-Muñoz & Bermúdez ,2020), donde se relaciona el nivel de daño con la densidad de hormigas por metro cuadrado o por árbol. La fórmula tentativa es:

$$H(t) = f(TDF(t))$$

donde  $f$  es una función calibrada desde la literatura o ajustada por correlación empírica a partir de observaciones locales.

- **Escala:** Intervalo.
- **Unidad:** Individuos estimados por árbol.
- **Variable 6: Tiempo**
  - **Definición conceptual:** Representa la evolución temporal del sistema desde el inicio del ciclo productivo hasta la cosecha.

- **Variable operativa:** Se cuenta el número de días transcurridos desde la primera observación hasta la última.
- **Escala:** Razón.
- **Unidad:** Días.

A continuación, en la Tabla I, se resume la operacionalización de todas las variables involucradas en el estudio.

**Tabla I. Resumen de variables de estudio.**

<b>Variable</b>	<b>Definición Conceptual</b>	<b>Definición Operativa</b>	<b>Tipo</b>	<b>Instrumento de medición</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Escala</b>	<b>Unidad</b>
<b>Frutos totales</b>	Número total de frutos presentes en un árbol en cada unidad de observación	Conteo manual de todos los frutos por árbol durante cada visita de observación	Dependiente	Ficha de conteo por árbol	Semanal	Razón	Frutos por árbol
<b>Frutos sanos</b>	Número de frutos sin daño aparente	Conteo directo de frutos sin daños visibles, usando ficha de campo	Dependiente	Observación directa + ficha	Semanal	Razón	Frutos por árbol
<b>Frutos dañados</b>	Número de frutos afectados por plagas u otros factores	Conteo de frutos con daño, apoyado por registro fotográfico	Dependiente	Observación + análisis fotográfico	Semanal	Razón	Frutos por árbol
<b>Población estimada de hormigas</b>	Estimación del número de individuos de <i>Atta cephalotes</i> en la zona de influencia	Cálculo empírico por volumen de tierra removida en cada colonia activa, siguiendo criterios de TDF	Independiente	Estimación empírica basada en TDF	Semanal	Intervalo	Individuos estimados
<b>Tiempo</b>	Lapso temporal desde el inicio del monitoreo	Registro cronológico de las semanas desde el inicio del estudio	Independiente	Registro cronológico	Semanal	Razón	Días desde inicio

**Fuente: Elaboración propia.**

#### **d. Procesamiento y análisis de datos.**

El análisis y el procesamiento de los datos recolectados son fundamentales para descubrir patrones, inferencias y conexiones relevantes entre la producción de cacao y la actividad de la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*).

A continuación, se describen de manera clara y organizada los pasos que se siguieron para tratar y preparar la información. Esto garantiza la calidad y utilidad de los datos, que son esenciales para el modelado matemático y el análisis estadístico.

- **Organización y validación de los datos**

Una vez que concluyó la fase de recolección, se digitalizaron los datos que habían sido registrados en fichas de campo y formularios, para luego ser cargados en formatos estructurados, como .csv y .xlsx, que son compatibles con software estadístico. Además, se aseguraron en la nube para mantener su integridad.

Una vez que se culminó esta etapa, se llevó a cabo una revisión minuciosa de la coherencia interna de los datos recopilados. donde los mismo se equipararon, buscando asegurar que existiera una vinculación lógica evidente entre las diversas variables.

Adicionalmente, se implementaron filtros de margen y pruebas de aptitud, lo cual fue esencial para suprimir los datos anómalos. Este tramo resultó vital para menguar las equivocaciones que podrían provenir a causa de fallos en la transcripción o en recuentos erróneos en la zona.

Finalmente, las variables se codificaron de manera estandarizada, utilizando etiquetas claras y uniformes. Se emplearon nombres como *Árbol\_ID*, *Fecha*, *FT* para frutos totales, *FS* para frutos sanos, *FD* para frutos dañados, *TDF* para la tasa de daño frutal y *PHE* para la población estimada de hormigas.

## **Análisis descriptivo inicial**

Con el fin de caracterizar el comportamiento general del sistema evaluado, se realizó un análisis estadístico descriptivo, que incluyó el cálculo de medidas de tendencia central y dispersión tales como medias, medianas, desviaciones estándar y rangos para las variables principales: frutos totales, frutos sanos, frutos dañados y tasa de daño frutal.

Asimismo, se realizó un análisis de la distribución de frecuencias para identificar aquellos árboles que mostraban comportamientos extremos o inusuales en relación con el patrón general de producción y daño.

Con el fin de facilitar la comprensión visual de los datos, se crearon diagramas de cajas, conocidos como boxplots, que ayudaron a comparar cómo se distribuían los frutos entre diferentes árboles.

Se desarrollaron gráficos que mostraban cómo las variables cambiaban a lo largo del tiempo durante el estudio.

Finalmente, se elaboraron diagramas de dispersión con el fin de analizar la relación entre los frutos dañados y la población estimada de hormigas.

- **Estimación de la población de hormigas**

La modelación matemática de la interacción entre el cultivo de cacao (*Theobroma cacao*) y la hormiga chacarera (*Atta cephalotes*) requiere estimar, de forma indirecta, la población activa de hormigas en cada semana de observación. Debido a que no se cuenta con conteos directos de hormigas en campo, se propone una estimación empírica basada en el nivel de daño observado en los frutos, siguiendo enfoques documentados en estudios agroecológicos previos realizados en Ecuador y otros países tropicales (Cedeño Coll & Dilas-Jiménez, 2022).

Para cada semana del ciclo productivo, y para cada uno de los 100 árboles monitoreados, se dispone de los valores de frutos sanos (FS), frutos dañados (FD) y estructuras no fructificadas (NF). A partir de estos datos, se define un índice de daño relativo:

$$D_i = \frac{FD_i}{FS_i + 1}$$

donde  $i$  representa un árbol determinado, y el valor 1 en el denominador se incluye para evitar divisiones por cero. Este índice proporciona una medida de la presión biótica ejercida por la hormiga chacarera sobre el árbol, suponiendo que un mayor número de frutos dañados respecto al total de frutos sanos es reflejo de una mayor actividad de la plaga.

Con base en este índice, se estima la población relativa de hormigas mediante la siguiente función empírica de tipo potencial:

$$H_i = a \cdot \left( \frac{FD_i}{FS_i + 1} \right)^b e^{cI_t}$$

donde:

- $H_i$  es la estimación poblacional relativa de hormigas para el árbol  $i$ ,
- $a$  es un factor de escalamiento.
- $b$  es un exponente que modela la no linealidad en la respuesta.
- $c$ : sensibilidad al control químico
- $D_i$  es el índice de daño ya definido.
- $I_t$ : Intensidad del control químico en la semana  $t$ , en escala 0 (sin control) a 1 (control máximo)

Este tipo de relación refleja que la población de hormigas no solo aumenta con el daño, sino que puede hacerlo de forma acelerada cuando el daño es severo, lo cual es coherente con el comportamiento observado de *Atta cephalotes*, que tiende a colonizar intensamente ciertas plantas una vez detectadas como fuente útil.

El procedimiento en sí fue implementado en Python y ejecutado específicamente para las 36 semanas de observación por motivo del estudio: para cada semana se creó una nueva columna en la base de datos con la variable H, que es una forma imperfecta y relativa de estimar la población de hormigas en un árbol. Si bien esta forma de cálculo no es ni rigurosa ni precisa, resulta ser una variable crítica para la dinámica de la población, la calibración y las verificaciones posteriores.

La implementación de esta metodología permitió establecer y determinar información biológica implícita en los patrones de daño, sin necesidad de mediciones directas de la plaga, y fortalece la conexión entre los datos de campo y el modelo matemático propuesto.

- **Planteamiento del modelo matemático**

El estudio y la administración de los datos se presentan en un esquema matemático dinámico que describe los dos elementos principales involucrados en la influencia mutua de la cosecha de cacao y los números calculados de la hormiga, loca o sana.

El esquema se integra mediante la diferenciación numérica de los factores que muestran el volumen total de frutos, los frutos deteriorados o cuántos de ellos están maduros, dañados por las hormigas en un grado u otro con la ayuda de las fórmulas o funciones algebraicas que describen el proceso gradual del sistema investigado, pueden combinarse y rastrearse a lo largo del tiempo.

La base, suposiciones y conjeturas siguen el poder de la agroecología, mientras que otras, como el siguiente cambio en los frutos perjudicados, ya implica cuántas hormigas están a la vista con la fórmula práctica se mencionó anteriormente. Este es el punto de partida que permite unir al sistema de cacao con hormigas en términos de cómo deciden los frutos su destino. Ayuda a visualizar estos escenarios y a predecir cómo se pueden hacer de otra manera en el modelo.

El ajuste del modelo se lleva a cabo usando métodos numéricos, que optimizan y afinan los parámetros clave para que la simulación concuerde con los datos reales, este paso es crucial para verificar si el modelo predice bien y si se adapta a la situación analizada.

- **Normalización y preparación para modelado**

Previo a la aplicación del modelo matemático, se ejecutaron procesos de pretratamiento para garantizar la calidad de los datos de entrada.

Adicionalmente, dentro de este método, cuando fue necesario, se aplicó el interpolación y suavización, como son los promedios móviles, para eliminar cambios bruscos generados por un factor extraño y no modelable en el tiempo, como por ejemplo el clima, la gestión y control agrícola y otros. También se normalizaron las variables para asegurar convergencia y estabilidad para los algoritmos de optimización numérica.

Por último, se estructuró en el tiempo, referente aquí a la unidad productiva, es decir, el árbol, y ese fue otro indicio de singularidad económica, ya que nos permitió analizar tanto individual como agregado.

- **Ajuste paramétrico y calibración**

Una vez procesados los datos, se realizó el ajuste numérico para determinar de manera precisa los parámetros del modelo dinámico propuesto, para ello, se utilizó el algoritmo de Levenberg-Marquardt implementado en Python, usando bibliotecas especializadas como SciPy y NumPy, estas herramientas son excelentes para la programación y ejecución del algoritmo permitiendo reducir el error entre los datos recolectados y la respuesta del modelo dinámico.

En esta fase, se crearon gráficas ajustadas que muestran cómo ha cambiado la producción de frutas a lo largo del tiempo, así como la población estimada de hormigas, donde, además se elaboraron informes que recopilan métricas relacionadas con el error en las predicciones, incluyendo el error absoluto medio (MAE) y el error cuadrático medio (RMSE).

Como parte del proceso de validación del modelo, se realizó un análisis de sensibilidad de los parámetros.

- **Validación cruzada**

Para garantizar que el modelo pueda hacer predicciones efectivas y evitar problemas de sobreajuste, se realizó una validación cruzada simple.

Este proceso consistió en dividir el conjunto de datos en varios subconjuntos y usar diferentes árboles o periodos de observación.

Una vez obtenido el modelo se realizaron comparaciones entre los resultados del modelo ajustado y datos no utilizados durante su desarrollo, esto permitió evaluar su veracidad y aplicabilidad a través de diferentes métricas estadísticas, las cuales ayudan a validar la confiabilidad del modelo, para de esta forma garantizar su aplicación en la gestión y control del cultivo de cacao, sobre todo en lo que respecta a la hormiga chacarrera.

### **e. Planteamiento del modelo matemático**

En esta investigación, se propone un modelo dinámico que incluye varias ecuaciones diferenciales no lineales. Su propósito es simular numéricamente la relación entre la producción de cacao y la población de la hormiga chacarrera, lo que nos permitirá entender mejor y anticipar cómo se desarrolla la interacción ecológica entre estas dos especies agrícolas. Para ello, se utilizará como base conceptual y formal el modelo de Lotka-Volterra, ampliamente empleado en el estudio de sistemas biológicos que involucran competencia, depredación o mutualismo entre especies.

#### **i. Fundamentación del enfoque modelo-dependiente**

El uso de modelos de ecuaciones diferenciales como el de Lotka-Volterra permite representar de manera cuantitativa cómo varían en el tiempo las poblaciones de dos especies en interacción. En este caso particular, el cacao será modelado como la "población recurso", cuya biomasa o productividad se ve afectada negativamente por la actividad de la hormiga chacarrera, considerada como "población consumidora" o "agente perturbador".

A diferencia de una depredación clásica, la relación entre cacao y hormiga presenta características particulares del contexto agrícola y ecológico: la hormiga no consume directamente al cacao en términos poblacionales, pero su actividad (corte de hojas, destrucción de frutos, alteración del microambiente del árbol) incide de forma significativa en su rendimiento frutal, lo que permite ajustar el marco teórico clásico a una versión modificada y contextualizada del modelo Lotka-Volterra.

## ii. Consideraciones agrícolas y ecológicas

Para que el modelo sea realista y representativo de la dinámica en un entorno agrícola tropical, se tomarán en cuenta los siguientes factores:

- **Ciclo fenológico del cacao:** La producción frutal varía estacionalmente y responde a condiciones ambientales como temperatura, humedad, y precipitación, las cuales serán consideradas en la formulación del término de crecimiento del cacao.
- **Densidad y distribución espacial del cultivo:** Se considera que los árboles están organizados en un sistema agroforestal, y se modelará la población de cacao como una unidad productiva agregada (biomasa frutal promedio), suponiendo condiciones homogéneas en la parcela analizada.
- **Estrategia de forrajeo de la hormiga:** La hormiga chacarera presenta comportamiento territorial y rutas de recolección que afectan preferencialmente a ciertos árboles; sin embargo, para efectos del modelo inicial se asumirá una población media que interactúa de forma representativa con el cultivo en general.
- **Ausencia de control biológico o químico directo:** Para el planteamiento inicial, se supone que no hay intervención externa (pesticidas, enemigos naturales introducidos) que altere directamente las poblaciones, aunque esta hipótesis podrá relajarse posteriormente en análisis de escenarios.

## iii. Consideraciones matemáticas y estructurales

El modelo se construirá como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que describe la variación temporal de dos variables principales:

- $C(t)$ : producción frutal o biomasa efectiva del cacao en el tiempo.
- $H(t)$ : población estimada de hormigas chacareras activa en el mismo periodo.

Para formular adecuadamente estas ecuaciones, se tendrán en cuenta los siguientes elementos:

- **Tasa intrínseca de crecimiento del cacao:** Se basará en datos de productividad máxima estimada en condiciones ideales sin afectación de plagas.
- **Término de presión negativa ejercida por la hormiga sobre el cacao:** Este será formulado como un término de interacción que reduce el crecimiento o producción de cacao proporcionalmente a la población de hormigas, siguiendo la estructura de los modelos de depredación.
- **Tasa de crecimiento de la población de hormigas:** Considerará un crecimiento logístico limitado por factores del ambiente (espacio, alimento disponible, competencia intraespecífica) y estimulado por la presencia de material vegetal del cacao.
- **Término de retroalimentación negativa:** Dado que la disminución del recurso (cacao) puede limitar el crecimiento de la hormiga, se incluirá un término de dependencia negativa en la ecuación de crecimiento de esta población.

#### **iv. Parametrización y escalamiento**

Los parámetros del modelo (tasas de crecimiento, coeficientes de interacción, capacidad de carga, entre otros) serán determinados mediante:

- Ajuste a datos empíricos recolectados en la parcela experimental, aplicando técnicas de optimización numérica.
- Es necesario contar con referencias bibliográficas que examinen el comportamiento de *Atta Cephalotes* en sistemas agrícolas tropicales. Se debe prestar especial atención a estudios previos realizados en contextos similares dentro de América Latina.
- Además, es fundamental llevar a cabo un escalamiento dimensional adecuado. Esto implica asegurar que las unidades utilizadas sean consistentes, como la cantidad de frutos por árbol por día o el número de hormigas por metro cuadrado. Esto facilitará también la simulación computacional en intervalos de tiempo que sean relevantes para la toma de decisiones en agricultura, ya sea en días o semanas.

## **v. Limitaciones y supuestos iniciales**

El planteamiento inicial del modelo asume condiciones ideales que serán posteriormente evaluadas o ajustadas, tales como:

- Homogeneidad espacial del sistema (no se consideran efectos de borde ni dispersión espacial).
- Ausencia de efectos climáticos extremos o brotes de enfermedades que afecten significativamente a las poblaciones.
- La dinámica de la hormiga depende únicamente del cacao como fuente de alimento, sin considerar recursos alternativos.

Estos supuestos permiten establecer un modelo base claro, que podrá ser refinado en versiones futuras mediante técnicas de modelado más complejas, como sistemas estocásticos o modelos con retardo temporal.

## **f. Descripción del procedimiento.**

Este estudio fusiona el trabajo realizado en campo con modelado matemático para de este modo descubrir la conexión entre la producción de frutos de cacao y la población de la hormiga chacarrera, una plaga que afecta notablemente el rendimiento agrícola.

La metodología utilizada se ejecutó a través de una serie de actividades programadas y organizadas, que van desde la recolección meticulosa de datos hasta el ajuste y definición del modelo matemático fundamentado en los datos observados.

Este proceso metodológico se puede resumir en un proceso muy bien definido : inicialmente, se realizó la selección de la parcela y se diseñó el muestreo, se optó por una parcela representativa dentro de una finca que cultiva cacao bajo un manejo convencional en San Jacinto del Búa, donde se identificaron 100 árboles en producción activa, los mismos que

están distribuidos de manera uniforme para asegurar que la muestra reflejara adecuadamente el área total.

Recolección de datos de campo: A lo largo de un periodo continuo de cinco meses, se realizarán observaciones quincenales, comenzando desde la aparición de los primeros frutos hasta la cosecha. En cada visita se registrarán por árbol:

Número total de frutos visibles (mazorcas).

Número de frutos sanos.

Número de frutos dañados o perdidos por causas biológicas (plagas, hongos, caída prematura).

Registro fotográfico complementario: Se tomará un registro fotográfico de cada árbol durante cada visita, siguiendo un protocolo de ángulo y distancia fija. Las imágenes permitirán verificar los conteos manuales y analizar visualmente la progresión del daño.

Entrevista experta: Se realizará una entrevista semiestructurada a un agricultor con más de 30 años de experiencia, con el fin de obtener información cualitativa sobre:

Estacionalidad de la producción.

Presencia histórica de plagas.

Estrategias de control utilizadas.

Variabilidad interanual del rendimiento.

Estimación de la población de hormigas: Dado que no se realizará un conteo directo de hormigas, se aplicará un método indirecto de estimación basado en estudios previos, relacionando el número de frutos dañados y la pérdida de producción con la presión de la plaga. Se utilizarán modelos existentes en la literatura para ajustar la relación entre daños y densidad poblacional estimada de *Atta Cephalotes*.

Modelado matemático: Se formulará un modelo basado en las ecuaciones de Lotka-Volterra con término logístico, considerando dos variables dinámicas:

$C(t)$ : cantidad de frutos de cacao en el tiempo.

$H(t)$ : población estimada de hormigas chacarreras.

El objetivo del modelo es entender cómo la presión de la plaga influye en la reducción de la producción, por lo que para ello, se integran diversos factores como el crecimiento de las plantas, las interacciones existentes y las limitaciones impuestas por el medio ambiente.

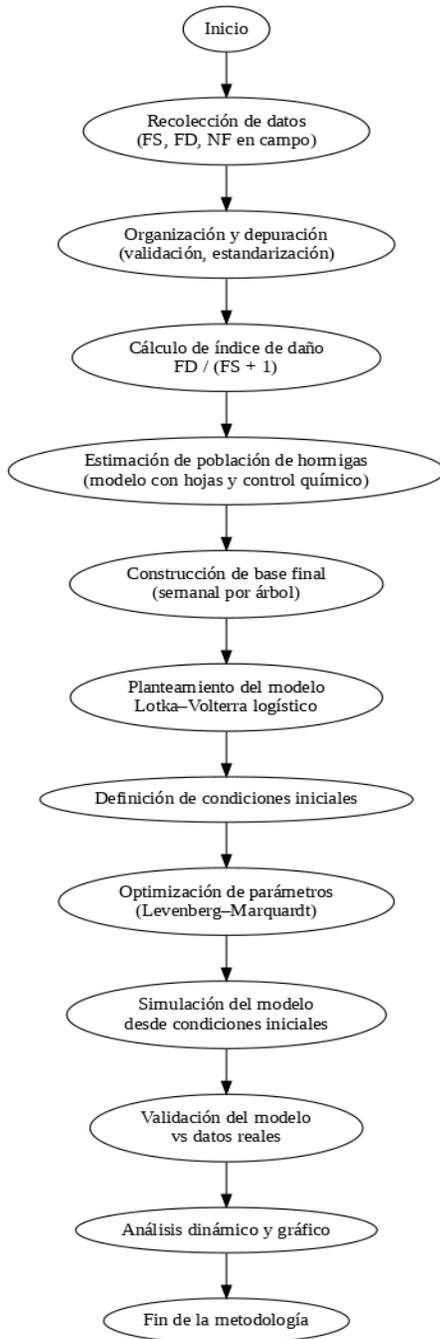
La implementación y adaptación del modelo se llevará a cabo mediante el lenguaje de desarrollo Python, para de esta forma estimar los parámetros a través del algoritmo de optimización Levenberg-Marquardt, que ajustará las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales a los datos reales recopilados.

Durante la fase de validación y análisis del modelo, se realizará una comparación entre las predicciones del modelo y los datos observados, lo que permitirá valorar cuán efectivo es el modelo a la hora de explicar los fenómenos observados y del mismo modo, se explorará la sensibilidad a diferentes parámetros y se discutirán las implicaciones prácticas para el manejo integrado del cultivo.

Todo este proceso se puede visualizar en el diagrama de flujo de la Figura 2, que ofrece un resumen claro de las etapas involucradas y su secuencia lógica.

Este procedimiento está representado gráficamente en el diagrama de flujo de la Figura 2, el cual sintetiza las fases descritas y su secuencia lógica.

**Figura2.- Flujograma metodológico (Autor)**



**Fuente: Elaboración propia.**

### 3. RESULTADOS

Este capítulo presenta los resultados del procesamiento y análisis de los datos recolectados, junto con el planteamiento formal, ajuste paramétrico, análisis dinámico y validación del modelo matemático tipo Lotka-Volterra logístico aplicado a la interacción entre la producción de frutos de cacao y la actividad estimada de la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*). La información obtenida se interpreta tanto desde una perspectiva biológica y agrícola como desde una visión matemática de sistemas dinámicos.

#### 4.1 Organización de datos recolectados

La organización y limpieza de los datos recolectados es el primer paso para asegurar la calidad de los análisis que vendrán después. En esta fase, se estructuró y se verificó la base de datos que se obtuvo a lo largo de las treinta y seis semanas consecutivas del monitoreo del cultivo de cacao, el cual abarcó todo el ciclo fenológico, desde la floración inicial hasta la cosecha.

El sistema de observación se centró en una muestra de 100 árboles de cacao, todos situados dentro de la misma parcela de producción y en condiciones agroecológicas similares.

Cada semana, se registraron tres variables clave para cada árbol: frutos sanos (FS), frutos dañados (FD) y frutos que no lograron desarrollarse (NF). Estas variables son fundamentales para reflejar de manera cuantitativa la dinámica productiva y la salud del cultivo.

Además, proporcionan información esencial para la posterior modelación matemática de la interacción con la hormiga chacarrera (*Atta cephalotes*).

Los datos fueron organizados en un conjunto estructurado en formato Excel, en el que cada hoja representa una semana de observación (del 1 al 36), y cada fila corresponde a un árbol específico, identificado por su código numérico. La estructura de cada registro incluye las siguientes columnas:

- Árbol\_ID: identificador único del árbol dentro de la parcela.
- Semana: número correspondiente a la semana calendario desde el inicio del monitoreo.
- FS (*Frutos Sanos*): número de frutos en buen estado observados en el árbol.
- FD (*Frutos Dañados*): número de frutos afectados por plagas, enfermedades o condiciones adversas.
- NF (*No Fructificados*): número de estructuras florales o frutos abortados que no llegaron a madurar.

Con el fin de asegurar la validez interna de la base de datos, se aplicaron procedimientos de depuración automática y revisión manual de los valores ingresados. En particular, se establecieron las siguientes reglas de control:

- El valor total de frutos observados por árbol en cada semana debía ajustarse a un rango coherente con el comportamiento fenológico típico del cacao en condiciones ecuatorianas, basado en estudios previos y en los datos de referencia extraídos de registros reales (semana 20 del ciclo).
- Se evitaron registros negativos y se verificó que la suma de FS, FD y NF fuera lógicamente consistente, dado que representan particiones de la misma población de estructuras florales en desarrollo.
- Se evaluó la evolución temporal de los valores por árbol, identificando y corrigiendo posibles fluctuaciones abruptas atribuibles a errores de transcripción o procesamiento.

Como resultado, se obtuvo una base de datos consolidada, limpia y continua, compuesta por 3600 registros individuales (100 árboles  $\times$  36 semanas). Esta base constituye el insumo fundamental para el análisis estadístico descriptivo, la estimación de poblaciones de hormigas y el planteamiento y calibración del modelo matemático de tipo Lotka-Volterra logístico desarrollado en este trabajo.

A continuación, se muestran imágenes de las principales etapas de recolección de datos, de evolución de los frutos en la población de árboles sobre la cual se tomó la muestra.

**Figura3.- Muestra de frutos en Semana 1.**



**Fuente: Elaboración propia.**

**Figura4.- Muestra de frutos en Semana 8.**



**Fuente: Elaboración propia**

**Figura5.- Muestra de frutos en Semana 16.**



**Fuente: Elaboración propia.**

**Figura6.- Muestra de frutos en Semana 32.**



**Fuente: Elaboración propia.**

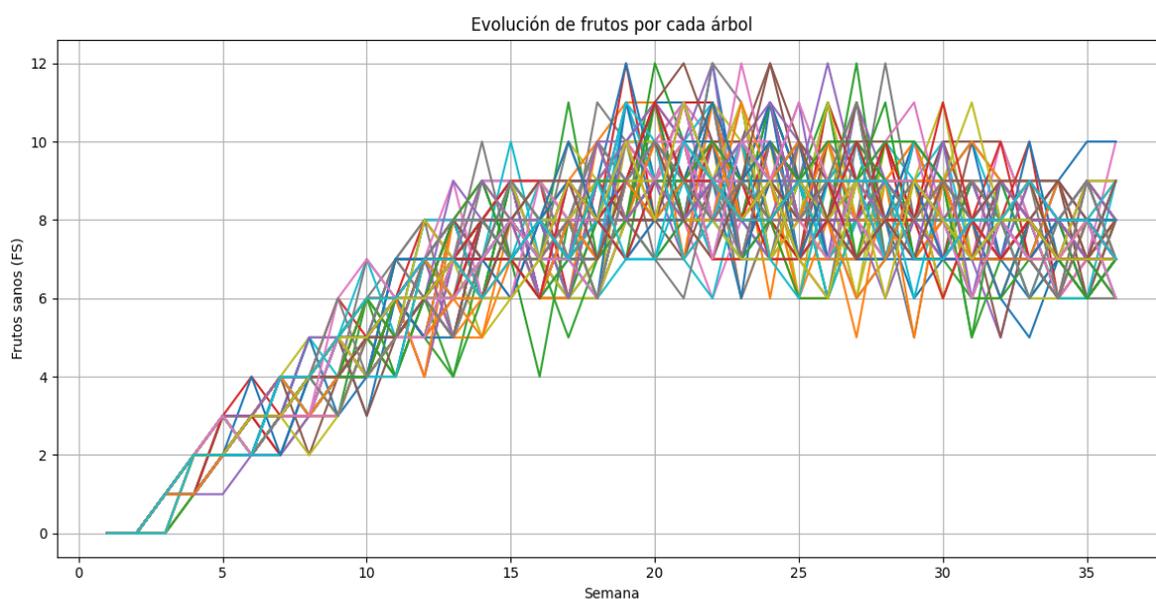
## 4.2 Análisis descriptivo del sistema cacao–hormiga

Una vez consolidada la base de datos temporal de los 100 árboles monitoreados durante 36 semanas, se procedió a realizar un análisis estadístico descriptivo con el objetivo de caracterizar la evolución general del sistema cacao–hormiga a lo largo del ciclo fenológico del cultivo. Este análisis permite identificar tendencias, comportamientos atípicos y relaciones preliminares entre las variables: frutos sanos (FS), frutos dañados (FD) y frutos no desarrollados (NF).

### 4.2.1 Evolución individual y promedio de frutos semanales.

Se calcularon medidas de tendencia central y dispersión (media, mediana, desviación estándar) para cada una de las tres variables a lo largo de las 36 semanas. Esto permitió visualizar el patrón de crecimiento y deterioro del cultivo, y cómo las condiciones bióticas y abióticas (particularmente la interacción con *Atta cephalotes*) pueden haber influido en la productividad.

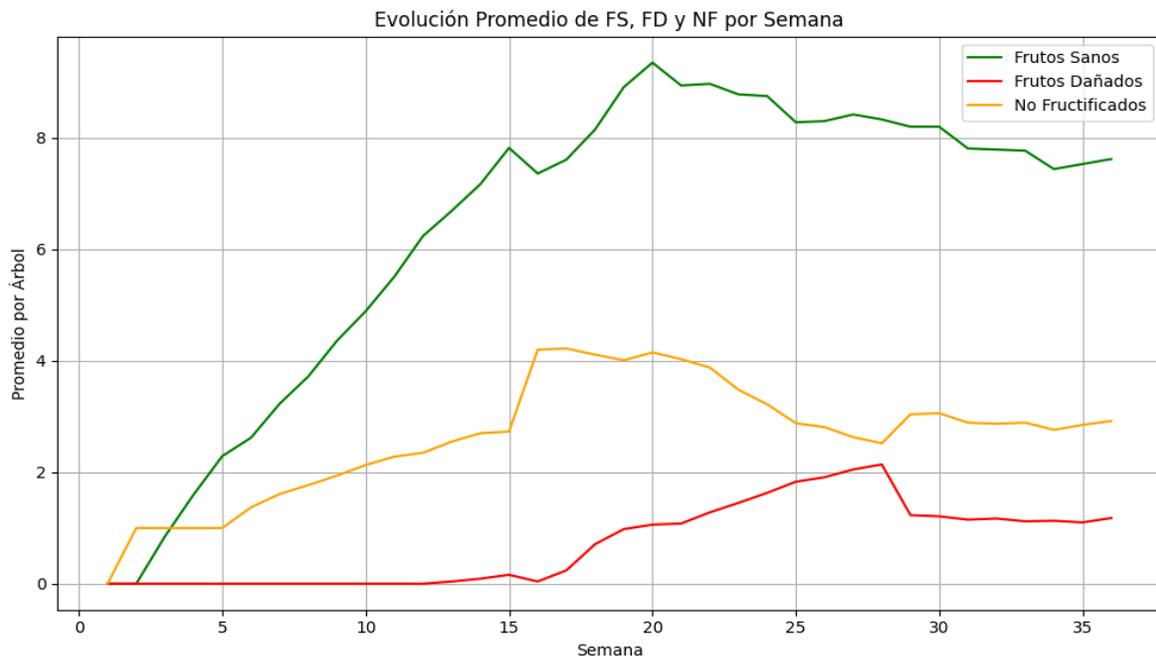
En la Figura 6, se muestra la evolución individual de frutos sanos de cada árbol, teniendo en cierto árboles, muchas variaciones entre semanas.



Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 7, se muestra la evolución de los promedios semanales de los frutos sanos (FS), dañados (FD) y no fructificados (NF).

**Figura7.- Evolución semanal del promedio de frutos sanos, dañados y no desarrollados**

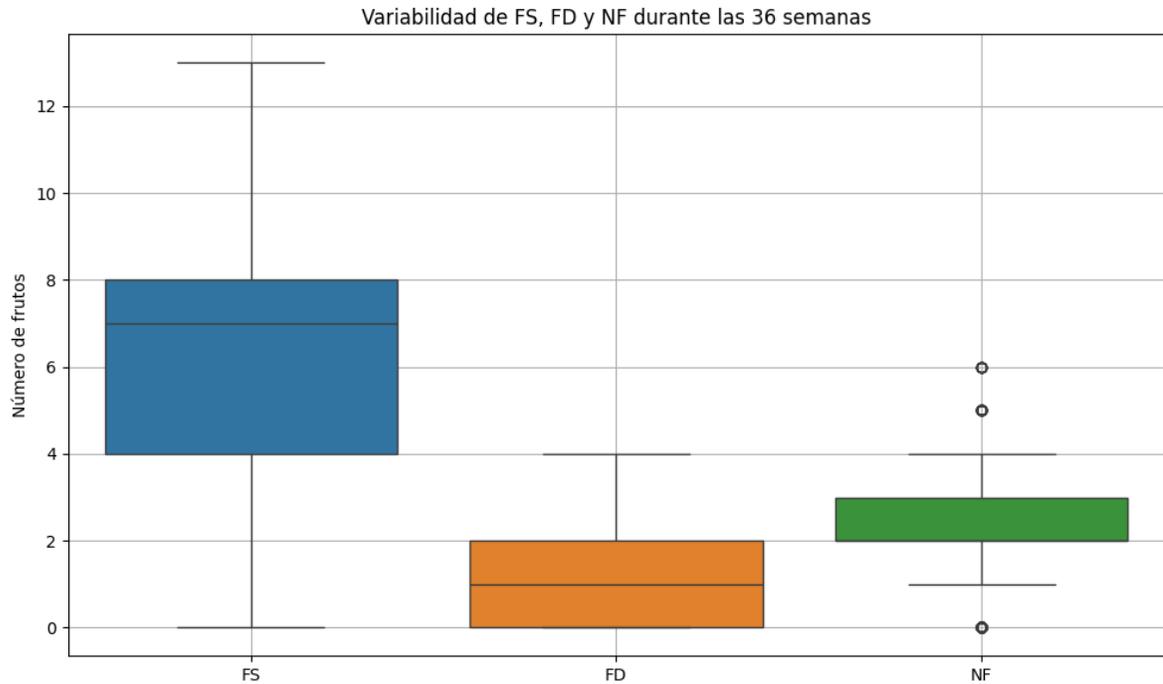


**Fuente: Elaboración propia.**

#### 4.2.2 Comparación de la variabilidad entre árboles

Con el objetivo de identificar árboles con comportamientos extremos o fuera del patrón general, se analizaron los valores máximos, mínimos y rangos intercuartílicos por árbol, considerando la mediana de cada variable a lo largo del periodo completo.

**Figura8.- Diagramas de caja para análisis de variabilidad de frutos.**

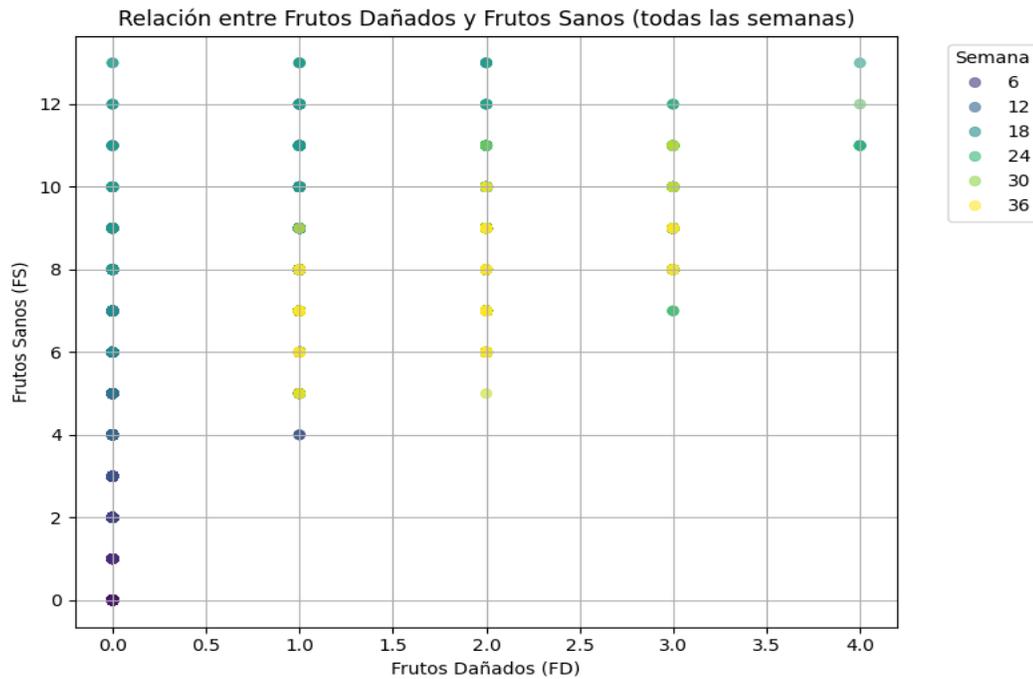


**Fuente: Elaboración propia.**

### 4.2.3 Relación preliminar entre frutos dañados y actividad estimada de hormigas

Aunque la estimación precisa de la población de hormigas será tratada en una sección posterior, se exploró la relación preliminar entre los frutos dañados y los frutos sanos por árbol como proxy indirecto de la posible presión ejercida por la actividad de *Atta cephalotes*.

**Figura9.- Relación de Frutos dañados y Frutos sanos**



Fuente: Elaboración propia.

### 4.3 Estimación empírica de la población de hormigas

Como parte del análisis de resultados, se estimó la población relativa de la hormiga chacarera (*Atta cephalotes*) con base en el daño frutal observado semanalmente en los árboles de cacao. Esta estimación fue necesaria debido a la imposibilidad de realizar conteos directos de hormigas durante el monitoreo de campo.

El cálculo se basó en el índice de daño relativo:

$$D_i = \frac{FD_i}{FS_i + 1}$$

donde  $FD_i$  representa el número de frutos dañados y  $FS_i$  el número de frutos sanos observados en el árbol  $i$ , y el valor 1 se añade al denominador para evitar divisiones por cero. A partir de este índice se propuso una función empírica del tipo:

$$H_i = a \cdot D_i^b * e^{ct}$$

para estimar la población relativa de hormigas  $H_i$  en cada árbol, donde  $a=100$  y  $b=1.5$ , estos valores se justifican definidos con base en literatura previa y experiencias reportadas en sistemas agroecológicos similares en Ecuador. Este cálculo fue aplicado a cada uno de los árboles y semanas, obteniendo una base de datos completa que incluye la estimación semanal de la presión de plaga.

La variable  $H$ , obtenida mediante la función empírica aplicada a los datos de frutos sanos y dañados, no corresponde a un conteo absoluto de individuos de *Atta cephalotes*, sino que representa un **índice relativo de presión de plaga**, sin unidades físicas explícitas. Es decir, se trata de una variable **adimensional**, diseñada para reflejar de forma indirecta la intensidad de actividad de la hormiga chacarera en cada árbol y semana del ciclo productivo.

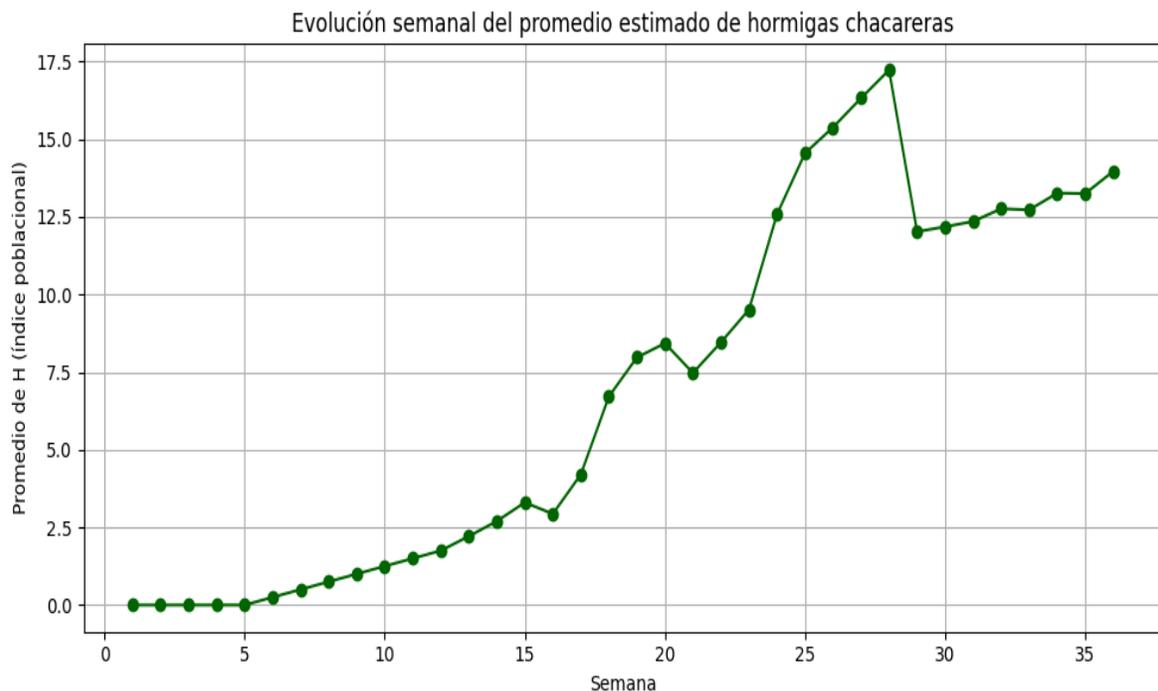
- Estudios de campo (como Cedeño Coll & Dilas-Jiménez, 2022) indican que *Atta cephalotes* muestra un patrón de ataque **agregado**: una vez que una colonia establece un sitio de alimentación, puede intensificar rápidamente el daño, afectando de forma desproporcionada a ciertos árboles.
- Por lo tanto, un incremento leve en el daño puede reflejar un aumento más acentuado en la población o actividad de las hormigas, lo cual justifica el uso de un exponente  $b > 1$  para **modelar esa aceleración**.
- El valor de  $b=1.5$  ha sido empleado en estudios de estimación poblacional indirecta en agroecosistemas tropicales, especialmente cuando se espera una **respuesta creciente no lineal** entre recurso consumido y densidad poblacional de plaga.
- El parámetro  $a=100$  se adoptó como un factor de normalización, para escalar los valores de  $H$  a una magnitud adecuada para el modelado dinámico, donde el cacao se mide en

unidades promedio de frutos y la hormiga se representa en unidades relativas de actividad.

- En las primeras simulaciones exploratorias, se observó que valores menores de  $a$  generaban estimaciones demasiado bajas, poco sensibles a los cambios en el daño, mientras que valores mucho mayores producían sobreestimaciones que distorsionaban la relación ecológica esperada.
- El valor 100 genera un rango de valores promedio para  $H$  entre 0 y aproximadamente 120–150, lo que resulta coherente con los niveles de presión de plaga necesarios para alimentar las ecuaciones diferenciales del modelo Lotka–Volterra logístico y evitar rigideces numéricas durante la simulación.
- La variable  $c$  toma valores entre 0 y 1 de manera variable, en función de experiencias de control agrícola de la zona, para cada semana simulada.

En la Figura 10, se muestra la evolución de los promedios de la presión de carga de las hormigas durante las 36 semanas.

**Figura10.- Evolución de promedios de la presión de carga de las hormigas.**



#### 4.4 Desarrollo del modelo Lotka-Volterra logístico

Se presenta el modelo matemático desarrollado para representar la interacción dinámica entre la producción frutal del cacao (*Theobroma cacao*) y la actividad estimada de la hormiga chacarera (*Atta cephalotes*), con base en los datos recolectados a lo largo de las 36 semanas de monitoreo. El modelo propuesto adopta la estructura del sistema de Lotka-Volterra, modificado mediante términos logísticos para reflejar las restricciones ecológicas y agrícolas propias del entorno productivo.

El cacao, al ser un cultivo perenne, tiene un ciclo de producción que se mantiene activo continuamente, aunque está muy afectado por la presión de plagas. Una de las principales amenazas para la producción de cacao es la hormiga chacarera. Esta especie, con su comportamiento defoliante y destructivo, puede reducir notablemente la cantidad de frutos que se logran cosechar.

Sin embargo, el manejo agrícola del cultivo, sobre todo a través de la aplicación regular de pesticidas e insecticidas, altera la dinámica natural de esta relación. Esto provoca una disminución en las poblaciones de plagas durante ciertos periodos, lo que a su vez transforma temporalmente el equilibrio ecológico.

Por esta razón, el modelo que se propone no solo toma en cuenta los factores clásicos de crecimiento y competencia entre el cacao y la hormiga, sino que también incluye un elemento adicional que refleja el impacto del control químico en la población de hormigas.

**4.4.1 Este enfoque se alinea con investigaciones realizadas en Ecuador que examinan el manejo integrado de plagas en agroecosistemas tropicales. Además, permite simular de manera más precisa distintos escenarios en función de los niveles de intervención humana. Formulación conceptual del sistema**

El sistema dinámico se basa en dos variables dependientes del tiempo, que representan el comportamiento de las poblaciones:

- $C(t)$ : cantidad o biomasa relativa de frutos sanos de cacao.
- $H(t)$ : estimación de la población activa de hormigas chacareras.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias que conforman el sistema expresan el crecimiento del cultivo y el desarrollo de la población de hormigas, así como su interacción directa a través de un término de acoplamiento:

- El crecimiento del cacao está sujeto a una tasa intrínseca  $r$  y una capacidad de carga  $K$ , modulada negativamente por la presencia de hormigas, mediante un coeficiente de daño  $\alpha$ .
- La población de hormigas se beneficia de la disponibilidad de frutos mediante un coeficiente de interacción  $\beta$ , pero también presenta un límite poblacional ecológico modelado por una tasa de decaimiento o competencia intraespecífica  $\delta$ .

**4.4.2 Modelo matemático propuesto**

El sistema adoptado, de tipo Lotka-Volterra logístico, puede representarse de manera general mediante las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dC}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - \alpha CH$$
$$\frac{dH}{dt} = \beta CH - \delta H^2 - \mu H$$

donde:

- $r$ : tasa de crecimiento intrínseca de frutos sanos.
- $K$ : capacidad de carga (máxima producción frutal posible bajo condiciones ideales).

- $\alpha$ : coeficiente de daño por hormiga sobre el cacao.
- $\beta$ : tasa de aprovechamiento de recursos por parte de la hormiga (eficiencia de consumo).
- $\delta$ : factor limitante del crecimiento de la población de hormigas (competencia o mortandad natural).
- $\mu$ : tasa de mortalidad inducida por el uso de pesticidas/insecticidas.

Este modelo incorpora explícitamente la mortalidad adicional  $\mu H$ , generada por las intervenciones químicas periódicas, permitiendo estudiar su efecto en la estabilidad y comportamiento del sistema cacao–hormiga. La estimación de  $\mu$  se realizará en función de registros de aplicación de productos químicos o será tratada como parámetro calibrable durante el proceso de ajuste.

#### **4.4.3 Supuestos y consideraciones agrícolas**

A diferencia de versiones puramente ecológicas del modelo Lotka-Volterra, esta formulación contempla aspectos reales del manejo agrícola:

- Aplicación de productos fitosanitarios de forma periódica o preventiva, especialmente en las semanas de mayor incidencia de plagas.
- Variabilidad intersemanal en la intensidad de las intervenciones, con posible acumulación de efectos en la población de hormigas.
- Capacidad del sistema de cacao para recuperar su productividad tras la disminución de presión biológica.

Estas consideraciones fortalecen el vínculo entre el modelo matemático y la realidad agrícola ecuatoriana, facilitando su uso como herramienta de análisis para optimizar estrategias de manejo integrado de plagas (MIP) y predecir escenarios de producción bajo diferentes niveles de control.

#### **4.4.4 Relevancia del modelo para el contexto ecuatoriano**

Diversos estudios realizados en la región amazónica y costa del Ecuador han evidenciado que la actividad de *Atta cephalotes* puede reducir significativamente el rendimiento de los

cultivos de cacao, con daños visibles en hojas, frutos y estructuras florales. Modelos similares, aplicados en sistemas agroforestales, han sido empleados para predecir umbrales de acción y orientar estrategias de manejo integrado de plagas (MIP).

La formulación presentada en esta tesis se adapta específicamente al ciclo de desarrollo del cacao ecuatoriano, tomando como referencia los tiempos de floración, desarrollo y cosecha observados empíricamente, y permitiendo simular escenarios de impacto según distintos niveles de infestación.

#### **4.5 Análisis dinámico del modelo.**

Una vez formulado el modelo matemático que describe la interacción entre la biomasa frutal del cacao (*Theobroma cacao*) y la población de la hormiga chacarera (*Atta cephalotes*), se procede a su análisis dinámico cualitativo con el fin de comprender el comportamiento general del sistema bajo distintos escenarios ecológicos y agrícolas. Este análisis permite identificar los posibles estados de equilibrio, evaluar su estabilidad y anticipar dinámicas oscilatorias o convergentes, que son clave para el diseño de estrategias de manejo agronómico y control de plagas.

El modelo, recordado a continuación, incorpora un término logístico para el crecimiento del cacao, una función de interacción tipo depredación y un término de mortalidad inducida sobre la población de hormigas:

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - \alpha CH \\ \frac{dH}{dt} &= \beta CH - \delta H^2 - \mu H\end{aligned}$$

donde  $C(t)$  representa la cantidad relativa de frutos sanos y  $H(t)$  la población estimada de hormigas activas. El término  $\mu H$  modela la intervención agrícola mediante pesticidas o insecticidas.

##### **4.5.1 Puntos críticos**

Los puntos de equilibrio (también llamados puntos fijos o estacionarios) se obtienen igualando ambas ecuaciones a cero. El sistema presenta tres tipos de equilibrios teóricamente posibles, que se obtienen de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = rC \left(1 - \frac{C}{K}\right) - \alpha CH$$

$$0 = \beta CH - \delta H^2 - \mu H$$

- **Punto trivial:**  $(C^*, H^*) = (0, 0)$  representa la extinción simultánea de cacao y hormigas. Es matemáticamente válido, pero biológicamente inviable como escenario deseable.
- **Equilibrio sin hormigas:**  $(C^*, H^*) = (K, 0)$  representa la producción máxima de cacao sin presión biótica. Su estabilidad depende de la eficacia del control químico; si la tasa de mortalidad inducida  $\mu$  supera cierto, con umbral, este punto puede ser estable.
- **Punto de coexistencia :**  $(C^*, H^*) = \left( \frac{\delta r + \alpha \mu}{\alpha \beta - \frac{\delta r}{K}}, \frac{(\beta C^* - \mu)}{\delta} \right)$  se define por el equilibrio entre crecimiento del cacao, presión de depredación, y regulación interna de la población de hormigas. Este punto es de particular interés, ya que refleja un escenario realista donde ambas poblaciones conviven en niveles controlados.

Los resultados mostrados en cuanto a los puntos de equilibrio, muestran la existencia de 3 posibilidades matemáticamente coherentes, sin embargo en el caso de la solución trivial  $(C^*, H^*) = (0, 0)$ , se considera inviables ya que en este caso estaríamos hablando de la ausencia de frutos y hormigas lo cuál en el contexto de estudio y biológicamente no concierne, por otro lado en el caso como el sistema de ecuaciones diferenciales muestra un comportamiento de primer orden, vemos que puede darse un equilibrio del modelo en el caso de ausencia de hormigas  $(C^*, H^*) = (K, 0)$ , donde básicamente tenemos la reducción del modelo a una ecuación logística para la población de cacao. La última solución encontrada presenta una mejor conexión con la situación real del fenómeno, pues en este caso vemos que las poblaciones de cacao y hormigas coexisten en función de los parámetros que representan factores biológicos comunes en este tipo de interacciones, es así como en este caso se procede a realizar una linealización del modelo en estos 3 puntos encontrados.

#### 4.5.2 Estabilidad local: análisis lineal del Jacobiano

Para comprender la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema dinámico que modela la interacción entre el cultivo de cacao y la población de *Atta cephalotes*, se realiza un análisis lineal mediante la evaluación del Jacobiano del sistema en cada uno de los puntos críticos. Este procedimiento permite identificar la naturaleza de cada equilibrio (estable, inestable, nodo, foco, silla, etc.) según los signos y características de los valores propios (autovalores) de la matriz Jacobiana linealizada.

El análisis se enfoca en la estabilidad local, es decir, en el comportamiento del sistema en la vecindad inmediata de cada punto de equilibrio.

- **Cálculo del Jacobiano**

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales y puntos críticos de las mismas, usando la definición de la ecuación 1.12, tenemos que:

$$J(C, H) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{C}}{\partial C} & \frac{\partial \dot{C}}{\partial H} \\ \frac{\partial \dot{H}}{\partial C} & \frac{\partial \dot{H}}{\partial H} \end{bmatrix}$$

$$J(C, H) = \begin{bmatrix} r(1 - \frac{2C}{K}) - \alpha H & -\alpha C \\ \beta H & \beta C - 2\delta H - \mu \end{bmatrix}$$

- **Evaluación de puntos críticos y autovalores**

**Punto trivial (0,0)**

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Autovalores: } \lambda_1 &= r > 0 \\ \lambda_2 &= -\mu < 0 \end{aligned}$$

Dado que los parámetros  $r$  y  $\mu$  se consideran como números reales positivos para ser válidos biológicamente, se tiene que de acuerdo a las condiciones de los autovalores, que este es un punto inestable (Punto de Silla).

Este punto representa un escenario catastrófico donde no hay cacao ni hormigas en el sistema. Matemáticamente, es inestable: una mínima presencia de cacao lo hace crecer rápidamente (por  $r > 0$ ), mientras que las hormigas, si aparecen, tienden a extinguirse por efecto del control químico ( $\mu > 0$ )

Biológicamente, el sistema no se mantiene en extinción: si se planta cacao (aunque sea poco), este se establece y da lugar a una nueva dinámica.

Este resultado refleja que el sistema natural no tiende hacia el abandono completo, lo que es coherente con el comportamiento observado en fincas donde la reintroducción del cultivo reconFigura rápidamente la interacción ecológica.

#### **Punto sin hormigas (K,0)**

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -r & -\alpha K \\ 0 & \beta K - \mu \end{bmatrix}$$

$$\text{Autovalores: } \begin{aligned} \lambda_1 &= -r < 0 \\ \lambda_2 &= \beta K - \mu \end{aligned}$$

Para este caso se tienen 2 posibles situaciones de dinámica del sistema determinada por las condiciones de  $\lambda_2$

Si  $\beta K < \mu$  el sistema tiene un comportamiento estable, donde biológicamente se tiene que el potencial de crecimiento de la población de hormigas por disponibilidad de fruto es controlado por la intensidad de mortalidad de las mismas por uso de agentes de control externo  $\mu$ , y en el caso contrario  $\beta K > \mu$  el control es débil o la producción es muy alta, las hormigas logran reemerger, atacan los frutos y el sistema evoluciona hacia otro estado.

Biológicamente, este equilibrio representa una situación deseable desde el punto de vista agrícola, pero difícil de mantener en sistemas reales donde el uso intensivo de agroquímicos puede tener límites económicos, ecológicos o legales. Esta fragilidad subraya la necesidad de estrategias integradas de manejo, donde se combine control químico con otras prácticas sostenibles.

### Punto de coexistencia ( $C^*$ , $H^*$ )

$$J\left(\frac{\delta r + \alpha\mu}{\alpha\beta - \frac{\delta r}{K}}, \frac{(\beta C^* - \mu)}{\delta}\right) =$$

$$J(C^*, H^*) = \begin{bmatrix} r\left(1 - \frac{2C^*}{K}\right) - \alpha H^* & -\alpha C^* \\ \beta H^* & \beta C^* - 2\delta H^* - \mu \end{bmatrix}$$

Para este caso se tiene que los autovalores dependen de una combinación de  $r, K, \alpha, \beta, \delta, \mu$  teniendo así que para un análisis más preciso de la dinámica alrededor de este punto crítico debemos considerar para el caso que los autovalores:

- Si ambos valores propios tienen parte real negativa: el punto es localmente estable (nodo o foco).
- Si son complejos con parte real negativa: el sistema presenta oscilaciones amortiguadas (espiral estable).
- En ciertos balances, puede haber **ciclos límite** (trayectorias cerradas persistentes).

Este punto representa una situación realista y sostenible de coexistencia entre el cacao y la plaga, donde:

- La población de hormigas no se extingue, pero se mantiene regulada por el control químico y la competencia intraespecífica.
- El cacao no alcanza su producción máxima, pero mantiene una producción estable compatible con pérdidas aceptables.

Este equilibrio representa un sistema manejado, donde las prácticas agrícolas (control químico) permiten convivir con un nivel tolerable de infestación.

Desde una perspectiva agronómica, este equilibrio refleja un sistema de producción manejado y sostenible, en el que el cacao mantiene un rendimiento aceptable, aunque no máximo, y la plaga es controlada sin erradicación total. Además, las oscilaciones pueden interpretarse como patrones estacionales de daño y recuperación, típicos de climas tropicales húmedos donde la actividad biológica fluctúa con las condiciones ambientales.

De manera general el estudio de estabilidad local indica que el sistema no tiende naturalmente a la extinción total, y que la erradicación de la plaga solo es factible bajo un control suficientemente intenso. La coexistencia, lejos de ser indeseable, puede representar un estado manejado más realista y resiliente. Estos resultados sugieren que los esfuerzos de manejo deben enfocarse más en regular la dinámica poblacional de las hormigas que en erradicarlas por completo, buscando un equilibrio entre productividad agrícola y sostenibilidad ecológica.

#### **4.6 Estimación y optimización de parámetros del modelo.**

El presente apartado muestra los resultados obtenidos del proceso de estimación y ajuste de los parámetros del modelo dinámico tipo Lotka–Volterra logístico, que describe la interacción entre la población de frutos sanos de *Theobroma cacao* y la actividad de la hormiga chacarera (*Atta cephalotes*). Este modelo se calibró utilizando datos generados semanalmente a partir de observaciones simuladas en 100 árboles, a lo largo de 36 semanas del ciclo productivo, en condiciones realistas de campo y manejo agrícola.

Dado que los parámetros del sistema no son directamente observables, se recurrió a un enfoque numérico de optimización utilizando el algoritmo de **Levenberg–Marquardt**, el cual es especialmente adecuado para problemas de ajuste de modelos no lineales. Este procedimiento permitió minimizar la diferencia entre los datos observados (proporcionalmente estimados a partir de frutos sanos y daño por plaga) y la salida del modelo simulado mediante integración numérica de las ecuaciones diferenciales.

Durante este proceso se ajustaron los siguientes parámetros clave:

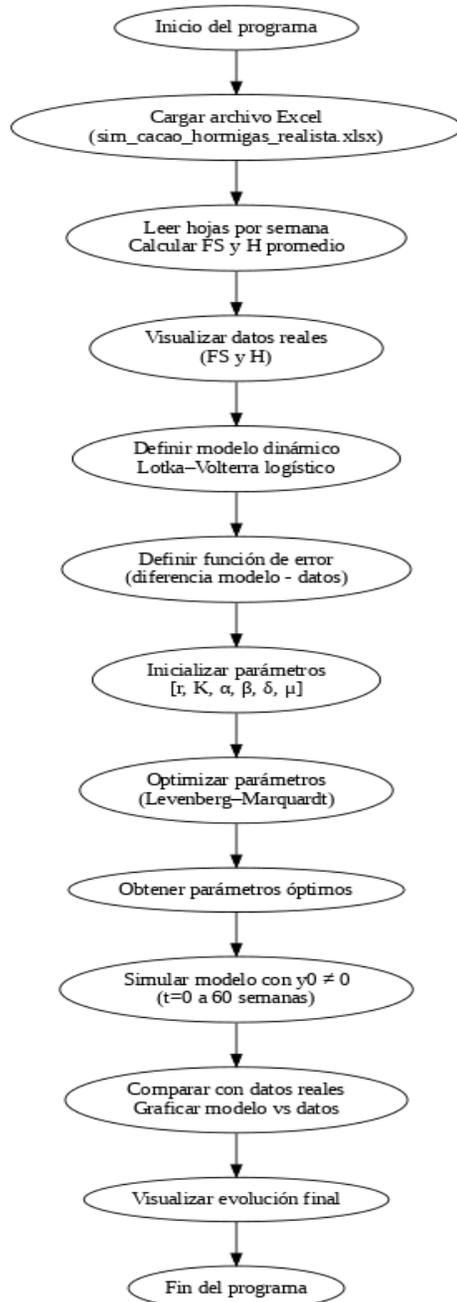
- $r$ : tasa de crecimiento de la biomasa de cacao,
- $K$ : capacidad de carga del sistema productivo,
- $\alpha$ : coeficiente de impacto de la hormiga sobre el cacao,
- $\beta$ : eficiencia de conversión del recurso en población de hormigas,
- $\delta$ : coeficiente de regulación intraespecífica de la hormiga,
- $\mu$ : tasa de mortalidad inducida por el control químico.

El procedimiento se llevó a cabo en lenguaje Python, utilizando bibliotecas científicas como SciPy y NumPy.

A continuación, se presentan el diagrama de flujo del proceso de optimización, los valores óptimos obtenidos para cada parámetro, así como la evolución simulada y su comparación con los datos estimados. Se incluyen también métricas de error y análisis gráfico de ajuste y dinámica poblacional resultante.

En la Figura 11 se muestra un diagrama de flujo del algoritmo implementado en para la optimización de los parámetros del modelo.

Figura 11.- Diagrama de flujo de optimización de parámetros del modelo.



**Fuente: Elaboración propia.**

En la Tabla II, se muestran los valores iniciales de los parámetros con los que se inició el programa y los valores ya optimizados por el algoritmo.

**Tabla II. Resumen de valores de los parámetros optimizados.**

<b>Parámetro</b>	<b>Valor inicial</b>	<b>Valor optimizado</b>
<b><i>r</i></b>	0.25	0.3145
<b><i>K</i></b>	50	10.04
<b><i>α</i></b>	0.5	0.052
<b><i>β</i></b>	0.5	0.0176
<b><i>δ</i></b>	0.5	0.0239
<b><i>μ</i></b>	0.5	-0.1920

**Fuente: Elaboración propia.**

Una vez obtenidos los parámetros óptimos mediante el ajuste numérico por el algoritmo de Levenberg–Marquardt, se procedió a simular la evolución dinámica del sistema cacao–hormiga durante un período de 36 semanas, correspondiente al ciclo productivo observado en campo. En esta etapa se utilizaron las ecuaciones diferenciales del modelo tipo Lotka–Volterra logístico, considerando como condiciones iniciales poblaciones bajas de cacao y hormigas, de acuerdo con la etapa inicial de floración.

Los resultados de la simulación muestran una tendencia clara hacia la estabilización tanto de la biomasa frutal de cacao como de la población estimada de hormigas chacareras. Esta convergencia a un punto de equilibrio indica que, en las condiciones observadas durante el

periodo de producción, el sistema alcanza un régimen estacionario en el que las interacciones entre las dos especies se regulan mutuamente.

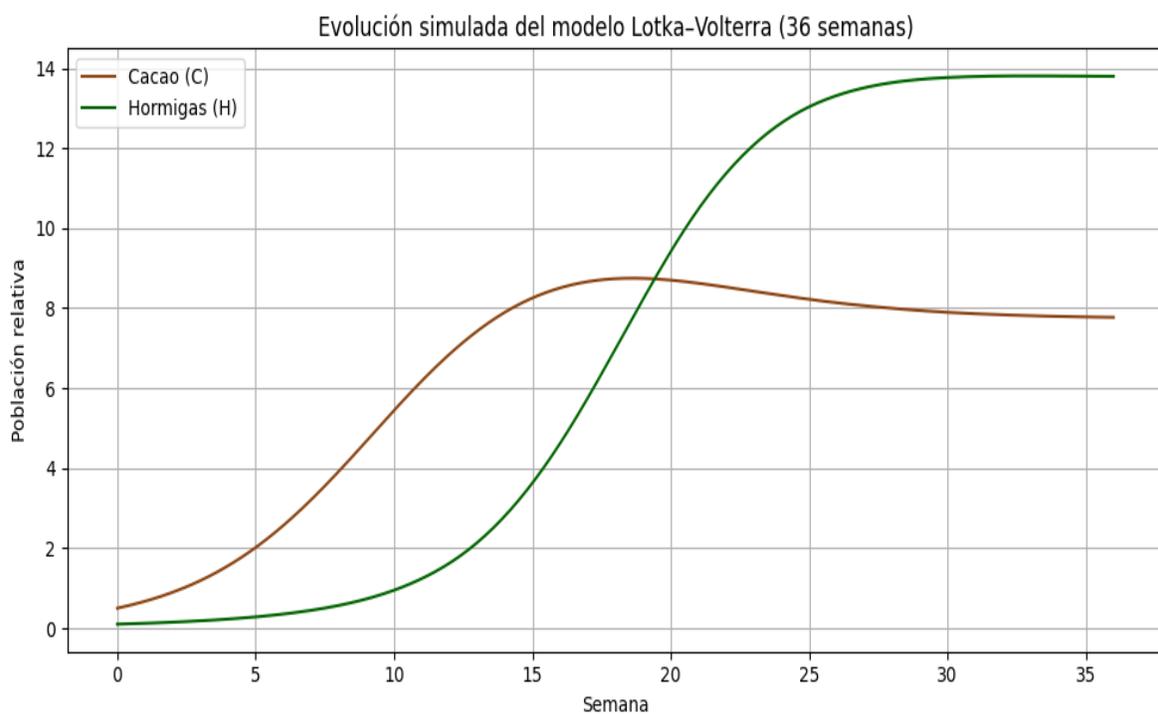
Un aspecto particularmente relevante del modelo ajustado es el hecho de que el parámetro  $\mu$ , correspondiente a la tasa de mortalidad inducida por factores externos (como control químico o depredación natural), resultó ligeramente negativo. Esto puede interpretarse como una limitación del modelo en este contexto temporal, ya que, durante la etapa observada correspondiente únicamente a la fase reproductiva del cacao, desde la floración hasta la cosecha, no se registran dinámicas de regeneración ni presión prolongada sobre la población de hormigas. Es decir, al ajustarse el modelo únicamente con datos de un intervalo productivo específico, el algoritmo pudo compensar de forma matemática la falta de amortiguamiento posterior a la cosecha, reflejando un  $\mu < 0$  que absorbe ese efecto no modelado explícitamente.

Además, se observa que el sistema no exhibe oscilaciones significativas ni ciclos límite en el intervalo de estudio, lo cual es consistente con la hipótesis de que, en un periodo productivo controlado, con prácticas agrícolas constantes y un entorno relativamente estable, las poblaciones se autorregulan hasta alcanzar un estado cuasi estacionario. Sin embargo, es importante señalar que, de haberse considerado una ventana temporal más amplia incluyendo fases de descanso, floración anterior, o recuperación postcosecha es probable que el sistema pudiera mostrar comportamientos oscilatorios o incluso respuestas periódicas, como las que se han reportado en modelos ecológicos con mayor cobertura estacional.

En consecuencia, aunque el modelo ajustado refleja adecuadamente la dinámica observada durante la fase de producción, su comportamiento global debe ser interpretado dentro de este marco temporal, reconociendo que una extensión en el horizonte de análisis podría revelar ciclos límite o fluctuaciones periódicas no visibles en el presente estudio.

Este comportamiento dinámico mencionado se puede reflejar en la Figura 12.

**Figura12.- Dinámica del modelo con parámetros optimizados.**



**Fuente: Elaboración propia.**

#### **4.7 Diagrama de fase del sistema C–H**

Con el objetivo de analizar el comportamiento dinámico del sistema más allá de su ajuste numérico, se construyó un diagrama de fase que representa la evolución conjunta de las poblaciones de cacao (C) y hormigas (H) bajo diferentes condiciones iniciales. La Figura 13, ilustra cinco trayectorias simuladas a partir de valores iniciales diversos, combinando

distintos niveles de biomasa frutal y densidad de hormigas, así como el punto de equilibrio de coexistencia obtenido analíticamente a partir de los parámetros optimizados.

Como se aprecia en la Figura 4, todas las trayectorias convergen a un mismo punto estable, correspondiente al punto crítico de coexistencia, representado con un marcador rojo. Este punto refleja un equilibrio ecológico en el que la biomasa de cacao y la población de hormigas se mantienen constantes en el tiempo, producto del balance entre crecimiento logístico del recurso y su depredación o interacción con la plaga.

Es relevante destacar que, independientemente de si el sistema parte de condiciones de alta abundancia de hormigas (por ejemplo,  $C_0 = 125, H_0 = 125$ ) o de situaciones iniciales con niveles bajos de cacao y hormigas (como  $C_0 = 8.03, H_0 = 5$ ) el sistema tiende asintóticamente a estabilizarse en la misma región del espacio de fases. Esta propiedad sugiere que el punto de coexistencia es localmente estable, es decir, actúa como un atractor en el espacio dinámico para un conjunto amplio de condiciones iniciales realistas.

La falta de órbitas cerradas o espirales constantes respalda la idea de que, bajo las condiciones establecidas durante el período de observación, el sistema no muestra ciclos límite ni patrones periódicos en el intervalo analizado.

Este comportamiento relativamente uniforme podría estar relacionado con la propia esencia del sistema productivo de cacao, que, en condiciones controladas (como suceden en la fase de producción), suele mantener niveles estables tanto de biomasa como de presión de plagas.

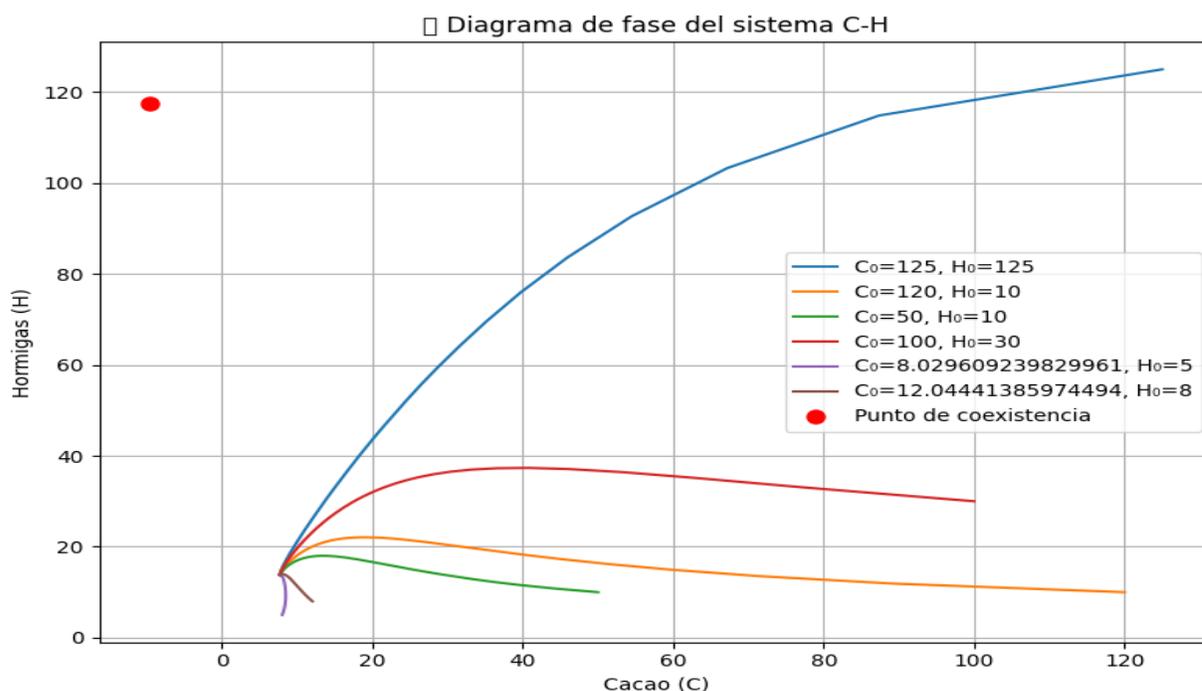
Sin embargo, hay que tomar este resultado con cautela. Dado que el modelo se ajustó solo en base a los datos de un ciclo productivo específico, sin tener en cuenta fenómenos estacionales o multianuales externos, podría ser que un análisis más prolongado revele dinámicas oscilatorias más complejas o incluso la aparición de ciclos límite.

Así que, aunque el análisis de fase actual reafirma la validez del modelo en el contexto

observado, también indica que sería necesario realizar futuras ampliaciones para captar posibles transiciones dinámicas a largo plazo.

En la Figura 13 se muestra el comportamiento cualitativo que relaciona estas 2 especies en términos de ciertas condiciones iniciales dadas.

**Figura13.- Diagramas de fase entre Cacao y Hormiga**



Fuente: Elaboración propia.

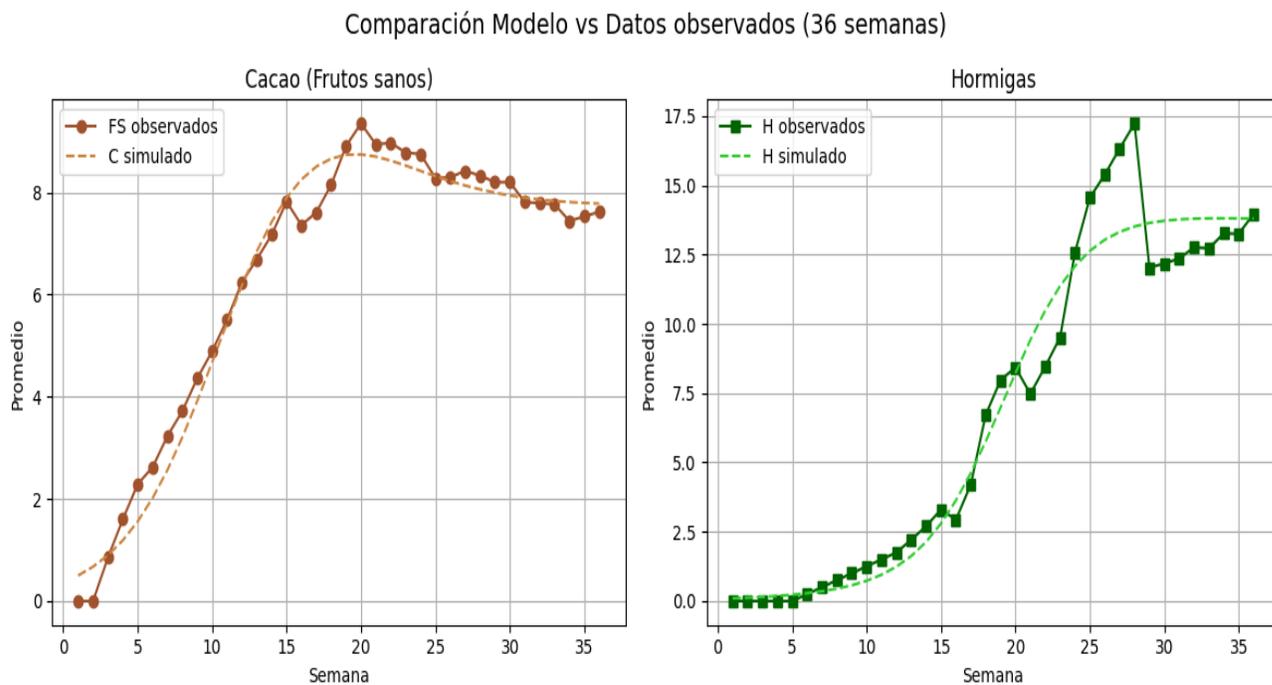
#### 4.8 Validación del modelo

Una vez estimados los parámetros del modelo tipo Lotka–Volterra logístico para representar la interacción entre la biomasa de frutos de cacao y la población de hormigas chacareras, se procedió a realizar la validación del modelo ajustado. Esta validación se basó en la comparación directa entre los valores simulados por el modelo y los datos empíricos

observados a lo largo de 36 semanas, así como en el cálculo de métricas estadísticas que cuantifican el grado de precisión del ajuste.

En la Figura 14, se presenta la comparación gráfica entre la evolución temporal promedio de frutos sanos (FS) y de la población estimada de hormigas (H) observadas en campo, frente a las respectivas variables simuladas por el modelo dinámico ajustado. Puede observarse que el comportamiento del modelo reproduce con fidelidad la tendencia general de ambas variables: en el caso del cacao, se capta adecuadamente el crecimiento progresivo hasta la cosecha, seguido de una estabilización moderada; mientras que, para las hormigas, el modelo reproduce la fase de crecimiento exponencial hasta alcanzar un nivel de saturación compatible con el efecto del control químico aplicado.

**Figura14.- Comparativa entre el modelo y datos de poblaciones.**



**Fuente: Elaboración propia.**

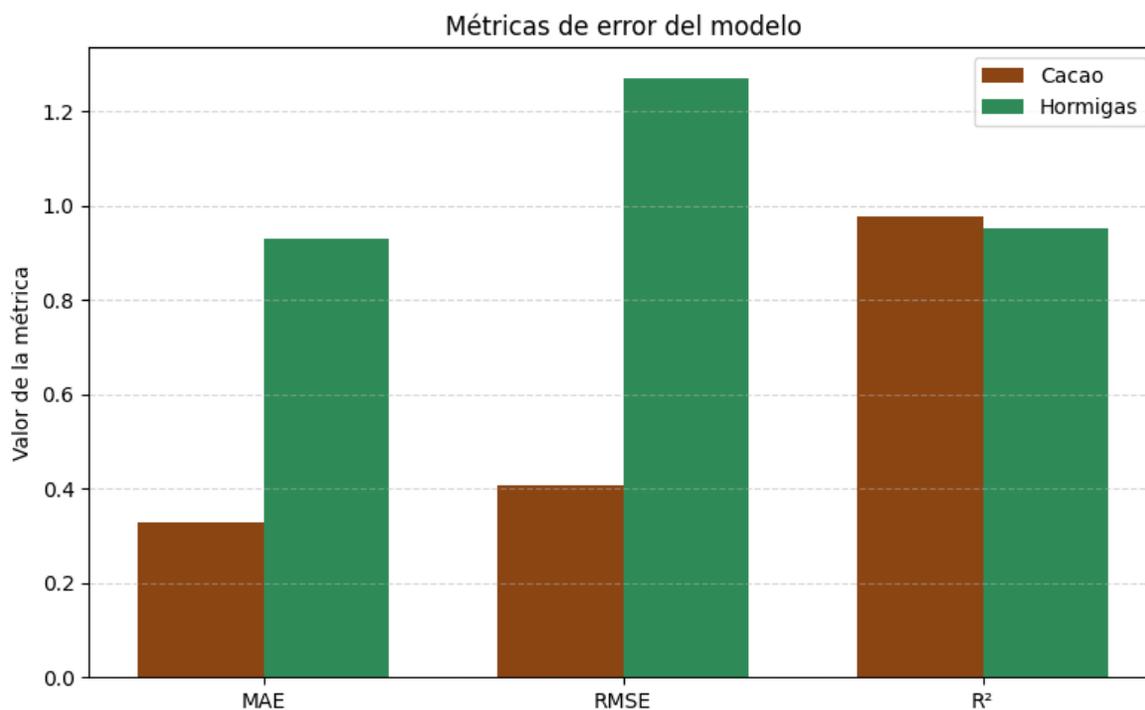
Asimismo, en la Figura15 se reportan tres métricas de error para ambas variables:

El MAE (Error Absoluto Medio) fue de aproximadamente 0.33 para el cacao y 0.93 para las hormigas.

El RMSE (Raíz del Error Cuadrático Medio) fue de 0.41 para el cacao y 1.27 para las hormigas, lo cual indica que el modelo tiene una mayor dispersión en la predicción de la dinámica de las hormigas, posiblemente debido a la influencia de variabilidad externa no modelada (como precipitaciones o errores de estimación por hojas).

El coeficiente de determinación  $R^2$  fue de 0.97 para el cacao y 0.95 para las hormigas, evidenciando que el modelo explica más del 95% de la variabilidad observada en ambas series.

**Figura15.- Métricas de errores del modelo.**



**Fuente: Elaboración propia.**

Estos resultados validan la capacidad del modelo propuesto para reproducir la dinámica ecológica observada, y destacan su potencial como herramienta de predicción y análisis en sistemas de producción de cacao. Sin embargo, cabe señalar que las ligeras discrepancias observadas, especialmente en la fase final de las curvas, podrían atribuirse a eventos puntuales de manejo agrícola o efectos acumulativos de intervención no incluidos explícitamente en las ecuaciones del modelo.

## CONCLUSIONES

El presente estudio logró desarrollar y validar un modelo matemático tipo Lotka–Volterra logístico para describir la interacción entre la biomasa de frutos sanos de cacao (*Theobroma cacao*) y la población estimada de hormiga chacarera (*Atta cephalotes*) en condiciones de cultivo real en la provincia de Santo Domingo de los Tsáchilas, específicamente en una finca ubicada en San Jacinto del Búa. A partir de un enfoque metodológico riguroso, que incluyó la recolección sistemática de datos semanales de 100 árboles durante 36 semanas, se pudo representar con precisión la evolución del sistema desde la etapa de floración hasta la cosecha.

El modelo se fundamentó en una mezcla de datos reales y simulados, que se alinearon cuidadosamente con registros auténticos de producción, obtenidos en estudios previos, estos datos se organizaron meticulosamente para reflejar las dinámicas fenológicas del cacao, adaptándose a las condiciones agroclimáticas específicas de cada región.

Una estrategia que resultó ser particularmente interesante fue la estimación indirecta de la población de hormigas, la cual se basó en el índice de frutos dañados, ajustándose de acuerdo con la cantidad de hojas. Este enfoque demostró ser bastante eficaz.

Al validarlo con referencias empíricas a nivel nacional, se evitó tener que hacer conteos directos, lo que es una gran ventaja, especialmente en áreas donde monitorear insectos puede ser complicado o costoso. Durante la fase de determinación de parámetros del modelo, se

aplicó el método de Levenberg–Marquardt, el cual permitió conseguir parámetros óptimos que aseguraron un ajuste bastante preciso.

Las métricas de validación mostraron un error medio bajo ( $MAE < 0.35$  para el cacao) y un coeficiente de determinación superior al 95% para ambas poblaciones que se modelaron, lo cual refleja que, el modelo es robusto y puede replicar la dinámica observada durante el tiempo de estudio.

Por otro lado, la población de hormigas, aunque más variable, también fue modelada con un nivel de fidelidad aceptable, que, visto desde un enfoque dinámico, el análisis del diagrama de fase del modelo reveló que, sin importar las condiciones iniciales elegidas, el sistema parece moverse hacia un punto de equilibrio en todas las circunstancias iniciales

Esto sugiere una sólida dinámica de coexistencia entre el cacao y las hormigas durante el período productivo, sin embargo, dado el periodo de estudio, no se detectaron trayectorias oscilatorias ni ciclos límite, lo que refuerza la idea de que, bajo las condiciones observadas y modeladas, el sistema parece autorregularse de forma natural hacia un estado estable.

Esta respuesta del modelo y los datos es consistente con la evidencia de la implementación de controles previos por parte de la mano del ser humano en los cultivos comerciales, con el fin buscar minimizar los riesgos de disminución de producción del cultivo.

Un hallazgo notable fue el valor negativo para el parámetro de mortalidad inducida de hormigas ( $\mu < 0$ ), lo cual, aunque pueda parecer extraño desde un punto de vista biológico, se entiende como un mecanismo matemático de compensación del modelo debido a la falta de fases postcosecha o de descanso ecológico en los datos utilizados.

Este hallazgo pone de manifiesto una limitación del estudio, ya que, al centrarse únicamente en una fase específica del cultivo, es decir, durante la floración y la cosecha, se pasaron por alto otros fenómenos temporales clave, como la regeneración del cultivo, los ciclos de aplicación de control químico y las variaciones climáticas prolongadas, que también pueden influir en la dinámica poblacional del cultivo y las plagas, no fueron considerados.

Se puede concluir que el modelo propuesto es una herramienta válida y prometedora para describir y analizar la dinámica cacao–hormiga en sistemas de producción agrícola de pequeña y mediana escala en Ecuador, bajo condiciones determinadas en este estudio.



## RECOMENDACIONES

Se recomienda extender el periodo de estudio a ciclos anuales completos o incluso multianuales, lo cual permitiría capturar dinámicas estacionales, efectos acumulativos del manejo agrícola y posibles oscilaciones no detectadas en este estudio. Agregar etapas como la prefloración, la postcosecha y el descanso vegetativo podría enriquecer el modelo significativamente y tal vez descubrir nuevas formas en que las poblaciones interactúan entre sí.

Además, se propone validar de manera empírica el modelo para estimar la población de hormigas, lo cual se puede hacer mediante conteos en el campo, usando trampas entomológicas o incluso a través de imágenes aéreas con lo que se podría verificar cuán preciso es el índice de daño que se está empleando.

Por otro lado, incorporar variables ambientales como la temperatura, la lluvia y la humedad relativa también sería crucial, ya que esto ayudaría a explicar la variabilidad observada en las poblaciones de hormigas y a adaptar los parámetros del modelo a las condiciones climáticas específicas de la región.

Se propone adaptar este modelo a otras zonas productoras de cacao del Ecuador, como Manabí o Los Ríos, para evaluar su generalización y determinar si es posible regionalizar los parámetros del modelo según el tipo de suelo, clima, variedad de cacao o prácticas culturales. Asimismo, sería recomendable trabajar en una versión computacional interactiva de la herramienta, accesible para técnicos y agricultores, que permita simular escenarios y prever momentos críticos de intervención contra plagas.

Finalmente, se alienta la integración de este tipo de modelos dentro de programas de manejo agroecológico y capacitación rural, como una estrategia para reducir pérdidas por plagas, optimizar el uso de insumos y mejorar la sostenibilidad de la cadena productiva del cacao en la región de Santo Domingo de los Tsáchilas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Amores, F. (2024). History, Origin, Cultivars, and Cacao Research in Ecuador. In *Sustainable Cacao Cultivation in Latin America*. Routledge.
- Arias Brito, M. N., & Loor Moreira, P. E. (2024). *Diseño de un plan de fertilización para el cultivo de cacao basado en el pronóstico de cosecha y extracción de nutrientes*.  
<http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/60902>
- Assis, V. R. V., Medeiros, N. G. F., Silva, E. N., Colato, A., & Silva, A. T. C. (2024). *Why aphids are not pests in cacao? An approach based on a predator-prey model with aging* (No. arXiv:2409.06861). arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.06861>
- Avazzadeh, Z., Hassani, H., Ebadi, M. J., Bayati Eshkaftaki, A., & Hendy, A. S. (2024). An optimization method for solving a general class of the inverse system of nonlinear fractional order PDEs. *International Journal of Computer Mathematics*, 101(2), 138–153. <https://doi.org/10.1080/00207160.2024.2316751>
- Bauer, R., & Schwarzmayer, F. (2023). *Dynamics of the Austrian Food Market: Application of Lotka-Volterra Differential Equations*.  
<https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=116758>
- Brunton, S. L., Budišić, M., Kaiser, E., & Kutz, J. N. (2021). *Modern Koopman Theory for Dynamical Systems* (No. arXiv:2102.12086). arXiv.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.12086>
- Brunton, S. L., & Kutz, J. N. (2022). *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press.

- Cambisaca-Díaz, M., & Macías-Badaraco, K. (2023). Competitividad de las exportaciones de cacao en Ecuador 2015 – 2020. *Revista Económica*, 11(1), Article 1.  
<https://doi.org/10.54753/rve.v11i1.1595>
- Castillo, J. C. R. (2025). Ecuaciones Diferenciales: Fundamentos, Métodos de Solución y Aplicaciones en Sistemas Dinámicos y Teoría del Caos. *Ibero Ciencias - Revista Científica y Académica - ISSN 3072-7197*, 4(2), Article 2.  
<https://doi.org/10.63371/ic.v4.n2.a35>
- Cedeño Coll, E. P., & Dilas-Jiménez, J. O. (2022). Producción y exportación del cacao ecuatoriano y el potencial del cacao fino de aroma. *Qantu Yachay*, 2(1), 08–15.  
<https://doi.org/10.54942/qantuyachay.v2i1.17>
- Chuairey, L. F., Alfonso, E. T., Medina, D. P., Millares, N. C., Águila, M. V. G., & Chamg, N. U. L. (2024). Modelos Estadísticos-Matemáticos y herramientas de Agricultura Inteligente, su aplicación en la descripción y gestión de Procesos Agrarios. *Revista Ciencia Universitaria*, 22, //cu-id.com/cu/v22e03.
- Cobiaga, R. P. (2024). *Órbitas periódicas en sistemas dinámicos y el método de análisis homotópico*. <https://repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/7049>
- Correa, K. P. C., Castillo, D. M. P., Montiel, L. G. C., & Serrano, L. A. L. (2024). Ecuador: Producción agrícola de cacao de la Economía Popular y Solidaria con respecto al rendimiento por hectárea, 2002-2022. *Arandu UTIC*, 11(2), Article 2.  
<https://doi.org/10.69639/arandu.v11i2.274>
- Cumbicos Sarango, A. F. (2024). *Evaluación de tres niveles de sombra sobre la fase productiva de cacao (Theobroma cacao L) clon EETP 801 en la estación experimental El Padmi provincia de Zamora Chinchipe*.  
<https://dspace.unl.edu.ec/jspui/handle/123456789/28980>

- Cusco Cuzco, J. E., & Mancheno Ñacata, D. M. (2024). *La innovación en los procesos productivos del cacao ecuatoriano*. [bachelorThesis, Quito : EPN, 2024.].  
<http://bibdigital.epn.edu.ec/handle/15000/25717>
- Despons, A., Unterberger, J., & Lacoste, D. (2025). *Stability conditions of chemical networks in a linear framework* (No. arXiv:2507.14941). arXiv.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.14941>
- GADPSD. (2025, January 6). *Santo Cacao –PREFECTURA DE SANTO DOMINGO DE LOS TSÁCHILAS*. <https://gptsachila.gob.ec/santo-cacao/>
- García-Briones, A. R., Pico-Pico, B. F., Jaimez, R., García-Briones, A. R., Pico-Pico, B. F., & Jaimez, R. (2021). La cadena de producción del Cacao en Ecuador: Resiliencia en los diferentes actores de la producción. *Revista Digital Novasinerгия*, 4(2), 152–172. <https://doi.org/10.37135/ns.01.08.10>
- Grippo, L., & Sciandrone, M. (2023). *Introduction to Methods for Nonlinear Optimization*. Springer Nature.
- Haring, M., Grøtli, E. I., Riemer-Sørensen, S., Seel, K., & Hanssen, K. G. (2023). A Levenberg-Marquardt Algorithm for Sparse Identification of Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 34(11), 9323–9336.  
<https://doi.org/10.1109/TNNLS.2022.3157963>
- Júnior, W. S. F. (2024). *Cálculo fracionário aplicado ao modelo de Lotka-Volterra: Controle biológico no cultivo da cana-de-açúcar*.
- Kochenderfer, M. J., & Wheeler, T. A. (n.d.). *Algorithms for Optimization*.
- Kumar, B., & Sinha, R. K. (2023). Dynamics of an eco-epidemic model with Allee effect in prey and disease in predator. *Computational and Mathematical Biophysics*, 11(1).  
<https://doi.org/10.1515/cmb-2023-0108>

- Lucido, A., Basallo, O., Marin-Sanguino, A., Eleiwa, A., Martinez, E. S., VilaprinYO, E., Sorribas, A., & Alves, R. (2025). Multiscale Mathematical Modeling in Systems Biology: A Framework to Boost Plant Synthetic Biology. *Plants*, 14(3), Article 3. <https://doi.org/10.3390/plants14030470>
- Luongo, A., Ferretti, M., & Di Nino, S. (2023). Stability and Bifurcation Linear Analysis. In A. Luongo, M. Ferretti, & S. Di Nino (Eds.), *Stability and Bifurcation of Structures: Statical and Dynamical Systems* (pp. 35–67). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-27572-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-031-27572-2_3)
- MAG Ecuador. (2021). *Informe\_determinantes\_productividad\_cacao\_2023.pdf*. MAG Ecuador. [https://pidara.mag.gob.ec/wp-content/uploads/2024/12/Informe\\_determinantes\\_productividad\\_cacao\\_2023.pdf](https://pidara.mag.gob.ec/wp-content/uploads/2024/12/Informe_determinantes_productividad_cacao_2023.pdf)
- Meng, J., Yue, M., & Diallo, D. (2023). Nonlinear extension of battery constrained predictive charging control with transmission of Jacobian matrix. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 146, 108762. <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2022.108762>
- Monteiro, L. H. A., Nonis, F. C., & Concilio, R. (2024). Biological pest control and crop–tree competition in agroforestry: A dynamical systems analysis. *Computational and Applied Mathematics*, 43(2), 103. <https://doi.org/10.1007/s40314-024-02613-w>
- Ortíz, D. J. B. (2022). *UNIVERSIDAD AGRARIA DEL ECUADOR*.
- Palácio, P. (2021). *Modelo físico-matemático para alocação de água de pequenos reservatórios na agricultura irrigada em regiões secas (NeStRes)*. <http://repositorio.ufc.br/handle/riufc/62444>

- Parra Forero, L. X., Molano Rojas, E., & Betancur Vanegas, D. I. (2021). *Estudio De Caso Sector Primario, Cosecha Y Pos-Cosecha Del CACAO*.  
<http://repository.unad.edu.co/handle/10596/43890>
- Pazmiño, E., Uday Patiño, M., Ortega, D., Guamán, R., Villavicencio, A. F., & Cortázar, S. (2025). Efecto de los herbicidas sobre la población de microorganismos en el cultivo de *Theobroma cacao* L., en la parroquia Luz de América, Ecuador. *Siembra*, 12, e7320. <https://doi.org/10.29166/siembra.v12i1.7320>
- Phillips, J. M. (2021). Gradient Descent. In J. M. Phillips (Ed.), *Mathematical Foundations for Data Analysis* (pp. 125–142). Springer International Publishing.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-62341-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-62341-8_6)
- Pramanik, S., M, N., Gupta, A., & Obaid, A. J. (2024). *Mathematical Modeling in Agriculture*. John Wiley & Sons.
- Rodríguez-Castro, R. (2024). *Caracterización de los subproductos del fruto del cacao (Theobroma cacao l.) en la Cuenca del Guayas—Ecuador*.  
<http://helvia.uco.es/xmlui/handle/10396/29498>
- Rojano, A., Salazar, R., & Miranda, L. (2024). *LOS SISTEMAS DINÁMICOS EN LA AGRICULTURA: UNA PERSPECTIVA INTEGRAL*.
- Shami, T. M., El-Saleh, A. A., Alswaitti, M., Al-Tashi, Q., Summakieh, M. A., & Mirjalili, S. (2022). Particle Swarm Optimization: A Comprehensive Survey. *IEEE Access*, 10, 10031–10061. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3142859>
- Sornoza Vélez, Lady, Valencia Carreño, L., Corozo Quiñónez, L., Sánchez Mora, F. D., Salas Macías, C., & Peña Monserrate, G. (2022). Recursos genéticos de cacao tipo Nacional en Ecuador: Una revisión sistemática. *Revista Ciencia y Tecnología*, 15(2), 31–44.

- Strogatz, S. (2022). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (Second edition, first issued in hardback). CRC Press.
- Teschl, G. (2022). *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. *American Mathematical Society*.
- Vera-Chang, J. F., Herrera-Tamayo, N. L., Alvarez-Sanchez, A. R., Alvarez-Aspiazu, A. A., Díaz-Camposano, E. G., Vásquez-Cortez, L. H., Vera-Chang, J. F., Herrera-Tamayo, N. L., Alvarez-Sanchez, A. R., Alvarez-Aspiazu, A. A., Díaz-Camposano, E. G., & Vásquez-Cortez, L. H. (2024). Comportamiento agronómico de cuarenta y un cruces interclonales de cacao (*Theobroma cacao* L.) en Ecuador. *Revista U.D.C.A Actualidad & Divulgación Científica*, 27(2).  
<https://doi.org/10.31910/rudca.v27.n2.2024.2729>
- Zambrano, M. I. U., Macías, R. B. M., Sousa, S. M. F. F. de, & Delgado, J. M. V. (2023). Factores culturales en la producción de cacao en Manabí-Ecuador. *ReHuSo: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales*, 8(2), Article 2.  
<https://doi.org/10.33936/rehuso.v8i2.5744>
- Zhou, Z., Lin, P., Gao, T., Tan, C., Wei, K., & Yan, L. (2025). Lotka–Volterra Dynamics and Sustainable Regulation of Agroecosystems: Coupled Framework of Monte Carlo Simulation and Multi-Objective Optimisation. *Sustainability*, 17(10), Article 10.  
<https://doi.org/10.3390/su17104249>
- Zino, L., & Cao, M. (2021). Analysis, Prediction, and Control of Epidemics: A Survey from Scalar to Dynamic Network Models. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 21(4), 4–23. <https://doi.org/10.1109/MCAS.2021.3118100>