



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO  
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, VINCULACIÓN  
Y POSGRADO  
DIRECCIÓN DE POSGRADO

Implementación de un modelo matemático de optimización para la  
asignación de horarios de clase y recursos tecnológicos mediante Python  
en un Instituto de Lenguas Extranjeras, periodo 2024-6b

Trabajo de Titulación para optar al título de Magister en Matemática  
Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR:

Viscaíno Gavilánes, Juan José

TUTOR:

MSc. Henry Mauricio Villa Yánez

Riobamba, Ecuador. 2025

## **Declaración de Autoría y Cesión de Derechos**

Yo, **Juan José Viscaíno Gavilanes**, con número único de identificación **020200608-6**, declaro y acepto ser responsable de las ideas, doctrinas, resultados y lineamientos alternativos realizados en el presente trabajo de titulación denominado: “IMPLEMENTACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO DE OPTIMIZACIÓN PARA LA ASIGNACIÓN DE HORARIOS DE CLASE Y RECURSOS TECNOLÓGICOS MEDIANTE PYTHON EN UN INSTITUTO DE LENGUAS EXTRANJERAS, PERIODO 2024-6B” previo a la obtención del grado de Magíster en Matemática Aplicada, con mención en Matemática Computacional.

- Declaro que mi trabajo investigativo pertenece al patrimonio de la Universidad Nacional de Chimborazo de conformidad con lo establecido en el artículo 20 literal j) de la Ley Orgánica de Educación Superior LOES.
- Autorizo a la Universidad Nacional de Chimborazo que pueda hacer uso del referido trabajo de titulación y a difundirlo como estime conveniente por cualquier medio conocido, y para que sea integrado en formato digital al Sistema de Información de la Educación Superior del Ecuador para su difusión pública respetando los derechos de autor, dando cumplimiento de esta manera a lo estipulado en el artículo 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior LOES.

Riobamba, 29 de julio de 2025



---

**Ing. Juan José Viscaíno Gavilanes**

N.U.I. 0202006086



Dirección de  
Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN,  
VINCULACIÓN Y POSGRADO



## ACTA DE CULMINACIÓN DE TRABAJO DE TITULACIÓN

En la ciudad de Riobamba, a los 25 días del mes de julio del año 2025, los miembros del Tribunal designado por la Comisión de Posgrado de la Universidad Nacional de Chimborazo, reunidos con el propósito de analizar y evaluar el Trabajo de Titulación bajo la modalidad Proyecto de titulación con componente investigación aplicada y/o desarrollo, CERTIFICAMOS lo siguiente:

Que, una vez revisado el trabajo titulado: "**Implementación de un Modelo Matemático de Optimización para la Asignación de Horarios de Clase y Recursos Tecnológicos mediante Python en un Instituto de Lenguas Extranjeras, Periodo 2024-6B**", perteneciente a la línea de investigación: Ingeniería Informática, presentado por el maestrante **Viscaíno Gavilanes Juan José**, portador de la cédula de ciudadanía No. **0202006086**, estudiante del programa de Maestría en **Matemática Aplicada, con mención en Matemática Computacional**, se ha verificado que dicho trabajo cumple al 100% con los parámetros establecidos por la Dirección de Posgrado de la Universidad Nacional de Chimborazo.

Es todo cuanto podemos certificar, en honor a la verdad y para los fines pertinentes.

Atentamente,

---

**MSc. Henry Villa**  
TUTOR

---

**PhD. Ciro Radicelli**  
MIEMBRO DEL  
TRIBUNAL 1

---

**PhD. Guillermo Machado**  
MIEMBRO DEL  
TRIBUNAL 2



Campus La Dolorosa  
Av. Eloy Alfaro y 10 de Agosto  
Teléfono (593-3) 373-0880, ext. 2002  
Riobamba - Ecuador

**Unach.edu.ec**  
*en movimiento*



Riobamba, 29 de julio de 2025

# CERTIFICADO

De mi consideración:

Yo Henry Mauricio Villa Yánez, certifico que Juan José Viscaino Gavilanes con cédula de identidad No. 0202006086 estudiante del programa de Maestría en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional , cohorte 3 presentó su trabajo de titulación bajo la modalidad de Proyecto de titulación con componente de investigación aplicada/desarrollo denominado: Implementación de un modelo matemático de optimización para la asignación de horarios de clase y recursos tecnológicos mediante Python en un Instituto de Lenguas Extranjeras, periodo 2024-6B, el mismo que fue sometido al sistema de verificación de similitud de contenido COMPILATION identificando el 1% en el texto y el 9% en inteligencia artificial.

Es todo en cuanto puedo certificar en honor a la verdad.

Atentamente,

---

MSc. Henry Mauricio Villa Yánez

Ci: 0603923491

Adj.-

- Resultado del análisis de similitud (Compilation)

## **Agradecimiento**

Agradezco a Dios por todo, a mi madre Mary quién me apoyó en cada momento, a mi esposa María José y a mis hijos Zhami y Julián quienes son mi pilar para continuar, a mi padre, hermanos y a mis suegros.

Juan José

## **Dedicatoria**

Este trabajo está dedicado a Dios y a toda mi familia quienes siempre me han brindado su apoyo.

Juan José

## Índice General

<b>DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y CESIÓN DE DERECHOS</b> .....	ii
<b>ACTA DE CULMINACIÓN DE TRABAJO DE TITULACIÓN</b> .....	iii
<b>CERTIFICADO DE CONTENIDO DE SIMILITUD</b> .....	iv
<b>DEDICATORIA</b> .....	v
<b>AGRADECIMIENTO</b> .....	vi
<b>ÍNDICE GENERAL</b> .....	vii
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b> .....	xii
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	xiii
<b>RESUMEN</b> .....	xv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	17
<b>GENERALIDADES</b> .....	17
1.1    Planteamiento del Problema .....	17
1.1.1    Formulación del Problema.....	22
1.2    Justificación de la Investigación.....	22
1.3    Objetivos.....	25
1.3.1    Objetivo General .....	25
1.3.2    Objetivos Específicos.....	25
1.4    Descripción de la Empresa y Puestos de Trabajo .....	26
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>28</b>

<b>ESTADO DEL ARTE Y LA PRÁCTICA .....</b>	<b>28</b>
2.1 Antecedentes Investigativos .....	28
2.2 Fundamentación Legal .....	33
2.2.1 Ley Orgánica de Educación Superior (LOES) .....	33
2.2.2 Ley Orgánica de Educación Intercultural (LOEI) .....	34
2.2.3 Normativas Internas del Instituto de Lenguas Extranjeras .....	34
2.2.4 Ley Orgánica de Protección de Datos Personales (LOPDP) .....	34
2.2.5 Normas ISO para la Administración de la Calidad .....	35
2.3 Fundamentación Teórica.....	35
2.3.1 Optimización Matemática.....	35
2.3.2 Programación Lineal .....	37
2.3.3 Programación Lineal Entera (PLE) .....	41
2.3.3.1 <i>Tipos de Programación Lineal Entera</i> .....	42
2.3.4 Programación Entera Mixta (PEM).....	42
2.3.5 Programación No Lineal (PNL) .....	43
2.3.6 Python en la Implementación de Modelos de Optimización.....	44
2.3.6.1 <i>Ecosistema de Librerías Matemáticas en Python</i> .....	45
2.3.7 Modelado Matemático para la Asignación de Clases y Recursos a Profesores .....	45
<b>CAPÍTULO 3 .....</b>	<b>47</b>
<b>DISEÑO METODOLÓGICO .....</b>	<b>47</b>
3.1 Enfoque de la Investigación .....	47

3.2	Diseño de la Investigación.....	47
3.3	Tipo de Investigación .....	49
3.4	Nivel de Investigación.....	49
3.5	Técnicas e Instrumentos de Recolección De Datos.....	49
3.6	Técnicas para el Procesamiento e Interpretación de Datos .....	50
3.7	Población y Muestra .....	51
3.8	Contexto Institucional .....	51
3.9	Programación Lineal Entera Binaria .....	58
3.9.1	Modelo Propuesto.....	58
3.9.1.1	<i>Restricciones del Modelo</i> .....	59
3.9.1.2	<i>Alcances del Modelo Propuesto</i> .....	62
3.9.2	Modelo de la Etapa 1 .....	63
3.9.2.1	<i>Función objetivo de la Etapa 1</i> .....	64
3.9.2.2	<i>Formulación Matemática de las Restricciones de la Etapa 1</i> .....	65
3.9.2.3	<i>Interpretación General del Modelo de la Etapa 1</i> .....	67
3.9.3	Modelo de la Etapa 2 .....	68
3.9.3.1	<i>Función Objetivo de la Etapa 2</i> .....	70
3.9.3.2	<i>Formulación Matemática de las Restricciones de la Etapa 2</i> .....	71
3.9.3.3	<i>Interpretación General del Modelo de la Etapa 2</i> .....	74
3.9.4	Modelo de la Etapa 3 .....	75
3.9.4.1	<i>Función Objetivo de la Etapa 3</i> .....	77
3.9.4.2	<i>Formulación Matemática de las Restricciones de la Etapa 3</i> .....	78

3.9.4.3	<i>Interpretación General del Modelo de la Etapa 3</i> .....	80
3.10	Programación del Modelo Matemático en Python .....	81
3.10.1	Herramientas del Entorno de Software y Hardware.....	81
3.10.2	Consideraciones de Implementación en Python.....	82
3.10.3	Definición de Problemas y Variables en PuLP .....	85
3.10.4	Pseudocódigo de la Estructura Computacional General.....	87
<b>CAPÍTULO 4</b>	.....	<b>90</b>
<b>ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS</b>	.....	<b>90</b>
4.1	Análisis Descriptivo de los Resultados .....	90
4.1.1	Resultados de la Optimización Mediante Programación Lineal Entera Binaria .	90
4.2	Discusión de los Resultados .....	90
4.2.1	Resultados de la Etapa 1 .....	91
4.2.1.1	Análisis Descriptivo de la Asignación en la Etapa 1 .....	91
4.2.2	Resultados de la Etapa 2.....	96
4.2.2.1	Análisis Descriptivo de la Asignación en la Etapa 2.....	97
4.2.3	Resultados de la Etapa 3.....	102
4.2.3.1	Análisis Descriptivo de la Asignación en la Etapa 3 .....	103
4.3	Análisis Comparativo del Modelo Propuesto.....	106
4.3.1	Recopilación de Datos y Estimación de Tiempos de Planificación .....	107
4.3.2	Validación de Factibilidad y Cumplimiento de Restricciones.....	109
4.3.3	Evaluación del Desempeño Respecto a Objetivos y Límites Teóricos.....	110
4.3.4	Análisis Comparativo Cuantitativo .....	111

4.3.5	Análisis de Sensibilidad .....	111
4.3.5.1	Escenario 1: Impacto del Cambio en las Preferencias Docentes.....	112
4.3.5.2	Escenario 2: Variación en el Límite de Uso Simultáneo de Libros .....	113
<b>CAPÍTULO 5.....</b>		<b>116</b>
<b>MARCO PROPOSITIVO.....</b>		<b>116</b>
5.1	Ejecución del Modelo Matemático.....	116
Conclusiones.....		119
Recomendaciones .....		121
Bibliografía.....		123

## Índice de Tablas

<b>Tabla 1</b> Comparación de Métodos de Optimización para Problemas de Asignación Académica .....	32
<b>Tabla 2</b> Cantidad de estudiantes matriculados según edad y módulo.....	53
<b>Tabla 2</b> Módulos, horarios, paralelos y estudiantes matriculados en el ciclo 2024-6B....	55
<b>Tabla 3</b> Preferencia y disponibilidad de profesores por módulo, horario y número de clases .....	56
<b>Tabla 4</b> Libros digitales disponibles para cada módulo .....	57
<b>Tabla 5</b> Conjunto de datos definidos para el modelo de la Etapa 1 .....	63
<b>Tabla 6</b> Parámetros definidos para el modelo de la Etapa 1 .....	64
<b>Tabla 7</b> Conjunto de datos definidos para el modelo de la Etapa 2 .....	69
<b>Tabla 8</b> Parámetros definidos para el modelo de la Etapa 2 .....	69
<b>Tabla 9</b> Conjunto de datos definidos para el modelo de la Etapa 3 .....	76
<b>Tabla 10</b> Parámetros definidos para el modelo de la Etapa 3 .....	76
<b>Tabla 11</b> Descripción de componentes de Hardware utilizados para resolver computacionalmente el modelo matemático .....	81
<b>Tabla 12</b> Software Código Abierto utilizado para implementar el modelo matemático propuesto .....	82
<b>Tabla 13</b> Asignación óptima de profesores a las clases del periodo 2024-6B .....	93
<b>Tabla 14</b> Cuenta de videoconferencia asignada a cada profesor activo.....	98
<b>Tabla 15</b> Asignación Óptima de Libros Digitales por Clase.....	103
<b>Tabla 16</b> Estimación de Tiempos para el Proceso Manual de Asignación.....	107
<b>Tabla 17</b> Tiempos para el Proceso Optimizado de Asignación.....	108
<b>Tabla 19</b> Comparación Cuantitativa del Proceso Manual vs el Modelo Optimizado.....	111
<b>Tabla 20</b> Resumen de Análisis de Sensibilidad .....	115

## Índice de Figuras

<b>Figura 1</b>	Esquema visual del flujo manual actual de asignación.....	20
<b>Figura 2</b>	Esquema visual del flujo propuesto con optimización matemática secuencial .	21
<b>Figura 3</b>	Niveles y módulos del programa de ingles del instituto de lenguas extranjeras	52
<b>Figura 4</b>	Etapas del modelo matemático de optimización secuencial .....	58
<b>Figura 5</b>	Diagrama de Interacciones entre variables del Modelo para la Etapa 1 .....	68
<b>Figura 6</b>	Diagrama de Interacciones entre variables del Modelo para la Etapa 2 .....	75
<b>Figura 7</b>	Diagrama de Interacciones entre variables del Modelo para la Etapa 3 .....	80
<b>Figura 8</b>	Definición del problema de maximización en la Etapa 1 con la librería PuLP ..	85
<b>Figura 9</b>	Definición del problema de minimización en la Etapa 2 con la librería PuLP...	85
<b>Figura 10</b>	Definición del problema de minimización en la Etapa 3 con la librería PuLP	86
<b>Figura 11</b>	Ejemplo de definición de restricciones con Pulp. Restricción número 4 de la Etapa 1 .....	87
<b>Figura 12</b>	Pseudocódigo General del Marco de Optimización Secuencial .....	88
<b>Figura 13</b>	Diagrama de flujo del proceso de modelamiento con la librería PuLP para desarrollar e implementar el problema de asignación .....	89
<b>Figura 14</b>	Bloque de código en Python que presenta el Valor Óptimo de la Función Objetivo de la Etapa 1 .....	91
<b>Figura 15</b>	Resultados mostrados en consola luego de ejecutar el código de la Etapa 1...	92
<b>Figura 16</b>	Listado de profesores sin asignación de horarios de clases mostrados en consola. ....	92
<b>Figura 17</b>	Diagrama de Gantt de la Cantidad de Clases Asignadas a Profesores vs Preferencias .....	95
<b>Figura 18</b>	Resultados del estado y tiempo de ejecución mostrados en consola luego de ejecutar el código de la Etapa 2.....	96

<b>Figura 19</b>	Resultados de la Asignación de Cuentas de videoconferencia mostrados en consola luego de ejecutar el código de la Etapa 2 .....	97
<b>Figura 20</b>	Diagrama de Uso de Cuentas de Videoconferencia por Horario y Profesor Asignado.....	99
<b>Figura 21</b>	Resultado mostrado en consola de los valores resultantes de los pares con Horarios Contiguos y Pares con Solapamiento por Horario en Pulp .....	101
<b>Figura 22</b>	Valores resultantes de los pares con Horarios Contiguos y Pares con Solapamiento por Horario en Pulp mostrados en consola.....	102
<b>Figura 23</b>	Valores resultantes de los libros digitales utilizados y no utilizados en la asignación mostrados en consola.....	103
<b>Figura 24</b>	Diagrama de Gantt de la distribución de cada Libro Digital Asignado a la Clase .....	105
<b>Figura 25</b>	Análisis Comparativo Cuantitativo de los Tiempos Manual vs Optimizado..	109
<b>Figura 26</b>	Captura de pantalla del mensaje en consola de la asignación de cuentas de videoconferencia.....	112
<b>Figura 27</b>	Mensaje en consola de que se requiere un libro adicional para el horario y módulo .....	113
<b>Figura 28</b>	Mensaje en consola de que el problema es infactible cuando el límite simultáneo del libro es 3 .....	114
<b>Figura 29</b>	Mensaje en consola de que el problema es infactible cuando el límite simultáneo del libro es 3 .....	114

## Resumen

La gestión académica en instituciones educativas antes del inicio de clases es un proceso susceptible de generar ineficiencias operativas, especialmente en entornos virtuales con plazos de planificación ajustados. El objetivo de este estudio fue implementar un modelo de optimización matemática para automatizar la asignación de horarios de clases predefinidas a profesores y recursos tecnológicos en un Instituto de Lenguas Extranjeras para el ciclo 2024-6B. La investigación fue aplicada, no experimental y transversal. Se realizó con la población total de elementos operativos del ciclo, incluyendo 46 clases, 30 profesores y sus recursos tecnológicos asociados. Se adoptó un enfoque mixto, formalizando los requerimientos institucionales en un modelo cuantitativo con un esquema secuencial de tres etapas basado en Programación Lineal Entera Binaria, implementado en Python. Se abordaron restricciones operativas complejas, como la prohibición de compartir cuentas de videoconferencia entre horarios contiguos y el límite de uso simultáneo por licencia de libro. Los resultados demuestran una asignación óptima que satisface el 100% de las preferencias docentes, cuantifica con precisión la necesidad de 4 licencias de videoconferencia adicionales y optimiza el inventario de libros a 7 de los 11 tipos disponibles. El tiempo de planificación se reduce de más de 12 horas manuales a aproximadamente 3 horas. Se concluye que el modelo desarrollado es una herramienta robusta para la planificación operativa. Su implementación garantiza una asignación factible que ofrece a la administración una base cuantitativa para la toma de decisiones estratégicas, evidenciando el impacto de la optimización matemática en la gestión educativa.

**Palabras clave:** *Optimización Matemática, Python, Modelo Secuencial, Programación Lineal Entera Binaria, Asignación de Recursos.*

## **Abstract**

Academic management in educational institutions before the start of classes is a process that can generate operational inefficiencies, especially in virtual environments with tight planning deadlines. The objective of this study was to implement a mathematical optimization model to automate the assignment of predefined class schedules to teachers and technological resources at a Foreign Language Institute for the 2024-6B cycle. The research employed a non-experimental, cross-sectional design. It was conducted with the total population of operational elements of the cycle, including 46 classes, 30 teachers, and their associated technological resources. A mixed approach was adopted, formalizing institutional requirements in a quantitative model with a three-stage sequential scheme based on Binary Integer Linear Programming, implemented in Python. Complex operational constraints were addressed, including the prohibition on sharing videoconferencing accounts between contiguous schedules and the limit on simultaneous use per book license. The results demonstrated an optimal allocation that satisfies 100% of the teacher preferences, accurately quantifies the need for four additional videoconferencing licenses, and optimizes the book inventory to include seven of the 11 available types. Planning time is reduced from more than 12 manual hours to approximately 3 hours. It is concluded that the developed model is a robust tool for planning and decision-making.

**Keywords:** Mathematical Optimization, Python, Sequential Model, Binary Integer Linear Programming, Resource Assignment.

Reviewed by:  
Jenny Alexandra Freire Rivera, M.Ed.  
**ENGLISH PROFESSOR**  
ID No.: 0604235036

## **Capítulo 1**

### **Generalidades**

#### **1.1 Planteamiento del Problema**

En escuelas muy solicitadas que utilizan educación en línea, la planificación efectiva de clases es fundamental para que la institución funcione de forma óptima. Este proceso supone equilibrar la disponibilidad de los profesores, el inventario de recursos tecnológicos y el cumplimiento de normas de contrato y logística.

El Instituto de Lenguas Extranjeras organiza las clases basadas en la cantidad de estudiantes inscritos hasta el sábado antes de que empiece cada ciclo lectivo. Respecto al programa de inglés, con tres niveles y muchos módulos, funciona con horarios hechos de antemano, así, el problema principal no es crear nuevos horarios, sino asignar en el marco existente.

Esta puesta en marcha opera al juntar profesores fijos y contratados, a más de gestionar las cuentas de videollamada base y las licencias de libros digitales para los profesores. A pesar de tener una programación básica de horarios fijada, tiene sus peros operativos, ya que la coordinada asignación de estos recursos a una clase activa se gestiona a mano, todo fragmentado.

Sin un método integral, los tiempos de planeación se disparan, y también, problemas con las cuentas y las licencias de estos recursos, al faltar buenos mecanismos para que todas las reglas operativas se cumplan siempre. Esto hace que las cuentas no se usen bien, aumentando los costos de alguna compra nueva.

A pesar de la incorporación de novedosos sistemas y recursos digitales, la modernización en los procesos de gestión estaba ausente, y esto empezaba con la

recopilación de datos sobre las matrículas estudiantiles y disponibilidad de profesores, todo continuando con la puesta en marcha de las clases según la demanda, consumiendo, muchas horas de esfuerzo administrativo fuera del horario habitual y a veces bajo mucha presión. La situación está trayendo consecuencias directas a la preparación de los docentes, limitando la verificación de los accesos, la revisión de material pedagógico y también su correcta preparación.

Para entender la complejidad e ineficiencias del proceso manual, tomemos como ejemplo, situaciones donde dos profesores, con horarios superpuestos, se les asigna por error la misma cuenta de videoconferencia, esto causando un conflicto directo que les impide dar clases a la misma vez. Y si un libro digital con límites de usuarios simultáneos por nivel y horario se asigna a varias clases que sobrepasan los límites establecidos, la licencia se infringe y, esto también se traduce en falta de material didáctico. La detección, un tanto tardía, de esas incompatibilidades entre recursos y exigencias en los módulos académicos, y lidiar manualmente con los múltiples conflictos quita un tiempo valioso del personal administrativo, incluso lleva a asignaciones menos que ideales en el último minuto.

Esta situación, pone en evidencia la necesidad urgente de un mecanismo más fuerte y ordenado. Uno que optimice la asignación y el uso de recursos, además de aliviar la carga administrativa y, por supuesto, mejorar la gestión del personal del instituto.

Desde un punto de vista práctico, la optimización matemática presenta herramientas útiles para resolver los de planificación y asignación. Por esa razón, este estudio se enfoca en el desarrollo e implementación de un esquema de optimización secuencial con modelos matemáticos, todo hecho con Python. Un método que permitirá organizar las asignaciones, en fases conectadas:

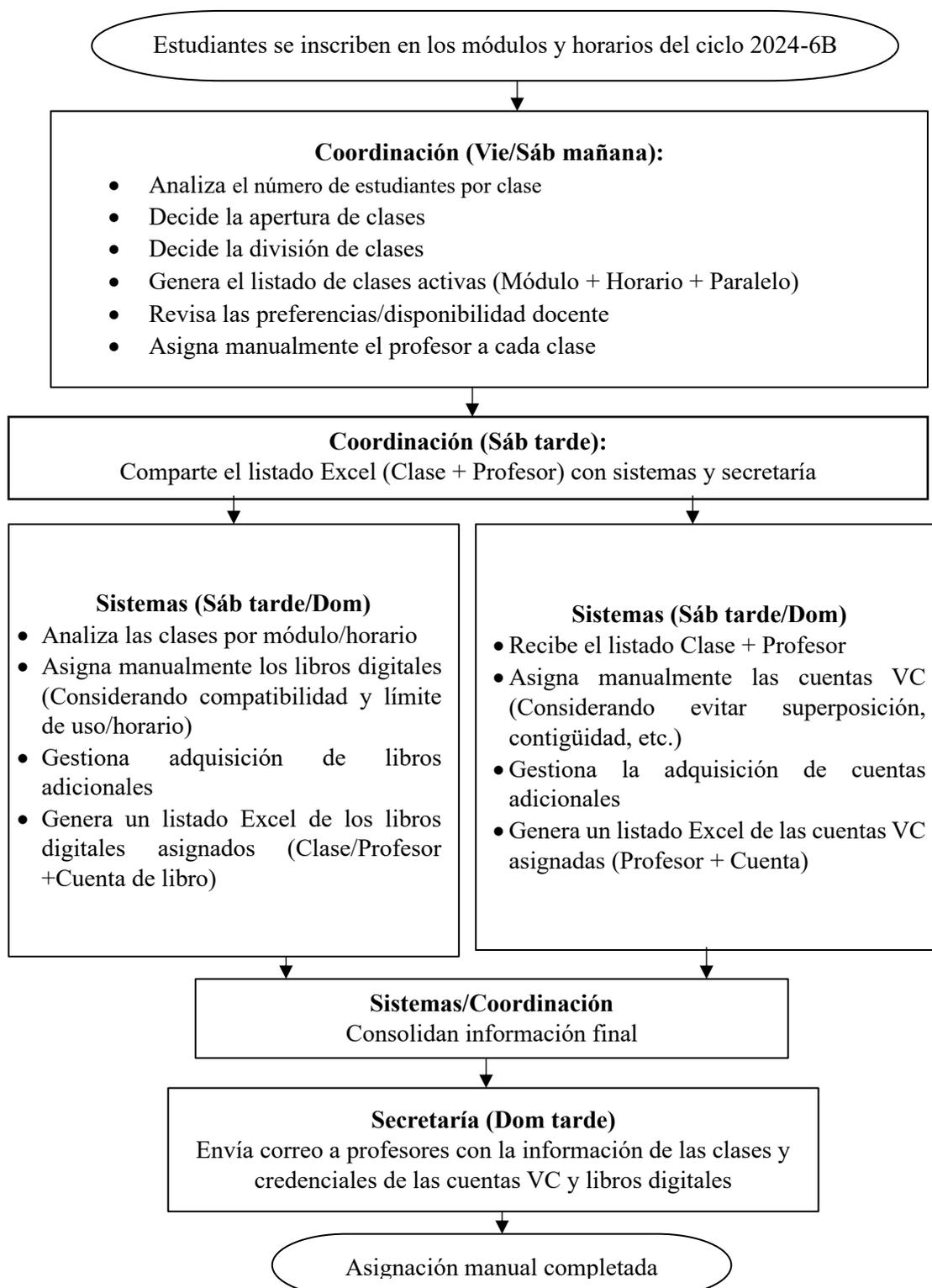
- Asignar profesores a las clases, buscando maximizar la concordancia entre las habilidades del profesor, el módulo y las preferencias de horarios. Todo, para evitar conflictos y restar un poco la subjetividad en la planificación.
- La asignación de cuentas video para las teleconferencias se gestionará para reducir la cantidad total de cuentas en uso. Primero las cuentas básicas, luego las extras. Y tomando en cuenta las normas de uso compartido y cuando pueden usarse de manera estricta.
- Para los libros electrónicos, la asignación asegura que funcionen con el módulo del curso. Se respetan los límites de uso simultáneo, según la licencia y la hora. Se procura tener la menor cantidad de licencias diferentes activas.

El estudio va sobre la asignación en el programa de inglés del Instituto, un caso práctico durante el período académico 2024-6B, empleando datos reales. Se busca una solución completa para optimizar los recursos mencionados.

A continuación, se muestra un esquema visual del flujo actual vs el propuesto para ilustrar más gráficamente el impacto del modelo. La figura 1 muestra el proceso actual, manual y secuencial, mientras que la figura 2 representa el nuevo enfoque optimizado, más eficiente y automatizado.

**Figura 1**

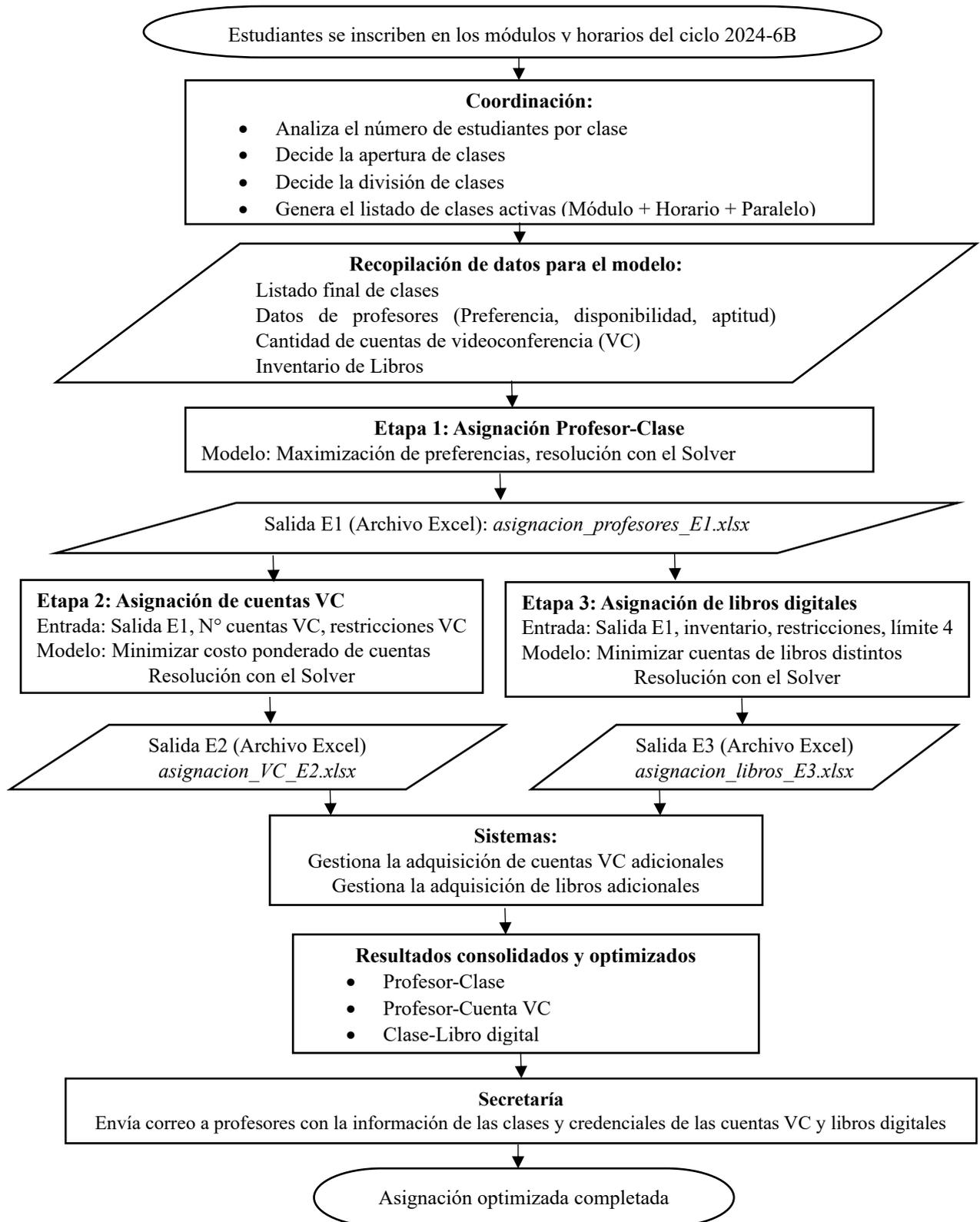
*Esquema visual del flujo manual actual de asignación*



*Nota: Elaboración propia*

**Figura 2**

*Esquema visual del flujo propuesto con optimización matemática secuencial*



*Nota: Elaboración propia*

### ***1.1.1 Formulación del Problema***

Para abordar esta problemática, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Por qué un modelo matemático de optimización implementado en Python mejora la asignación de horarios de clase y recursos tecnológicos en el Instituto de Lenguas Extranjeras durante el periodo 2024-6B?

## **1.2 Justificación de la Investigación**

Desde un enfoque pragmático, este estudio examina la etapa de mayor importancia funcional en la organización de las clases del Instituto. Un horario de clases, incluso bien planeado, no es más que un esquema teórico hasta que se le provee los recursos necesarios. Un horario sin un profesor idóneo o con problemas de recursos tecnológicos es un horario inútil.

Por eso, esta investigación se centra en optimizar la asignación de recursos a cada lapso de tiempo, respondiendo a la necesidad de convertir un plan estático en una actividad académica viable, eficaz, y lógica. Al establecer las reglas operativas en un modelo matemático, un proceso manual propenso a fallos es reemplazado por una solución sistemática y automatizada.

De esta manera, se tiene la posibilidad de bajar considerablemente el tiempo y esfuerzo administrativo dedicado a la planificación y garantizar el cumplimiento de todas las restricciones operativas, tales como la disponibilidad del profesorado, las normas de uso de las cuentas de videoconferencia compartidas, la compatibilidad de libros entre otros, llevando a un uso más sensato y posiblemente económico de los recursos tecnológicos del instituto.

La concentración de estas actividades, aconteciendo los fines de semana, resulta en presión de tiempo y riesgo operacional, ambos exacerbados por el crecimiento de la

institución y la complejidad de la tecnología empleada. Esta situación exige urgentemente buscar alternativas más eficaces para repartir la carga laboral, y también disminuir la dependencia de procesos manuales, propensos a errores humanos. Las soluciones comerciales existentes, a menudo caras, y además genéricas, no consideran las particularidades de instituciones educativas con recursos tecnológicos compartidos, sumando las restricciones específicas como las del Instituto. Implementar una solución basada en herramientas de código abierto significa una inversión mínima frente al software comercial especializado, empleando tecnologías asegurando sostenibilidad económica, con también, adaptabilidad a las necesidades precisas de la institución.

Específicamente esto explora la intrincada asignación entre la asignación de personal docente y la gestión de los recursos tecnológicos integrados en la programación académica actual. Aunque la investigación sobre horarios académicos y gestión de recursos existe por separado, la combinación gradual de la asignación docente con recursos tecnológicos concretos como cuentas de videoconferencia y licencias digitales en entornos educativos virtuales es, un territorio investigativo menos trillado. Desarrollar un marco de modelado secuencial por etapas para solucionar un problema tan complejo, es una contribución metodológica valiosa, esto demuestra cómo dividir problemas enormes, quizás computacionalmente inabordables con un enfoque único, en desafíos más simples de resolver.

La puesta en marcha de estos modelos empleando el lenguaje Python y librerías de código abierto como PuLP, destaca la asequibilidad y factibilidad de estas técnicas analíticas sofisticadas para instituciones educativas con pocos recursos. Este enfoque no solo soluciona un problema local, también impulsa conocimiento a través de una metodología que tal vez sirva para otras instituciones educativas que lidian con dificultades parecidas al gestionar sus recursos. El modelo que se plantea está pensado para adaptarse a muchos cambios, desde

el tamaño de la escuela, el número de alumnos y profesores o, incluso, los recursos tecnológicos disponibles; esto, asegura que funcione a largo plazo, ante el crecimiento institucional y los cambios en las clases.

Metodológicamente, el estudio, mezcla una investigación, tanto aplicada como operativa, donde primero se ve un problema real, luego un modelo matemático, una solución, y después se aplica computacionalmente para luego validarlo con datos propios del instituto. La evaluación de los resultados obtenidos permite, cuantificar las ventajas del modelo que se propone, en cuanto al buen uso de los recursos y, también, cumplir con los requerimientos de trabajo. El método secuencial ofrece una estructura adaptable, que otros institutos podrían moldear, ayudando a mejorar la administración en la educación de tal forma mostrar cómo las técnicas matemáticas mejoran procesos en escenarios complejos.

Esta investigación es significativa por los efectos que causa, directa e indirectamente, a muchos niveles. En la organización, se espera un alza directa en la eficiencia de los procesos administrativos, cortando el tiempo en labores repetitivas, y, reduciendo errores, que podrían causar problemas. Optimizar las licencias tecnológicas, tal vez signifique, ahorrar costos y ayudar a la institución a manejar mejor, la programación académica y distribución de recursos, que cada vez son más complicadas. Técnicamente, esta investigación comprueba la utilidad de Python y PuLP como herramientas gratuitas que son eficaces y accesibles para la optimización de recursos en la educación, mostrando que incluso las instituciones con poco dinero pueden emplear soluciones avanzadas sin tener que comprar algún tipo de software costoso.

En cuanto al impacto social, emplear recursos tecnológicos y el personal docente con mayor eficiencia y coordinación podría resultar en una experiencia educativa mejorada para profesores y alumnos, disminuyendo dificultades logísticas y garantizando que los recursos

correctos se encuentren disponibles a tiempo. Reducir la carga administrativa en los fines de semana le da oportunidad al personal de invertir más tiempo en actividades que añaden valor y mejora el clima laboral dentro de la institución. Además, tener mayor previsibilidad en las asignaciones, ayuda a la preparación docente de manera anticipada y también aporta a la calidad del servicio educativo. Este estudio busca responder a la necesidad actual de modernizar y optimizar los procesos operativos en instituciones educativas, acomodando la administración de recursos a las capacidades tecnológicas actuales y a las expectativas de eficiencia de esta era digital.

### **1.3 Objetivos**

#### *1.3.1 Objetivo General*

Implementar un modelo matemático de optimización para la asignación de profesores a horarios de clase y la distribución de recursos tecnológicos a la estructura de horarios de clase predefinida en el programa de inglés del Instituto de Lenguas Extranjeras, durante el periodo 2024-6B, utilizando Python.

#### *1.3.2 Objetivos Específicos*

- Analizar el proceso actual de asignación de horarios de clase, profesores y recursos tecnológicos en el Instituto de Lenguas Extranjeras mediante una revisión sistemática, identificando y analizando las principales restricciones operativas.
- Diseñar y formular un marco de optimización matemática secuencial que permita optimizar la asignación de profesores a las clases, la distribución de cuentas de videoconferencia y la asignación de libros digitales.
- Implementar computacionalmente los modelos de optimización utilizando Python y la biblioteca PuLP integrando datos reales sobre clases, profesorado y recursos del Instituto correspondientes al periodo 2024-6B.

- Validar la efectividad y eficiencia del marco de optimización propuesto, mediante la verificación del cumplimiento de las restricciones establecidas, la cuantificación del impacto en el uso de recursos y el ahorro de tiempo administrativo.

#### **1.4 Descripción de la Empresa y Puestos de Trabajo**

El Instituto de Lenguas Extranjeras, un centro académico especializado en la instrucción de lenguas extranjeras, proporciona programas personalizados para estudiantes y el público en general. Su finalidad primordial es brindar educación de gran calibre mediante modalidades sincrónicas y en línea, adecuándose a las exigencias del mercado contemporáneo y a las necesidades de aprendizaje permanente.

- **Servicios:** Programas educativos de lenguas foráneas a diversos niveles como principiantes, intermedios, y avanzados.
- **Modalidades:** Sesiones sincronizadas y virtuales para todo el territorio nacional.
- **Recursos tecnológicos:** Plataformas educativas, cuentas de teleconferencia, libros digitales.

La planificación, apertura de clases, asignación de horarios de clase a profesores y asignación de recursos tecnológicos a profesores está a cargo de un equipo administrativo compuesto por:

- **Coordinadores Académicos:** Enfrentan retos al ajustar horarios a la disponibilidad tanto de estudiantes como de profesores en las clases, designan las divisiones de las clases, coordinan con otros programas de idiomas las actividades.
- **Analistas de Sistemas:** Se encargan de gestionar y asignar los recursos tecnológicos de manera eficiente, asegurando que se cumplan las restricciones de licencias y evitan posibles conflictos de uso simultáneo de las plataformas.

- **Secretarias Académicas:** Se encargan de los procesos manuales relacionados con la matriculación de estudiantes, además de enviar la información de las clases a los profesores.

## Capítulo 2

### Estado del Arte y la Práctica

#### 2.1 Antecedentes Investigativos

En el campo de la optimización y la investigación operativa educativa, la asignación de horarios junto con la gestión de recursos son retos constantes, y, por ende, algo muy estudiado. Varios investigadores exploran modelos matemáticos, un método que busca solucionar estas complejidades con la esperanza de mejorar la eficiencia en la administración y el uso optimizado de los recursos tecnológicos. (Apolinar et al., 2020; González Cuevas et al., 2020)

La formulación de horarios académicos y los problemas de asignación afines con frecuencia se categorizan como problemas NP-difíciles (Abdipoor et al., (2023), lo cual denota que la búsqueda de la solución óptima, garantizada por enumeración completa, puede volverse inabordable a nivel computacional para ejemplares de tamaño tangible. Por este motivo, la literatura científica documenta una multiplicidad de metodologías, comprendiendo métodos precisos fundados en la programación matemática, y además aproximaciones heurísticas y metaheurísticas.

La investigación preexistente avala firmemente la utilidad de la programación matemática en la resolución de tales complejidades. En la investigación de Serrano Rugel et al., (2019) en su estudio “*Modelo de investigación operativa para la programación óptima de los horarios de clase en la Facultad de Ciencias Agropecuarias de la Universidad Técnica de Machala*” emplearon un modelo de programación lineal entero-binaria (BILP), resuelto mediante Excel Solver, para optimizar la asignación de aulas; los resultados fueron notorios, mitigando colisiones horarias e impulsando el aprovechamiento de las instalaciones.

En una línea similar, Saltos & Benavides, (2021) en su trabajo *“Formulación e implementación de un modelo de programación entera para la creación de horarios de clases: un caso de estudio en Ecuador”* presentaron un modelo mixto de programación entera lineal, ideado para abordar de manera simultánea la organización de horarios y la asignación de aulas. Este método resultó en una impresionante disminución del 40% en los periodos de planificación además establecieron una distinción importante entre restricciones rígidas y flexibles un planteamiento semejante al de las restricciones férreas y los objetivos atenuados planteados en este estudio.

Considerando los modelos existentes, más allá de que solo se enfoquen en un tipo de recurso, Hernández Vázquez et al., (2020) en su estudio *“Programación matemática binaria por etapas en la elaboración de un horario universitario”* se empleó un modelo matemático de programación binaria por etapas. Este, resuelto con CPLEX, fue diseñado para la asignación de horarios universitarios, y logró una reducción del tiempo de ejecución del 60% en comparación con los métodos manuales, esto es importante. La importancia de este enfoque por etapas para esta investigación es sumamente evidente, ya que se adapta una metodología secuencial semejante, para dividir el problema complejo de la asignación de profesores, las cuentas de videoconferencias y los libros.

Las investigaciones de Urbán-Rivero et al., (2024) y Cornejo Reyes & Robles Bykbaev, (2018) de igual manera confirman las ventajas de la programación entera al crear horarios, lo cual optimiza considerablemente el tiempo y la exactitud frente a la asignación manual; estos resultados son aplicables a la elaboración automática e integración de recursos tecnológicos, bajo limitaciones predefinidas.

Dada la dificultad presente en estas problemáticas, se han examinado técnicas novedosas y también complementarias, focalizando en las metaheurísticas, buscando

soluciones de alta calidad en tiempos computacionales aceptables, aunque la optimalidad global no siempre es asegurada. Acuña-Galván et al., (2022) los aplicaron para optimizar horarios escolares manejando restricciones esenciales y no esenciales, mientras que trabajos como los de Mahlous & Mahlous, (2023) en su artículo "*Student timetabling genetic algorithm accounting for student preferences*" y en su análisis sobre el estado actual en la calendarización universitaria, implementan algoritmos genéticos en los problemas de calendarización, con el fin de investigar extensos campos de búsqueda.

El Recocido Simulado, a menudo referenciado, se presenta como una metaheurística más en el campo de la optimización horaria, este en análisis académicos, como en los trabajos de Brun et al., (2025) en su estudio "*Schedule optimization and staff allocation for airport security checkpoints using guided simulated annealing and integer linear programming*" y Sylejmani et al., (2023) en su trabajo sobre la resolución del problema de horarios universitarios. Variantes mejoradas como los algoritmos SAR y SAR-2P de (Tan et al., 2021) procuran mejorar la exploración y el uso de restricciones suaves.

El algoritmo de Búsqueda Tabú, reputado por eludir los óptimos locales, fue empleado, como ejemplifica, Jartnillaphand et al., (2025) en su investigación "*A tabu search algorithm for Unspecified Parallel Machine scheduling with shift consideration*" con el propósito de configurar soluciones preliminares para problemas de horarios, y complementándolo con métodos diversos. A pesar de la robustez de la búsqueda tabú en exploración heurística, los modelos de programación entera aseguran la adherencia a todas las restricciones inflexibles.

Contrariamente a la anterior, la Programación por Restricciones emerge como un enfoque diferente, dando prioridad a la satisfacción de varias limitaciones aplicadas a las variables, en vez de enfocar la optimización de una función individual. Bashab et al., (2022) subrayan la importancia de tener buenas metodologías para manejar restricciones

complicadas y múltiples criterios; un área donde la Programación por Restricciones destaca notablemente, facilitando la creación de soluciones posibles. Especialmente al tratar con estructuras que usan reglas lógicas bien organizadas y con gran cantidad de combinaciones.

Sobre la Optimización por Enjambre de Partículas y otras metaheurísticas inspiradas en la inteligencia colectiva similares a la examinada por Abdipoor et al., (2023), en su estudio “*Meta-heuristic approaches for the University Course Timetabling Problem*” revelan un rendimiento sorprendente, manejando desafíos NP-complicados, de forma asombrosa, principalmente en contextos amplios o que presentan un comportamiento de cambio.

Los Enfoques Híbridos buscan fusionar las mejores facetas de distintas metodologías. Goh et al., (2022) en su estudio “*A multimodal approach to chaotic renewable energy prediction using meteorological and historical information*” propusieron un enfoque híbrido de búsqueda local (TSSP-ILS) para tratar problemas de horarios difíciles.

Por otro lado, la literatura global muestra muchas evidencias de investigación de operaciones en planeación educativa. Por ejemplo, veamos los trabajos de Chigambayeva et al., (2024) que utilizaron modelos matemáticos y funcionales a la distribución de la carga académica, abriendo camino a la educación superior, respetando regulaciones y restricciones de asignación; o, en otro escenario, los estudios sobre asignación de profesores, considerando sus preferencias, examinado por Chen et al., (2022) que se enfocan en asignaciones docentes basadas en preferencias y usando un modelo de programación entera, para programar cursos universitarios, integrando restricciones estrictas y las preferencias expresadas en encuestas. Esos estudios internacionales emplean modelado de programación, coincidiendo en el deseo de asignaciones más optimizadas.

Finalmente, la investigación de Urbán-Rivero et al., (2024) en su estudio titulado “*Un modelo de programación entera para la generación de horarios universitarios: Un caso de*

*estudio*" y la de Cornejo Reyes & Robles Bykbaev, (2018) "*Diseño e implementación de un algoritmo matemático basado en optimización para la generación de horarios de clases en la Universidad Politécnica Salesiana*" corroboran las ventajas que ofrece el modelo de programación entera binaria y un enfoque que optimiza significativamente el tiempo y la precisión respecto a la asignación manual, lo que resulta aplicable en esta investigación al permitir la generación automatizada de horarios además de la integración de recursos tecnológicos bajo restricciones similares.

Para sintetizar la comparación entre los enfoques de optimización discutidos y justificar la elección metodológica de este estudio, la siguiente tabla presenta un análisis comparativo de sus principales características.

**Tabla 1**

*Comparación de Métodos de Optimización para Problemas de Asignación Académica*

<b>MÉTODO</b>	<b>FORTALEZAS</b>	<b>DEBILIDADES</b>	<b>COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL</b>	<b>ESCALABILIDAD</b>
<b>Programación por Restricciones</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ideal para restricciones lógicas complejas.</li> <li>- Flexible en modelado.</li> <li>- Encuentra soluciones factibles rápidamente</li> <li>- Puede garantizar optimalidad con técnicas avanzadas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Sensible al orden de restricciones</li> <li>- Puede ser lento en instancias grandes sin heurísticas específicas.</li> <li>-Expertise específico requerido.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Exponencial en el peor caso, pero eficiente con buenas heurísticas.</li> </ul>	<b>Moderada:</b> Maneja bien problemas medianos; dificultad en instancias muy grandes sin optimizaciones
<b>Metaheurísticas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Maneja grandes espacios de búsqueda.</li> <li>- Flexible y adaptable.</li> <li>- Encuentra buenas soluciones rápidamente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- No garantiza optimalidad.</li> <li>- Las soluciones pueden ser subóptimas.</li> <li>- Requiere ajuste de parámetros.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Crece con el número de iteraciones y tamaño del problema.</li> <li>- El tiempo depende del número de iteraciones.</li> </ul>	<b>Alta:</b> - Maneja problemas grandes, pero la calidad puede degradarse con el tamaño.

<b>Programación Lineal Entera Binaria</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Encuentra soluciones óptimas.</li> <li>- Amplio soporte de Solver eficientes.</li> <li>- Modelar apropiadamente restricciones lineales</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Demasiado exigente en cálculo para situaciones a gran escala</li> <li>- Requiere una formulación lineal.</li> <li>- El tiempo para la ejecución crece exponencialmente con las variables.</li> </ul>	El potencial, alto, se controla bien en modelos medianos, si se usan los Solver eficientes	<b>Baja:</b> -Según la estructura, la complejidad cambia; unas son enormes, bien; otras necesitan técnicas de descomposición.
---	--	---	--	--

*Nota. Elaboración propia*

La revisión de estos diversos enfoques de optimización evidencia la riqueza de herramientas disponibles para abordar problemas de asignación y calendarización.

La Programación Lineal Entera Binaria (BILP) ofrece ventajas notables frente a los otros enfoques como las metaheurísticas o la programación por restricciones ya que no garantizan que esas soluciones sean óptimas. En cambio, BILP permite asegurar mediante el uso de algoritmos exactos y con la opción de descomponer el problema global en etapas secuenciales reduciendo la complejidad por lo que puede manejarse en tiempos razonables presentando eficiencia computacional, la naturaleza del problema es binaria, las restricciones y el objetivo pueden expresarse linealmente. A diferencia de metaheurísticas o Programación por Restricciones, BILP asegura soluciones óptimas siendo la opción más adecuada para esta investigación.

## 2.2 Fundamentación Legal

### 2.2.1 Ley Orgánica de Educación Superior (LOES)

En el ámbito ecuatoriano, la Ley Orgánica de Educación Superior, LOES, guía el desempeño de las instituciones de educación superior y las entidades educativas especializadas, tipo el Instituto de Lenguas Extranjeras. Esa legislación, que se promulgó en 2010, con unos cambios en 2018, destaca la importancia de optimizar recursos y la eficacia administrativa, cuestiones que están vinculadas a los propósitos de este estudio. De acuerdo

con el Artículo 3 de la LOES, es responsabilidad de las instituciones educativas asegurar la excelencia académica y la eficacia en la administración de sus recursos, fomentando la implementación de tecnologías vanguardistas para optimizar sus procedimientos administrativos y académicos. (Asamblea Nacional del Ecuador, 2018)

### **2.2.2 Ley Orgánica de Educación Intercultural (LOEI)**

La LOEI, establecida en 2011 y modificada en 2023, define los principios de responsabilidad para la educación en Ecuador, incluyendo a las instituciones privadas. El artículo 5 dicta que cualquier institución educativa, ya sean públicas o privadas, tiene que asegurar la calidad de la enseñanza y la eficacia en la administración de sus recursos. Esto avala la importancia de aplicar soluciones tecnológicas que mejoren la organización de horarios y la distribución de recursos tecnológicos. Además, el artículo 48 establece una normativa específica para las instituciones educativas privadas, demandando que se adhieran a criterios de calidad y claridad en la parte administrativa. (SEIBE, 2023)

### **2.2.3 Normativas Internas del Instituto de Lenguas Extranjeras**

El Instituto de Lenguas Extranjeras, observa las directrices internas buscando adopción de soluciones innovadoras para su administración, por lo tanto, procura mejorar continuamente sus procesos internos. El artículo 7 promueve la innovación en los procedimientos administrativos, lo que avala la implementación de instrumentos tecnológicos y normativas de aplicación de recursos tecnológicos dentro de la institución. (ILE, 2024) Estas normativas internas posibilitan el uso del modelo matemático y su implementación dentro del contexto operativo del Instituto.

### **2.2.4 Ley Orgánica de Protección de Datos Personales (LOPDP)**

Promulgada en 2021, esta ley establece los lineamientos para el tratamiento adecuado de datos personales en Ecuador. Aunque el modelo matemático propuesto utiliza

principalmente datos institucionales, es esencial garantizar que la información relacionada con estudiantes, profesores y personal administrativo se maneje de acuerdo con los principios de privacidad y seguridad establecidos en esta ley. Además, emplear el modelo matemático se une a los estándares internacionales, para manejar datos estadísticos, y seleccionar decisiones con fundamentos. (Asamblea Nacional del Ecuador, 2021)

### **2.2.5 Normas ISO para la Administración de la Calidad**

Las directrices de la norma ISO 9001 apunta siempre hacia la excelencia operativa. Al establecer estándares de gestión de calidad de primer nivel, la ISO 9001 recuerda con meticulosa insistencia. Dichas regulaciones no solo aportan legitimidad, sino que funcionan como el sello de confiabilidad y efectividad que todo sistema aspira a merecer. (ISO 9001, 2020)

## **2.3 Fundamentación Teórica**

Los problemas de calendarización se definen como la asignación de recursos a objetos en un espacio y tiempo específicos, sujetos a restricciones, buscando optimizar un conjunto de indicadores (González Cuevas et al., 2020). La asignación de horarios académicos no es, como a veces se piensa, un simple ejercicio de lógica o calendario es un rompecabezas institucional donde cada pieza profesores, aulas, recursos tecnológicos debe encajar sin que se rompa la figura ni se descuadre el marco normativo, es un problema multifacético. (Saltos Atencia & Benavides Castillo, 2021)

El verdadero desafío es concebir e implementar estrategias que, más que repetir viejos métodos con traje nuevo, se funden en modelos matemáticos capaces de adaptarse con inteligencia a las necesidades reales de la institución.

### **2.3.1 Optimización Matemática**

Un problema de optimización consiste en determinar el mejor valor de una función, la cual se denomina función objetivo, sobre un conjunto de posibles soluciones que cumplen

ciertas condiciones que se denominan restricciones. Un problema de optimización se puede expresar como:

Optimizar  $f(x)$  (minimizar o maximizar)

sujeto a

$$x \in S$$

Donde:

- $f(x)$ : Es la función objetivo que cuantifica el desempeño o costo de una solución dada mediante la minimización o maximización.
- $x$  : Es el vector de variables de decisión, son los parámetros que se pueden modificar para influir en el valor de la función objetivo. Estas variables, representadas por  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , son las incógnitas cuya determinación es el objetivo del proceso de optimización.
- $S$ : es el conjunto factible o dominio de  $x$ , definido por las restricciones impuestas que deben cumplirse para que una solución sea considerada válida. Pueden expresarse en forma de ecuaciones o inecuaciones:

**Restricciones de igualdad:**  $h_j(x) = 0$  para  $j = 1, \dots, p$

**Restricciones de desigualdad:**  $g_i(x) \leq 0$  para  $i = 1, \dots, m$

Los problemas de optimización se pueden clasificar en función de la naturaleza de sus variables y por estructura matemática. (Talbi, 2024)

Para los problemas de optimización según la naturaleza de las variables se mencionan los siguientes:

- **Optimización Continua:** Las variables de decisión pueden tomar cualquier valor real dentro de un intervalo continuo.

- **Optimización Discreta:** Las variables de decisión están restringidas a valores discretos, como números enteros o binarios.
- **Optimización Combinatoria:** Considerada un subgrupo de la optimización discreta, se caracteriza por tener un conjunto de soluciones factibles finito, pero potencialmente muy grande

Según Aardal et al., (2023) los problemas de optimización según la estructura matemática se pueden clasificar de manera sistemática analizando la naturaleza de la función objetivo  $f$ , las funciones de restricciones de desigualdad  $g_i$ , las restricciones de igualdad  $h_j$  y el conjunto factible  $X$ .

- **Programación Lineal (PL):**  $f, g_i, h_j$  son lineales, y  $X \subseteq R^n$ .
- **Programación No Lineal (PNL):** Al menos una de  $f, g_i, h_j$  es no lineal.
- **Programación Entera Mixta (PEM):** Combina variables continuas y enteras  $X \subseteq R^n \times Z^k$  con restricciones lineales

Optimización impulsa la medición de decisiones al enfrentar recursos limitados y objetivos contrapuestos, algo vital en entornos educativos, que deben lidiar con operativas restrictivas y complicadas. (Espín Guerrero et al., 2022) Dadas las restricciones estructurales del Instituto de Lenguas Extranjeras, se usará un enfoque determinista, por la naturaleza discreta del problema, priorizando elecciones con bases sólidas y predecibles. (Xue & Pan, 2024)

### 2.3.2 Programación Lineal

Entre las herramientas del vasto arsenal de la optimización matemática, la programación lineal ocupa un lugar privilegiado. No por casualidad, sino por méritos propios: su capacidad para resolver problemas reales con una eficacia casi quirúrgica la ha convertido en uno de los métodos más estudiados, citados y aplicados en la historia de la

ciencia operativa. En términos generales, se trata de maximizar o minimizar una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones igualmente lineales, expresadas en forma de ecuaciones o desigualdades.

La programación lineal actúa como un traductor entre el mundo real y la claridad de los números, este método permite la posibilidad de representar, modelar y simular decisiones complejas en contextos donde los recursos son limitados, los tiempos estrechos y los errores costosos.

A continuación, se presentan los pasos para la construcción de un modelo de programación lineal: (Guerrero Salas, 2022)

1. **Formulación del modelo:** Organización de los datos del problema para entender de mejor manera cómo se relacionan las variables y parámetros.
2. **Análisis de la información:** Una fase primordial y que no debe ser pasada por alto para identificar los objetivos que se necesitan y las limitaciones que están presentes en el problema es analizar la información.
3. **Definición de variables:** Establecer qué variables representan las cantidades desconocidas. Escoger y definir correctamente las variables es importante para interpretar y usar el modelo.
4. **Establecimiento de la función objetivo:** Establece cómo optimizar el modelo. Esta función, según el escenario, busca maximizar algo, o minimizar alguna otra, depende del caso.
5. **Determinación de restricciones:** Para determinar las restricciones, cada una de ellas se deben expresar con ecuaciones o inecuaciones, de esta forma se delimita las soluciones posibles del modelo.

6. **Solución del modelo matemático:** La solución del modelo matemático es la mezcla entre la función objetivo y las restricciones, dando como resultado un modelo matemático listo para que pueda ser resuelto mediante técnicas de optimización correctas.
7. **Prueba del modelo y validación de la solución:** Una vez obtenido un resultado, verificar su concordancia con la realidad del problema es indispensable; es en esta etapa dónde se valora si se respetan las restricciones, la viabilidad y la usabilidad de la solución propuesta.
8. **Implementación del modelo:** El modelo puede implementarse en el mundo real para tomar decisiones y mejorar procesos, siendo intrínseco al contexto del estudio.
9. **Control y retroalimentación:** Pues, considerando que el modelo ofrece soluciones óptimas, habrá que hacer ajustes sobre la marcha, eso se hace para afinar el modelo. Es importante observar cuidadosamente los cambios, para evitar errores en el modelo.  
  
Esta fase garantiza la adaptabilidad del modelo a situaciones dinámicas.

### 2.3.2.1 Forma General de un Problema de Programación Lineal

A continuación, se muestra la ecuación de un problema PL en su forma general (1).

$$\begin{array}{l}
 \min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
 \text{s.t.} \quad A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n \oplus b_1 \\
 \quad \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n \oplus b_2 \\
 \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \quad \quad A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n \oplus b_m
 \end{array} \quad (1)$$

- $A_{\{ij\}}, c_j, b_i$  donde  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  y  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  son números reales conocidos y son los datos de entrada del problema
- $\oplus$  define el tipo de restricción, = de igualdad,  $\geq$  de mayor o igual o  $\leq$  de menor igual

- $min$  corresponde a un problema de minimización
- $X_1, X_2, \dots, X_n$  son las variables de decisión que desconocemos del problema

Al resolver un problema de programación lineal, buscamos identificar los valores óptimos de las variables de decisión que minimizan la función objetivo, sujetas a un conjunto de restricciones que deben cumplirse.

### 2.3.2.2 Forma Matricial de un Problema de Programación Lineal

En notación matricial, la ecuación (1) se define como:

$$min z = c^T x \quad (2)$$

sujeto a

$$Ax \oplus b$$

$$x \geq 0$$

- $x \in R^n$  es el vector de variables de decisión (dimensión  $n \times 1$ ).
- $c \in R^n$  es el vector de coeficientes de la función objetivo (dimensión  $n \times 1$ ).
- $A \in R^{m \times n}$  es la matriz de coeficientes de las restricciones (dimensión  $m \times n$ ).
- $b \in R^m$  es el vector de términos independientes (dimensión  $m \times 1$ ).
- $\oplus$  vector del tipo de restricción (dimensión  $m \times 1$ ), donde:
  - 0: restricción de igualdad (=)
  - -1: define una restricción de mayor o igual ( $\geq$ )
  - 1: define una restricción de menor igual ( $\leq$ )
  - $x \geq 0$ : no negatividad

### 2.3.2.3 Forma Canónica de un Problema de Programación Lineal

Un problema de Programación Lineal (PL) en su forma canónica exhibe todas sus restricciones, estas son desigualdades, menores o iguales con cada variable del modelo

siendo no negativa. Tal estructura se muestra en la ecuación (3), donde las limitaciones se expresan solo, con el operador  $\leq$  y además, todas las variables se limitan a valores positivos o cero.

$$\begin{aligned}
 \min z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
 \text{s.t.} \quad &A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n \leq b_1 \\
 &A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n \leq b_2 \\
 &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n \leq b_m \\
 x_j &\geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{3}$$

### 2.3.2.4 Forma en Sumatorias de un Problema de Programación Lineal

En un problema de Programación Lineal (PL), las sumatorias son una forma común de representar la suma de múltiples términos que siguen un patrón. Estas sumatorias se utilizan tanto en la función objetivo como en las restricciones del modelo. A continuación, se detalla su formulación general.

$$\min z = \sum_{j=1}^n C_j X_j \tag{4}$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j &= b_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \text{ (restricciones de igualdad)} \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j &\leq b_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \text{ (restricciones de desigualdad)} \\
 X_j &\geq 0 \quad \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ (no negatividad)}
 \end{aligned}$$

### 2.3.3 Programación Lineal Entera (PLE)

La Programación Lineal Entera es una extensión de la Programación Lineal (PL) en la que algunas o todas las variables de decisión están restringidas a tomar valores enteros. Su forma general es:

$$\text{Minimizar (o Maximizar)} \quad Z = c^T x \tag{5}$$

sujeto a

$$Ax \leq b,$$

$$x \geq 0,$$

$$x_j \in Z,$$

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  variables de decisión.
- $Ax \leq b$  representa las restricciones del sistema
- $x_j \in Z$  algunas o todas las variables deben ser enteras

### 2.3.3.1 Tipos de Programación Lineal Entera

Existen diferentes variantes de problemas de PLE, dependiendo de las restricciones impuestas a las variables:

- **PLE Pura:**  $x_j \in Z$  donde todas las variables son enteras
- **PLE Mixta (PLEM):** Algunas variables son enteras y otras son continuas.
- **PLE Binaria (BILP):**  $x_j \in \{0,1\}$  Las variables solo pueden tomar valores binarios, este caso es común en problemas de decisión.

### 2.3.4 Programación Entera Mixta (PEM)

La Programación Entera Mixta se encarga de problemas en los cuales algunas variables están restringidas a tomar valores enteros mientras que otras pueden ser continuas. Esta combinación permite modelar de manera precisa situaciones en las que se deben tomar decisiones discretas junto con decisiones que pueden variar de manera continuas. (Saeik et al., 2021) Se expresa generalmente de la forma:

$$\text{Minimizar (o Maximizar)} Z = c^T x + d^T y \quad (6)$$

sujeto a

$$Ax + By \leq b,$$

$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

$$x_i \in Z \text{ para algunas variables (enteras),}$$

$$y_j \in R \text{ para algunas variables (continuas),}$$

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ : variables enteras

- $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ : variables continuas
- $Ax + By \leq b$ : restricciones del sistema

Entre los algoritmos más utilizados para resolver problemas MILP, se encuentran los siguientes:(Mirhosseini et al., 2023)

- **Branch and Bound:** Divide el problema en subproblemas más pequeños o en ramificaciones y utiliza cotas para descartar ramas que no pueden contener la solución óptima.
- **Branch and Cut:** Combina el enfoque de *Branch and Bound* con la generación dinámica de cortes con inecuaciones que eliminan soluciones no enteras que ayudan a acotar el espacio factible.
- **Cortes y Reformulaciones:** Se aplican técnicas de corte que fortalecen la formulación del problema y aceleran la convergencia hacia la solución óptima.

### 2.3.5 Programación No Lineal (PNL)

La Programación No Lineal aborda problemas de optimización de optimización de funciones objetivo y restricciones que presentan relaciones no lineales. Esta característica amplía su aplicabilidad a problemas del mundo real con relaciones complejas entre variables, pero también incrementa la complejidad computacional y teórica en comparación con la Programación Lineal (PL). (Elmaghraby, 2003)

En la PNL, el problema se formula generalmente de la siguiente forma:

- **Función Objetivo:** Se busca optimizar (maximizar o minimizar) una función  $f(x)$ , donde  $x \in R^n$  y  $f(x)$  es una función no lineal.
- **Restricciones:** El problema puede incluir restricciones de igualdad  $h_i(x) = 0$  y restricciones de desigualdad  $g_i(x) \leq 0$ , donde  $h_i$  y  $g_i$  son funciones no lineales.

La existencia y unicidad de la solución óptima dependen de las propiedades de convexidad de la función objetivo y del conjunto factible, para ello se han desarrollado diversos métodos (García y Ruiz, 2022), entre los que se destacan:

- **Método de Gradiente y Gradiente Conjugado:** Técnicas iterativas que emplean los datos de la derivada para desplazarse en la dirección de disminución del valor de la función.
- **Método de Newton y sus variantes:** Emplean la segunda derivada para obtener una convergencia más rápida, particularmente cerca del punto ideal.
- **Métodos de Puntos Interiores:** Ideales para problemas grandes y complejos, en los que se transforman las restricciones en penalizaciones dentro de la función objetivo.
- **Algoritmos Evolutivos y Metaheurísticos:** En situaciones donde la función muestra varios óptimos locales o es altamente no lineal, técnicas como algoritmos genéticos, recocido simulado o enjambres de partículas pueden proporcionar soluciones cercanas.

### 2.3.6 Python en la Implementación de Modelos de Optimización

Dentro del ámbito de la Matemática Aplicada, resolver problemas de optimización demanda un robusto fundamento teórico y la habilidad para convertir ideas abstractas en algoritmos numéricos. Python se ha establecido como uno de los lenguajes de programación más empleados en matemática aplicada y optimización, gracias a su versatilidad, sintaxis clara y gran accesibilidad a bibliotecas especializadas. Además, es una herramienta completa para la implementación y comprobación de modelos matemáticos, apoyando la rigurosidad de los métodos convencionales y descubriendo nuevos horizontes en la optimización. (Lam et al., 2015) Este procedimiento se fundamenta en:

- **Declaración de Variables y Parámetros:** Se emplean estructuras de datos para ilustrar las variables que conforman el problema.
- **Formulación de la Función Objetivo y Restricciones:** La utilización de librerías simplifica el establecimiento simbólico de las ecuaciones, posibilitando su integración con solucionadores optimizados.

### ***2.3.6.1 Ecosistema de Librerías Matemáticas en Python***

Python dispone de una extensa variedad de bibliotecas enfocadas en optimización, las cuales facilitan la implementación de modelos matemáticos. (Pinargote-Zambrano et al., 2024) A continuación, se describen las siguientes bibliotecas:

- **NumPy y SciPy:** Ofrecen los fundamentos para operaciones de matrices, cálculo numérico y algoritmos de optimización constante.
- **PuLP y Pyomo:** Estas librerías facilitan la modelación explícita de problemas de PL, PLE y MILP. Su estructura permite transformar de manera directa una formulación matemática en un modelo informático, manteniendo la estructura y las características teóricas del problema.
- **CVXPY:** facilita la formulación de problemas matemáticos que aseguran la convergencia hacia el óptimo global, siempre y cuando se satisfagan las condiciones de convexidad.

### **2.3.7 Modelado Matemático para la Asignación de Clases y Recursos a Profesores**

La integración de modelos matemáticos de optimización con un lenguaje de programación, como Python, permite transformar la planificación y ejecución de tareas complejas en contextos educativos. Para el problema específico de la asignación de clases y recursos tecnológicos en el programa de inglés del Instituto de Lenguas Extranjeras, se puede

emplear la Programación Lineal Entera Binaria (BILP), sujeto a restricciones institucionales y pedagógicas. Este tipo de modelo es adecuado porque las decisiones fundamentales son de naturaleza binaria, además, un enfoque de modelado secuencial, descomponiendo el problema en etapas distintas reduce la complejidad del problema global.

Este enfoque secuencial permite manejar la complejidad computacional y abordar los distintos objetivos y conjuntos de restricciones de manera estructurada. Aunque cada etapa tiene su propia función objetivo específica, el marco global busca una solución eficiente y factible que respete todas las limitaciones institucionales, pedagógicas y operativas identificadas. (Urbán-Rivero et al., 2024)

Finalmente, se busca la asignación óptima de profesores a las clases predefinidas, maximizando una función objetivo basada en preferencias y sujeto a restricciones de carga, aptitud y disponibilidad horaria, que se optimice la distribución de licencias de videoconferencia a los profesores activos, minimizando un costo ponderado que prioriza no usar licencias adicionales y luego consolida el uso de las base, cumpliendo reglas estrictas de compartición y compatibilidad temporal, a continuación determinar la asignación de libros a clases, asegurando compatibilidad de módulo y respetando límites de uso simultáneo, mientras minimiza el número total de licencias distintas requeridas.(Hernández Vázquez et al., 2020)

## Capítulo 3

### Diseño Metodológico

#### 3.1 Enfoque de la Investigación

La investigación que se realizó tuvo un enfoque mixto, integrando metodologías cuantitativas y cualitativas para abordar de manera integral el problema de la asignación de profesores y recursos tecnológicos en el Instituto de Lenguas Extranjeras. El componente cuantitativo, se basó en la Investigación de Operaciones y la Optimización Matemática donde se desarrollaron y resolvieron modelos de Programación Lineal Entera Binaria (BILP) utilizando Python y la librería PuLP. Este enfoque permitió modelar formalmente las restricciones operativas y los objetivos de eficiencia, generando soluciones óptimas para la asignación de profesores, cuentas de videoconferencia y libros digitales. La evaluación cuantitativa se centró en métricas de eficiencia derivadas de las soluciones del modelo, como el número de recursos utilizados y el cumplimiento de restricciones. (Hazimeh et al., 2020)

Simultáneamente, el enfoque cualitativo se enfocó en analizar el proceso actual de asignación mediante la revisión de documentación interna y reuniones de trabajo con la coordinación académica y el área de sistemas, para identificar, verificar y refinar las restricciones operativas y los objetivos que alimentaron el modelo matemático. Este componente cualitativo aseguró que el modelo cuantitativo sea matemáticamente robusto, operativamente relevante y alineado con las necesidades reales de la institución. La combinación de ambos enfoques garantizó una solución técnicamente sólida y contextualmente apropiada.

#### 3.2 Diseño de la Investigación

El diseño de la investigación fue aplicado, no experimental y transversal. En primer lugar, fue aplicado porque su propósito fundamental fue resolver un problema práctico y

específico del Instituto de Lenguas Extranjeras mediante el desarrollo e implementación de una herramienta de optimización basada en modelos matemáticos. La investigación buscó generar una solución directamente utilizable para mejorar la eficiencia operativa del proceso de asignación.(Gavidia et al., 2021)

Por otro lado, fue no experimental, ya que no se manipularon variables de manera controlada para observar efectos. En lugar de ello, se modeló el sistema existente con sus reglas y datos actuales, analizando y optimizando el proceso tal como operaba, sin realizar intervenciones experimentales en el entorno real durante la fase de modelado. (Guevara Alban et al., 2020)

Finalmente, el diseño fue transversal, puesto que el análisis y la aplicación del modelo se centraron en un punto específico en el tiempo: el período académico 2024-6B. Los datos de entrada, como clases, profesores, recursos disponibles y reglas, correspondieron a este período, y la solución generada fue específica para él, aunque la metodología propuesta podría ser replicable en otros ciclos académicos.

La estructura metodológica de la investigación siguió una secuencia lógica característica de los proyectos de investigación de operaciones. (Flores Tapia & Flores Cevallos, 2021)

1. Diagnóstico del proceso actual y recopilación de datos operativos.
2. Formulación del modelo matemático secuencial de conjuntos, parámetros, variables, funciones objetivo y restricciones.
3. Implementación computacional del modelo en Python utilizando la librería Pulp.
4. Resolución de los modelos con datos del periodo 2024-6B para obtener las asignaciones óptimas.

5. Validación y análisis de las soluciones obtenidas, verificando cumplimiento de restricciones y evaluando eficiencia.

Este enfoque metodológico asegura una resolución ordenada del problema, permitiendo obtener soluciones efectivas y aplicables.

### **3.3 Tipo de Investigación**

La investigación se clasificó como aplicada y operativa, fue aplicada porque se enfocó directamente en solucionar un problema práctico del mundo real mediante la aplicación de conocimiento científico y técnico. Además, fue operativa porque utilizó el modelo matemático y herramientas computacionales como base para mejorar la toma de decisiones operativas y la eficiencia de los procesos administrativos dentro de la organización. El objetivo fue proporcionar una herramienta o solución que impactara directamente en las decisiones administrativas y operativas del Instituto, con posibilidad de replicación en otros períodos académicos. (Castro Maldonado et al., 2023)

### **3.4 Nivel de Investigación**

El estudio se desarrolló en un nivel descriptivo. Se realizó un análisis detallado del sistema actual, describiendo el proceso de asignación, los recursos involucrados, los actores y principalmente se identifican y caracterizan las restricciones operativas existentes para la correcta formulación del modelo. A continuación, se prescribió una solución óptima o mejorada donde se aplicó el conocimiento para generar una solución concreta que optimiza un objetivo sujeto a las restricciones descritas.(Mesa et al., 2022)

### **3.5 Técnicas e Instrumentos de Recolección De Datos**

La recopilación de datos para esta investigación se centró en obtener la información precisa y completa necesaria para parametrizar los modelos de optimización. La técnica

utilizada en la presente investigación es la de análisis documental, la cual se basa en la revisión de documentos internos del Instituto para extraer los parámetros cuantitativos. Estos incluyen horarios de clase planificados, clases en el ciclo, base de datos de estudiantes matriculados en el ciclo, cantidad de profesores contratados y de planta, formulario con las preferencias de nivel, disponibilidad y número de clases que pueden enseñar los profesores, inventarios de cuentas de videoconferencia y libros digitales durante el periodo 2024-6B.

Además, se realizaron entrevistas semiestructuradas o reuniones de trabajo focalizadas con personal de coordinación académica y del área de sistemas para validar la comprensión del proceso, clarificar reglas ambiguas, identificar restricciones no documentadas y asegurar que los objetivos del modelo se alineen con las necesidades prácticas de la institución. (Pérez Pravia et al., 2023)

### **3.6 Técnicas para el Procesamiento e Interpretación de Datos**

El procesamiento e interpretación de datos en esta investigación se centran en los datos de entrada y salida del modelo de optimización. A continuación, se describen las técnicas utilizadas para cada fase del proceso.

- **Preprocesamiento de Datos:** Los datos recopilados fueron limpiados y estructurados utilizando la librería Pandas en Python. Esto incluyó la estandarización de formatos, la creación de identificadores únicos, la transformación de datos para generar parámetros del modelo y el cálculo de conjuntos derivados.
- **Modelado y Resolución Matemática:** Se utilizó la librería PuLP en Python para implementar los tres modelos BILP secuenciales. Para cada etapa, se definieron las variables de decisión, la función objetivo, las restricciones mediante

expresiones lineales. La resolución de cada modelo se efectuó invocando al Solver de código abierto CBC (*Coin-or Branch and Cut*) a través de Pulp.

- **Análisis de Resultados del Modelo:** Tras la resolución, se interpretaron los resultados donde se examinó el estado de la solución reportado por Pulp, además se obtuvieron los valores de las variables de decisión y de la función objetivo. A continuación, se generaron tablas utilizando Pandas y gráficos para presentar las asignaciones, el uso de recursos, y métricas de eficiencia. Por último, se validó el cumplimiento de restricciones.

### **3.7 Población y Muestra**

La presente investigación se enfoca en la optimización de un proceso operativo específico. En consecuencia, la población objetivo abarca el universo completo de los elementos operativos relevantes para el periodo 2024-6B, que incluye 46 clases únicas, 4 horarios predefinidos, 28 profesores contratados, 2 profesores de planta, 20 cuentas de videoconferencia base y 11 licencias de libros digitales distintas.

Dado que el propósito es determinar la asignación óptima para todos estos elementos bajo diversas restricciones, no se aplica un muestreo estadístico, sino que se trabaja con el conjunto completo de los datos operativos de este periodo. El personal administrativo, valida las restricciones y proporciona el contexto operativo, aunque no constituye la población estadística objeto del análisis cuantitativo del modelo. Esta estrategia permite obtener una visión integral del proceso y asegura la pertinencia y aplicabilidad de los resultados en el contexto institucional.

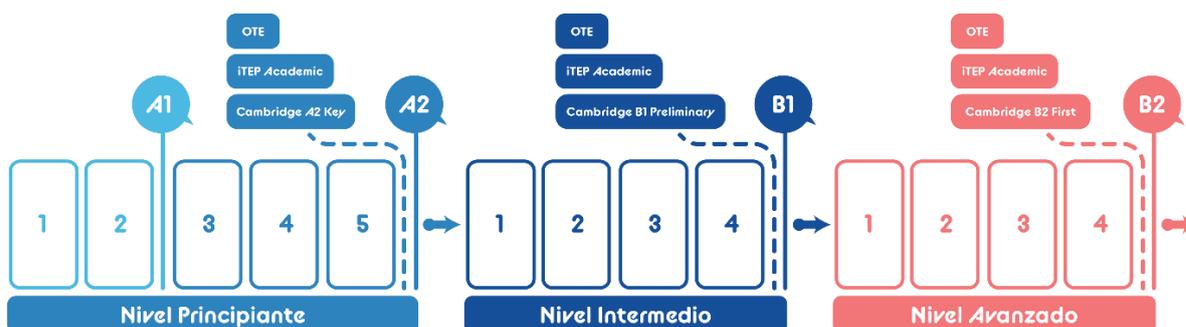
### **3.8 Contexto Institucional**

El Instituto de Lenguas Extranjeras ofrece varios programas de idiomas, entre ellos el programa de inglés que está dividido en tres niveles: principiante, intermedio y avanzado,

cada uno compuesto por diferentes módulos. El nivel principiante tiene cinco módulos (B1, B2, B3, B4, B5), el nivel intermedio tiene cuatro módulos (I1, I2, I3, I4) y el nivel avanzado tiene cuatro módulos (A1, A2, A3, A4).

**Figura 3**

*Niveles y módulos del programa de inglés del instituto de lenguas extranjeras*



*Nota: Tomado de [www.ile.ec](http://www.ile.ec)*

Las clases se imparten de lunes a jueves en un ciclo de dos meses de duración. Cada clase está definida por la combinación de un módulo y horario, posterior a ello se asigna un profesor. Existen cuatro horarios disponibles que son de 08:00-10:00, 15:00-17:00, 17:00-19:00 y 19:00-21:00, donde la apertura de clases en cada franja horaria depende del número de estudiantes matriculados en el ciclo 2024-6B, reflejando muy poco tiempo para la planificación.

Las variables seleccionadas para esta investigación son las clases del ciclo, la cantidad de estudiantes matriculados, la cantidad de profesores contratados y de planta, la disponibilidad de los profesores, número de clases que pueden tomar en el ciclo y preferencia de los profesores para enseñar en determinados niveles, así como el número de cuentas de videoconferencia y libros digitales disponibles.

Además, conocer la distribución por módulos y edades permite asignar a los estudiantes a los grupos correspondientes desde coordinación, por lo que:

- La cantidad de estudiantes en principiante es de 172 con edades predominantes de 11 a 14 años.
- La cantidad de estudiantes en intermedio es de 173 con edades predominantes de 15 a 18 años.
- La cantidad de estudiantes en avanzado es de 93 con edades predominantes de 18 en adelante.

Del total los estudiantes matriculados, la mayoría se encuentran en el nivel principiante, lo que refleja una gran cantidad de estudiantes que están iniciando su aprendizaje del idioma. La distribución por edad muestra una correlación directa con el nivel de conocimiento, con los estudiantes más jóvenes en principiante, los de mediana edad en el intermedio y los estudiantes más adultos en avanzado.

En la tabla 2 se presenta la distribución de estudiantes matriculados en el ciclo 2024-6B, detallada según las edades.

**Tabla 2**

*Cantidad de estudiantes matriculados según edad y módulo*

EDAD	B1	B2	B3	B4	B5	I1	I2	I3	I4	A1	A2	A3	A4
11	2	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	5	2	2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	2
13	0	0	0	0	5	2	3	0	2	1	1	0	1
14	0	2	1	2	2	3	1	1	1	3	0	0	3
15	0	4	1	6	5	4	4	2	6	1	1	2	4
16	0	1	3	5	0	2	3	1	4	1	4	2	6
17	2	4	1	2	1	4	4	3	5	2	2	1	6
18	0	2	1	3	1	3	2	4	2	6	1	3	3
19	1	0	2	1	2	0	1	1	3	1	0	1	0
20	3	1	1	0	3	2	1	0	3	0	0	1	0
21	3	1	1	0	0	3	1	0	2	1	0	1	0
22	3	1	0	0	2	1	0	0	1	1	0	2	1
23	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0
24	2	0	3	1	0	1	2	0	3	1	1	0	2
25	1	2	0	1	1	0	2	2	3	1	1	0	2
26	0	0	1	2	1	3	1	0	2	2	1	2	3
27	2	1	0	2	0	3	2	1	2	2	0	0	1
28	2	0	0	2	0	1	2	2	0	2	0	0	0
29	1	1	1	0	2	0	3	1	5	0	0	0	2

30	0	4	0	0	0	1	3	1	1	0	0	0	1
31	2	3	2	2	4	1	2	2	1	0	0	0	1
32	0	0	1	0	4	4	6	2	1	3	0	0	1
33	1	1	1	2	3	2	0	2	1	2	2	0	1
34	0	1	0	1	3	0	3	3	0	0	1	1	2
35	4	3	0	0	3	2	1	1	2	1	0	0	0
36	2	0	2	0	5	1	0	0	1	0	1	1	1
37	4	2	2	0	2	0	0	2	2	1	0	0	0
38	1	0	1	2	2	3	1	2	3	1	1	0	0
39	3	1	0	3	4	0	0	1	3	1	1	0	0
40	1	0	0	1	0	0	1	0	2	1	2	1	1
41	0	1	0	3	0	1	2	0	1	1	1	0	0
42	1	0	0	2	1	1	2	1	0	0	0	1	2
43	0	0	0	1	1	0	0	1	1	2	0	2	0
44	1	0	1	0	0	0	2	0	0	0	2	0	1
45	0	0	0	0	0	1	2	0	0	2	0	1	2
46	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
47	2	1	0	0	1	2	0	1	1	0	1	1	1
48	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	0	0	1	2	1	0	1	0	2	0	1	0	0
50	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
51	0	1	0	0	1	2	0	1	0	1	0	1	0
52	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
53	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
54	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
56	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	0	0
58	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
59	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
60	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

*Nota. Elaboración propia*

El personal de coordinación decide la apertura de una clase si se tiene un mínimo de ocho estudiantes o supere el máximo de quince estudiantes; si se excede este límite, la clase se divide de forma equitativa, separando a los estudiantes por edad, lo que implica la asignación de otro profesor para la nueva clase dividida, todo este proceso se lo realiza de forma manual ya que coordinación supervisa las divisiones y aperturas de las clases, estos listados se obtienen desde una base de datos de inscripciones siendo esta la información de entrada para el modelo matemático. En la tabla 3 se presenta el listado de módulos, horarios, paralelos y estudiantes matriculados en el ciclo 2024-6B, que se utiliza para la asignación de profesores y recursos.

**Tabla 3***Módulos, horarios, paralelos y estudiantes matriculados en el ciclo 2024-6B.*

<b>MÓDULO</b>	<b>HORARIO</b>	<b>PARALELO</b>	<b>#ESTUDIANTES</b>
B1	08H00-10H00	A	10
B1	17H00-19H00	A	10
B1	19H00-21H00	A	12
B1	19H00-21H00	B	10
B2	08H00-10H00	A	6
B2	17H00-19H00	A	10
B2	19H00-21H00	A	7
B2	19H00-21H00	A	10
B3	08H00-10H00	A	4
B3	17H00-19H00	A	4
B3	19H00-21H00	A	17
B4	08H00-10H00	A	7
B4	15H00-17H00	A	8
B4	19H00-21H00	A	12
B4	19H00-21H00	B	9
B5	08H00-10H00	A	7
B5	17H00-19H00	A	6
B5	19H00-21H00	A	13
B5	19H00-21H00	B	10
I1	08H00-10H00	A	5
I1	17H00-19H00	A	11
I1	19H00-21H00	A	10
I1	19H00-21H00	B	13
I2	08H00-10H00	A	7
I2	17H00-19H00	A	9
I2	19H00-21H00	A	16
I2	19H00-21H00	B	14
I3	08H00-10H00	A	8
I3	17H00-19H00	A	13
I3	19H00-21H00	A	6
I3	19H00-21H00	B	10
I4	08H00-10H00	A	8
I4	17H00-19H00	A	13
I4	19H00-21H00	A	14
I4	19H00-21H00	B	16
A1	08H00-10H00	A	8
A1	17H00-19H00	A	9
A1	19H00-21H00	A	12
A2	08H00-10H00	A	2
A2	17H00-19H00	A	9

A2	19H00-21H00	A	11
A3	08H00-10H00	A	4
A3	19H00-21H00	A	12
A4	08H00-10H00	A	4
A4	17H00-19H00	A	12
A4	19H00-21H00	A	10
<b>TOTAL</b>		<b>46</b>	<b>438</b>

*Nota. Elaboración propia*

La tabla 4 muestra los resultados del registro de disponibilidad y preferencias realizada a los profesores antes del inicio del ciclo 2024-6B, con el propósito de determinar los módulos, horarios y número de clases que están dispuestos a enseñar. En la columna "Módulos" el valor de 1 indica que el profesor tiene preferencia para enseñar ese módulo. Por otro lado, la columna "Horarios" indica la disponibilidad del profesor para enseñar en ese horario con un valor de 1. En la columna "Número de Clases" se especifica la cantidad de clases que el profesor estaría dispuesto a impartir en el ciclo. Para los 28 profesores de contrato, el número máximo de clases por profesor es de 3, mientras que los 2 profesores de planta tienen asignadas 3 clases obligatorias.

**Tabla 4**

*Preferencia y disponibilidad de profesores por módulo, horario y número de clases*

PROFESOR	MÓDULOS												HORARIOS				#CLASES	
	B1	B2	B3	B4	B5	I1	I2	I3	I4	A1	A2	A3	A4	8a10	3a5	5a7		7a9
Profesor 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
Profesor 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	2
Profesor 3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
Profesor 4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
Profesor 5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
Profesor 6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
Profesor 7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
Profesor 8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
Profesor 9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	2
Profesor 10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
Profesor 11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	3
Profesor 12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	2
Profesor 13	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	3

Profesor 14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	2	
Profesor 15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	2
Profesor 16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	
Profesor 17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	2
Profesor 18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	2
Profesor 19	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2
Profesor 20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
Profesor 21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2
Profesor 22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2
Profesor 23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	2
Profesor 24	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
Profesor 25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
Profesor 26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
Profesor 27	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	2
Profesor 28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	3
Planta 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	3
Planta 2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3

*Nota. Elaboración propia*

La institución tiene un total de 20 cuentas de videoconferencia para el programa de inglés en el ciclo 2024-6B, con la opción de adquirir más licencias según la demanda de clases. A continuación, se detalla el número de libros digitales que deben ser distribuidos a los profesores en base a los módulos que enseñarán.

**Tabla 5**

*Libros digitales disponibles para cada módulo*

<b>LIBRO DIGITAL</b>	<b>TÍTULO</b>	<b>MÓDULOS</b>
Libro 1	AEF STARTER	B1, B2
Libro 2	AEF STARTER	B1, B2
Libro 3	AEF STARTER	B1, B2
Libro 4	AEF 1	B3, B4
Libro 5	AEF 1	B3, B4
Libro 6	AEF 2	B5, I1
Libro 7	AEF 3	I2, I3
Libro 8	AEF 4	I4, A1
Libro 9	AEF 4	I4, A1
Libro 10	AEF 5	A2, A3
Libro 11	FCE	A4

*Nota. Elaboración propia*

### 3.9 Programación Lineal Entera Binaria

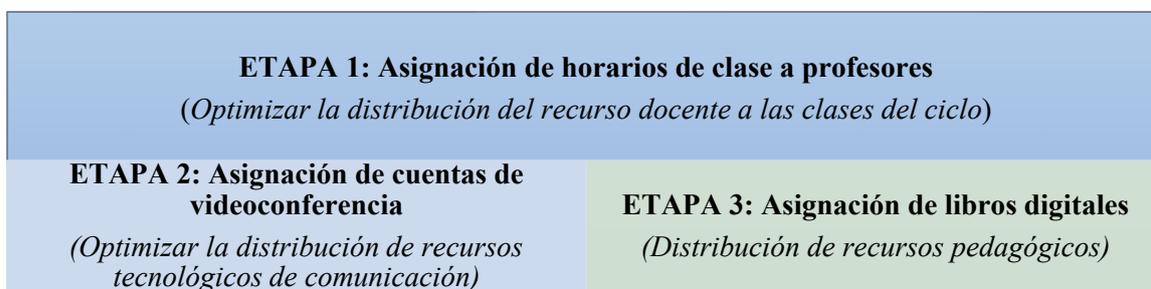
#### 3.9.1 Modelo Propuesto

Para resolver el problema de asignación de clases a profesores, cuentas de videoconferencia y libros digitales dentro de un marco horario predefinido, se propone un enfoque metodológico basado en la optimización matemática secuencial, implementado a través de tres modelos distintos de Programación Lineal Entera Binaria (BILP).

El desarrollo del modelo se basó en un análisis detallado de la información operativa recolectada, traduciendo las políticas institucionales, las características de los recursos tecnológicos y las reglas operativas en componentes matemáticos formales. Cada una de las tres etapas del modelo aborda un subproblema específico utilizando la salida de la Etapa 1 como entrada para las dos siguientes.

#### Figura 4

*Etapas del modelo matemático de optimización secuencial*



*Nota. Elaboración propia*

1. **Etapa 1:** Determina qué profesor imparte cada clase definida, optimizando según preferencias y aptitud, sujeto a restricciones, disponibilidad y compatibilidad horaria.
2. **Etapa 2:** Asigna eficientemente las licencias de videoconferencia disponibles y cuentas adicionales si son necesarias a los profesores de las clases, respetando reglas de compartición, exclusividad y separación temporal.

3. **Etapa 3:** Asigna un libro digital al profesor de cada clase, cumpliendo con los límites de uso simultáneo por módulo y horario.

Este enfoque secuencial permite manejar la complejidad del problema de manera más ordenada y reduce la dimensionalidad en cada fase de optimización.

El modelo tuvo un alcance temporal centrado en la fase de planificación previa al inicio del ciclo académico 2024-6B. La estructura de las clases ofertadas en los horarios preestablecidos ya ha sido definida por la coordinación académica antes del cierre de inscripciones. Por lo tanto, el modelo se enfocó en la asignación óptima de recursos a esta estructura de clases preexistentes, y no contempló la creación o modificación de horarios de clases una vez iniciado el ciclo. Esta delimitación asegura la tratabilidad del problema y permite generar una planificación completa y coherente antes de que comiencen las actividades académicas.

#### ***3.9.1.1 Restricciones del Modelo***

A continuación, se detallan las restricciones identificadas para cada una de estas tres etapas del modelo propuesto:

#### **Restricciones para la Asignación de Profesores**

1. Como dato de entrada, se tiene un listado con los módulos, horarios, paralelos y estudiantes matriculados en el ciclo 2024-6B como se observa en la tabla 2, la cantidad de estudiantes matriculados solo es un dato informativo para la parte de secretaría pues la división en base estadísticas de estudiantes se lo realiza de forma manual por parte de coordinación.
2. Una clase se define como la combinación de un módulo, horario y paralelo.
3. El ciclo 2024-6B tiene 46 clases en el programa de inglés, de las cuales 39 clases tienen asignado el paralelo “A” y 7 clases tienen asignado el paralelo “B” que

significa que la clase de un mismo módulo y horario ha sido dividida, el detalle de las clases se muestra en la tabla 3.

4. Los 2 profesores de planta, Planta 1 y Planta 2 deben tener asignado tres clases (módulo, horario, paralelo) cada uno en base a sus preferencias de módulos en cualquier horario disponible, valor de 1 cuando su preferencia es la deseada o 0 cuando no lo es, tal como se muestra en la tabla 4.
5. Los 28 profesores por contrato identificados como Profesor 1 hasta el Profesor 28 deben tener asignada al menos una clase en base a sus preferencias de módulos, horario y número de clases que pueden enseñar en el ciclo, pero no necesariamente deben tener asignadas ese número de clases ya que pueden ser de 1 a 3 dependiendo de la demanda de las clases.
6. En la tabla 4 se detallan los valores de preferencia de los profesores, para el caso de módulos y horario los valores de 1 son los deseados, y para el número de clases el valor va de 1 a 3.
7. Pueden existir profesores que no tengan asignada una clase debido a que ya se abarcaron todas.
8. Un profesor ya sea de planta o contrato no puede ser asignado a más de una clase en el mismo horario.
9. Un profesor ya sea de planta o contrato puede ser asignado a más de una clase en horarios contiguos.

### **Restricciones para la asignación de cuentas de videoconferencia**

1. La institución tiene 20 cuentas de videoconferencia en el ciclo 2024-6B para el programa de inglés.
2. Una cuenta de videoconferencia puede ser compartida hasta con tres profesores, siempre que sus horarios no sean contiguos.

3. Si un profesor tiene asignada una sola clase, la cuenta de videoconferencia que usa el profesor puede ser compartida con uno o dos profesores más, pero las clases deben tener el horario diferente y no deben ser contiguos. Por ejemplo: El Profesor1 asignado a la clase con horario de 15:00-17:00 no puede compartir la cuenta de videoconferencia con el Profesor 2 en la clase con horario de 17:00-19:00.
4. Si un profesor tiene asignada dos clases, debe usar la misma cuenta de videoconferencia para esas clases y de ser el caso puede ser compartida con otro profesor que tiene asignada una clase en un horario diferente que no sea contiguo a otro.
5. Un profesor con tres clases usa la misma cuenta de videoconferencia y no debe ser compartida con otro profesor.
6. Prohibición de compartir una misma cuenta entre profesores cuyos horarios asignados sean contiguos o se solapen.
7. En el caso que las 20 cuentas de videoconferencia no cubran el total de clases y asignaciones de profesores, existe la posibilidad de adquirir más cuentas de videoconferencia adicionales.

### **Restricciones para la asignación de libro digital**

1. Cada libro digital, Libro 1 a Libro 11, disponible por el instituto corresponde a los módulos detallados en la tabla 4, por lo que la asignación debe ser acorde al módulo que enseña el profesor.
2. Cada libro digital puede ser usado por hasta 4 profesores en el mismo módulo y horario. Por ejemplo: El libro 1 puede ser asignado con el Profesor 1, Profesor 2, Profesor 3 y Profesor 4 del módulo B1 y B2 en horario de 19:00-21:00, este mismo libro puede ser usado en los otros horarios no importa si son horarios contiguos.

3. Un profesor puede enseñar distintos módulos, por lo que a un mismo profesor se le puede asignar distintos libros digitales tomando en consideración los módulos que va a enseñar en el ciclo 2024-6B.

### ***3.9.1.2 Alcances del Modelo Propuesto***

A continuación, se detallan los alcances del modelo propuesto:

- El modelo se enfoca en resolver el problema de asignación de recursos a una estructura de clases y horarios que se considera predefinida y fija. Por lo tanto, el alcance de la investigación no contempla la creación ni modificación de horarios, sino su optimización a través de la asignación eficaz de personal docente y tecnología, antes del inicio del ciclo académico.
- Asignación completa y factible de todos los profesores disponibles a todas las clases en el ciclo académico, considerando la carga horaria contractual, la aptitud del profesor para el módulo específico, las preferencias horarias declaradas por los profesores y la prevención absoluta de conflicto de horarios para un mismo profesor.
- Optimización de las preferencias de módulo y horario de los profesores.
- Gestión eficiente de cuentas de videoconferencia, minimizando la necesidad de adquirir licencias adicionales promoviendo la consolidación y el uso eficiente de las cuentas que tiene el instituto.
- Asignación de libros digitales a cada clase, gestionando el uso de un inventario limitado de licencias distintas y el uso simultáneo máximo por licencia y horario.
- La implementación es para el periodo 2024-6B, pero el modelo puede ser reutilizado para futuros ciclos académicos adaptado a cambios en las políticas institucionales de ser necesario.

### 3.9.2 Modelo de la Etapa 1

El objetivo de esta etapa determina qué profesor impartirá cada clase, definida por módulo, horario y paralelo del programa de inglés para el ciclo 2024-6B. La asignación debe cumplir con las restricciones operativas relacionadas con la cobertura de clases, la carga horaria de los profesores, la prevención de conflictos entre horarios y la aptitud del profesor para impartir el módulo asignado, de esta forma maximizar una métrica de preferencia combinada, sujeto a un conjunto de restricciones operativas y contractuales estrictas, por lo que la salida de este modelo es la entrada principal para las etapas subsecuentes.

El modelo de programación lineal entera para la Etapa 1 está compuesto por los siguientes conjuntos:

**Tabla 6**

*Conjunto de datos definidos para el modelo de la Etapa 1*

CONJUNTO	DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA	SIGNIFICADO
<b>P</b>	Conjunto de índices $p$	Conjunto de todos los profesores disponibles.
<b><math>P_p</math></b>	Subconjunto $P_p \subset P$	Profesores de planta
<b><math>P_c</math></b>	Subconjunto $P_c \subset P$	Profesores por contrato
<b>C</b>	Conjunto de índices $c$	Conjunto de todas las clases únicas que deben ser impartidas en el ciclo. Cada clase representa una combinación específica de módulo, horario y paralelo.
<b>M</b>	Conjunto de índices $m$	Conjunto de todos los módulos de inglés.
<b>H</b>	Conjunto de índices $h$	Conjunto de los horarios disponibles
<b>Relación</b>	$P = P_p \cup P_c$ y $P_p \cap P_c = \emptyset$	Los conjuntos de profesores son exhaustivos y disjuntos.

*Nota. Elaboración propia*

A continuación, se detallan los parámetros de la Etapa 1 que se derivan principalmente de dos fuentes de datos, la tabla 3 y la tabla 4. Estos parámetros se detallan en la tabla 7.

**Tabla 7**

*Parámetros definidos para el modelo de la Etapa 1*

<b>SÍMBOLO</b>	<b>DOMINIO</b>	<b>SIGNIFICADO</b>
$m_c$	$c \in C$	Módulo asociado a la clase $c$ .
$h_c$	$c \in C$	Horario asociado a la clase $c$
$\text{PrefMod}_{\{p,m\}}$	$p \in P$ $m \in M$	Parámetro binario: 1 si $p$ es apto para $m$ , 0 si no.
$\text{PrefHor}_{\{p,h\}}$	$p \in P$ $h \in H$	Parámetro binario: 1 si $p$ prefiere/disponible en $h$ , 0 si no.
$\text{NumClasesPlanta}_p$	$p \in P_p$	Número exacto de clases a asignar al profesor de planta $p$ .
$\text{MaxClases}_p$	$p \in P_C$	Número entero positivo: Carga máxima para profesor por contrato $p$ .
$\text{PrefComb}_{\{p,c\}}$	$p \in P$ $c \in C$	Parámetro binario derivado: $\text{PrefMod}_{\{p,m_c\}} * \text{PrefHor}_{\{p,h_c\}}$

*Nota. Elaboración propia*

### 3.9.2.1 Función objetivo de la Etapa 1

La función objetivo definida para nuestro modelo matemático de la Etapa 1 es una función de maximización, que pretende encontrar dentro de todas las asignaciones factibles que cumplen las restricciones duras aquella que mejor se alinean con la idoneidad y disponibilidad preferente del profesor. La función diseñada se encuentra descrita en la ecuación 7.

$$\text{Maximizar } Z = \sum_{p \in P} \sum_{c \in C} \text{PrefComb}_{p,c} \cdot x_{p,c} \quad (7)$$

Donde:

$x_{p,c}$ : Variable de decisión binaria que indica si el profesor ( $p$ ) imparte la clase ( $c$ ).

$$x_{p,c} = \begin{cases} 1, & \text{si el profesor } p \text{ es asignado a la clase } c \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$PrefComb_{\{p,c\}}$ : Este parámetro representa la preferencia combinada o la puntuación de calidad de asignar al profesor (p) a la clase (c), no es un dato de entrada directo, sino que se calcula antes de resolver el modelo a partir de otros dos parámetros de entrada detallados a continuación:

$$PrefMod_{\{p,m_c\}} = \begin{cases} 1 & \text{si el profesor p apto/dispuesto para el módulo } m_c \text{ de la clase c} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$PrefHor_{\{p,h_c\}} = \begin{cases} 1 & \text{si el profesor p está disponible/prefiere el horario } h_c \text{ de la clase c} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Por lo que  $PrefComb_{\{p,c\}}$  se define como el producto de  $PrefMod_{\{p,m_c\}}$  y  $PrefHor_{\{p,h_c\}}$  y se utiliza directamente en la función objetivo para realizar la mayor cantidad posible de asignaciones  $x_{p,c} = 1$  que tengan esta puntuación combinada de 1, es decir, asignaciones donde se respeten tanto la aptitud del módulo como la preferencia del horario, la distribución se puede ver en la tabla 3.

### 3.9.2.2 *Formulación Matemática de las Restricciones de la Etapa 1*

Las restricciones utilizadas para este estudio fueron analizadas previamente con el personal de coordinación que labora en el Instituto de Lenguas Extranjeras. Estas restricciones fueron formuladas matemáticamente para que el modelo propuesto pueda utilizarlas y entregue el dato de entrada para las etapas 2 y 3.

Para las restricciones 1 y 4 se utilizó el modelo de matriz de la tabla 3, para las restricciones 2 y 3 se utilizó el modelo de matriz de la tabla 4 y para la restricción 5 la tabla 3 y tabla 4.

(1) En la ecuación 8 se asegura que cada clase (c) programada en el ciclo sea atendida. Exige que la suma de las asignaciones de todos los profesores (p) a una clase específica (c) sea exactamente igual a 1, garantizando que uno y solo un profesor sea asignado a cada clase

$$\sum_{p \in P} x_{p,c} = 1 \quad \forall c \in C \quad (8)$$

(2) En la ecuación 9 se detallan las condiciones contractuales u operativas de los profesores de planta ( $p \in P_p$ ), esta restricción fija su carga de trabajo. Establece que la suma de todas las clases (c) asignadas a un profesor de planta (p) debe ser exactamente igual a su número objetivo de clases que es de 3.

$$\sum_{c \in C} x_{p,c} = \text{NumClasesPlanta}_p \quad \forall p \in P_p \quad (9)$$

(3) En la ecuación 10 se limita el número de clases que puede impartir un profesor por contrato ( $p \in P_C$ ) según su disponibilidad o acuerdo contractual. La suma de todas las clases (c) asignadas a un profesor por contrato (p) no puede superar su límite máximo especificado.

$$\sum_{c \in C} x_{p,c} \leq \text{MaxClases}_p \quad \forall p \in P_C \quad (10)$$

(4) En la ecuación 11 se evita que un profesor sea asignado a múltiples clases simultáneamente, esta restricción se aplica a cada profesor (p) y a cada franja horaria (h). Limita a un máximo de 1 la suma de las asignaciones  $x_{p,c}$  de ese profesor (p) a todas las clases (c) que ocurren específicamente en ese horario  $h_c = h$

$$\sum_{c \in C | h_c = h} x_{p,c} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall h \in H \quad (11)$$

(5) La ecuación 12 garantiza que los profesores solo impartan clases de módulos para los que están considerados aptos. Impide la asignación  $x_{p,c} = 0$  si el parámetro de aptitud del profesor (p) para el módulo  $m_c$  de la clase (c) es cero,  $\text{PrefMod}_{\{p,m_c\}} = 0$ . Si el parámetro es 1, la restricción  $x_{\{p,c\}} \leq 1$  no limita la asignación de la variable binaria.

$$x_{p,c} \leq \text{PrefMod}_{p,m_c} \quad \forall p \in P, \forall c \in C \quad (12)$$

La solución óptima  $x^*_{\{p,c\}}$  proporciona la asignación de profesores a las clases, cumpliendo todas las restricciones y maximizando la función objetivo definida.

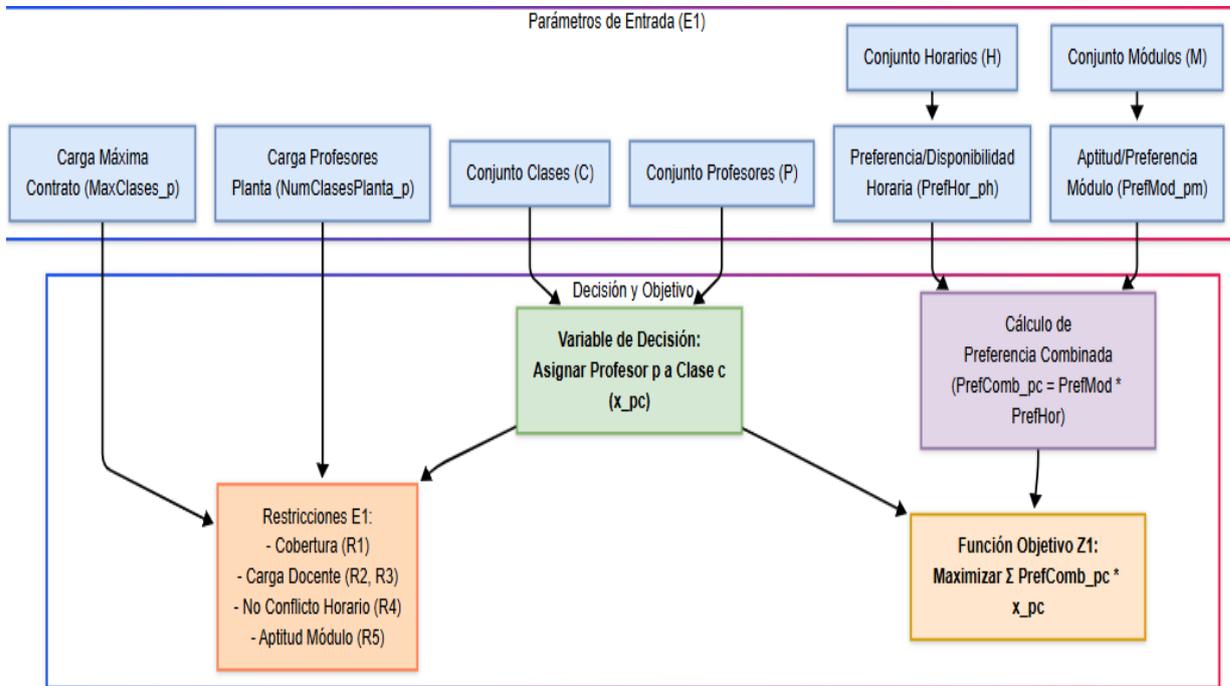
### ***3.9.2.3 Interpretación General del Modelo de la Etapa 1***

El modelo propuesto para la Etapa 1 se estructura en base a varios componentes fundamentales. En primer lugar, los conjuntos definen el espacio del problema, especificando los profesores disponibles y las clases a asignar. Los parámetros contienen la información específica necesaria para el modelo, tales como las preferencias de los profesores, sus capacidades y las restricciones operativas del sistema. Las variables de decisión representan las asignaciones que deben determinarse, tomando valores binarios que indican si un profesor es asignado o no a una clase determinada. La función objetivo tiene como propósito maximizar la satisfacción global de dichas preferencias, buscando una asignación óptima. Finalmente, las restricciones aseguran la factibilidad del modelo, garantizando la cobertura total de las clases, respetando las cargas laborales de los profesores y evitando conflictos o incompatibilidades.

A continuación, se muestra un diagrama de interacciones entre variables donde los diferentes elementos del modelo tales como los conjuntos, parámetros y variables de decisión se relacionan para la Etapa 1.

**Figura 5**

*Diagrama de Interacciones entre variables del Modelo para la Etapa 1*



*Nota. Elaboración propia*

### 3.9.3 Modelo de la Etapa 2

Esta segunda etapa se toma como entrada la asignación del profesor a la clase generada en la Etapa 1. Su objetivo es asignar las cuentas de videoconferencia disponibles a las clases del programa de inglés, con la opción de adquirir cuentas adicionales de la forma más eficiente posible. Se busca minimizar un costo ponderado que penaliza fuertemente el uso de cuentas adicionales y, secundariamente, minimizar el número de cuentas base activadas, promoviendo la consolidación sujeta a las reglas operativas de compartición de cuentas. El modelo de programación lineal entera para la Etapa 2 está compuesto por los conjuntos que se muestran en la tabla 8.

**Tabla 8**

*Conjunto de datos definidos para el modelo de la Etapa 2*

CONJUNTOS	DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA	SIGNIFICADO
<b>P<sub>act</sub></b>	Conjunto de índices p	Profesores activos.
<b>H</b>	Conjunto de índices h	Horarios con clases asignadas.
<b>Cuentas<sub>{base}</sub></b>	Conjunto $\{1, \dots, N_{\{base\}}\}$	Índices de cuentas de videoconferencia base
<b>Cuentas<sub>{adic}</sub></b>	Conjunto $\{N_{\{base\}} + 1, \dots, N_{\{max\}}\}$	Índices de cuentas de videoconferencia adicionales N <sub>{max}</sub>
<b>Cuentas</b>	Conjunto Cuentas <sub>{base}</sub> $\cup$ Cuentas <sub>{adic}</sub>	Conjunto de todos los índices de cuentas (cta $\in$ Cuentas)
<b>ParesContig</b>	Conjunto de pares $\{p, p'\} \subseteq P_{\{act\}}$	Pares de profesores con horarios asignados contiguos
<b>ParesSolap<sub>h</sub></b>	Conjunto de pares $\{p, p'\} \subseteq P_{\{act\}}$	Pares de profesores con clases asignadas en el mismo Horario h

*Nota. Elaboración propia*

A continuación, en la tabla 9 se detallan los parámetros de la Etapa 2.

**Tabla 9**

*Parámetros definidos para el modelo de la Etapa 2*

SÍMBOLO	DOMINIO	SIGNIFICADO
<b>N<sub>{base}</sub></b>	Escalar entero (= 20)	Número de cuentas de videoconferencia base
<b>NumClases<sub>p</sub></b>	$p \in P_{\{act\}}$	Número entero del total de clases asignadas a p en la Etapa 1.
<b>Horarios<sub>p</sub></b>	$p \in P_{\{act\}}$	Conjunto Horarios <sub>p</sub> $\subseteq$ H Horarios en los que p tiene clases.
<b>Peso<sub>{adic}</sub></b>	Escalar positivo grande	Peso o costo por usar una cuenta adicional (Por ejemplo: 1000)
<b>Peso<sub>{base}</sub></b>	Escalar positivo pequeño	Peso o costo por usar una cuenta base (Por ejemplo: 1)

*Nota. Elaboración propia*

### 3.9.3.1 Función Objetivo de la Etapa 2

La función objetivo definida para la Etapa 2 es una función de minimización, el objetivo principal de esta etapa es asignar las cuentas de videoconferencia de manera que se satisfagan las necesidades de todos los profesores activos minimizando, a su vez, el impacto en los recursos de licencias del Instituto. Dada la disponibilidad de un número limitado de cuentas base y la opción menos deseable de utilizar cuentas adicionales, se formula una función objetivo de minimización de costo ponderado para reflejar esta jerarquía de preferencias. La función diseñada se encuentra descrita en la ecuación 13.

Minimizar

$$Z_2 = \text{Peso}_{\text{adic}} \cdot \sum_{\text{cta} \in \text{Cuentas}_{\text{adic}}} \text{UsoAdic}_{\text{cta}} + \text{Peso}_{\text{base}} \cdot \sum_{\text{cta} \in \text{Cuentas}_{\text{base}}} \text{UsoBase}_{\text{cta}} \quad (13)$$

Donde:

$\text{UsoAdic}_{\text{cta}}$ : Variable de decisión binaria que indica si la cuenta adicional de videoconferencia (cta) es utilizada durante el ciclo.

$$\text{UsoAdic}_{\text{cta}} = \begin{cases} 1, & \text{si la cuenta adicional cta es utilizada} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\forall \text{cta} \in \text{Cuentas}_{\text{adic}}$$

$\text{UsoBase}_{\text{cta}}$ : Variable de decisión binaria que indica si la cuenta base de videoconferencia (cta) es utilizada durante el ciclo.

$$\text{UsoBase}_{\text{cta}} = \begin{cases} 1, & \text{si la cuenta cta es utilizada} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\forall \text{cta} \in \text{Cuentas}_{\text{base}}$$

$\text{Peso}_{\text{adic}}$  y  $\text{Peso}_{\text{base}}$ : Pesos o costos asignados al uso de cada tipo de cuenta, esta lógica de ponderación guía al optimizador hacia la solución deseada. Se establecen pesos de tal

manera que el costo de activar una sola cuenta adicional ( $\text{Peso}_{adic}$ ) sea significativamente mayor que el costo total de activar todas las cuentas base ( $N_{base} \times \text{Peso}_{base}$ ). Esto se logra eligiendo los pesos de forma que se cumpla la condición  $\text{Peso}_{adic} > N_{base} \times \text{Peso}_{base}$  por lo que:

- $\text{Peso}_{adic} = 1000$ , Penalización alta por cada cuenta adicional utilizada
- $\text{Peso}_{base} = 1$ , Penalización baja por cada cuenta base utilizada

Con esta configuración el modelo priorizará de forma absoluta encontrar una solución que minimice el uso de cuentas adicionales, siempre que exista una solución factible que cumpla todas las restricciones, utilizando únicamente las 20 cuentas base. Solo si es matemáticamente imposible satisfacer todas las restricciones dentro de las 20 cuentas base, el modelo incurrirá en el alto costo al activar una o más cuentas adicionales.

$\text{Peso}_{base} \cdot \sum \text{UsoBase}_{cta}$ : Actúa como un objetivo secundario, una vez que el modelo ha satisfecho la prioridad de minimizar el uso de cuentas adicionales, buscará, entre todas las soluciones que logran ese mínimo, aquella que también minimice el número de cuentas base activadas. Este término efectivamente promueve la consolidación, incentivando al modelo a asignar profesores a cuentas base ya existentes en lugar de activar una nueva cuenta base si no es estrictamente necesario para cumplir las restricciones. Por lo tanto, la función objetivo busca la solución más eficiente en dos niveles jerárquicos: primero, evita la adquisición de licencias adicionales y segundo, optimiza el uso del inventario de licencias base existentes.

### ***3.9.3.2 Formulación Matemática de las Restricciones de la Etapa 2***

Las restricciones utilizadas para esta etapa fueron analizadas previamente con el personal de sistemas y secretaría que labora en el Instituto de Lenguas Extranjeras. Estas

restricciones fueron formuladas matemáticamente para que el modelo propuesto pueda obtener la solución deseada.

(1) La ecuación 14 garantiza que cada profesor activo ( $p$ ), es decir, aquellos con clases asignadas de la Etapa 1, reciba la asignación de exactamente una cuenta de videoconferencia ( $cta$ ) para poder impartir sus clases. Se requiere que la suma de las variables binarias de asignación sobre todas las cuentas base y adicionales sea igual a 1 para cada profesor activo.

$$\sum_{cta \in \text{Cuentas}} \text{AsigVC}_{p,cta} = 1 \quad \forall p \in P_{act}, cta \in \text{Cuentas} \quad (14)$$

Donde:

$\text{AsigVC}_{p,cta}$ : Variable de decisión binaria que indica si el profesor ( $p$ ) usa la cuenta de videoconferencia ( $cta$ )

$$\text{AsigVC}_{p,cta} = \begin{cases} 1, & \text{si el profesor } p \text{ usa la cuenta de videoconferencia } cta \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(2) La ecuación 15 impone la regla operativa que limita la capacidad de cada cuenta de videoconferencia ( $cta$ ). Establece que la suma de profesores ( $p$ ) asignados a una misma cuenta ( $cta$ ) no puede exceder el límite de 3 usuarios. Esta restricción aplica tanto a cuentas base como a adicionales.

$$\sum_{p \in P_{act}} \text{AsigVC}_{p,cta} \leq 3 \quad \forall cta \in \text{Cuentas} \quad (15)$$

(3) La ecuación 16 implementa la política específica para profesores ( $p$ ) con carga completa ( $\text{NumClases}_p = 3$ ). Asegura que si un profesor ( $p$ ) de este grupo es asignado a una cuenta ( $cta$ ), entonces ningún otro profesor  $p'$  ( $p' \neq p$ ) puede ser asignado a esa misma cuenta. Esto se logra forzando a que la suma de las asignaciones de los otros profesores a la

cuenta sea menor o igual a  $3 \cdot (1 - 1) = 0$ . Si el profesor ( $p$ ) no usa la cuenta, la restricción se relaja (suma  $\leq 3$ ), permitiendo que otros la usen (sujeto a la restricción 2 de la Etapa 2).

$$\sum_{p' \in P_{act} | p' \neq p} AsigVC_{p',cta} \leq 3 \cdot (1 - AsigVC_{p,cta}) \quad (16)$$

$$\forall p \in P_{act} \text{ sujeto a } NumClases_p = 3, \forall cta \in Cuentas$$

(4) La ecuación 17 prohíbe compartir una misma cuenta ( $cta$ ) entre dos profesores distintos,  $p$  y  $p'$ , si sus horarios presentan contigüidad. Impide que ambas variables  $AsigVC_{p,cta}$  y  $AsigVC_{p',cta}$  sean 1 simultáneamente para la misma cuenta  $cta$ .

$$AsigVC_{p,cta} + AsigVC_{p',cta} \leq 1 \quad \forall \{p, p'\} \in ParesContig, \forall cta \in Cuentas \quad (17)$$

(5) La ecuación 18 evita conflictos de uso simultáneo de una cuenta. Prohíbe que dos profesores distintos,  $p$  y  $p'$ , compartan la misma cuenta ( $cta$ ) si ambos tienen clases programadas en la misma franja horaria ( $h$ ).

$$AsigVC_{p,cta} + AsigVC_{p',cta} \leq 1 \quad \forall h \in H, \forall \{p, p'\} \in ParesSolap_h, \forall cta \in Cuentas \quad (18)$$

(6a y 6b) Las ecuaciones 19a y 19b son restricciones técnicas que conectan las variables de asignación ( $AsigVC$ ) con las variables que rastrean el uso de cada tipo de cuenta ( $UsoAdic$ ,  $UsoBase$ ) para la función objetivo. Aseguran que si una cuenta adicional o base es asignada a cualquier profesor ( $p$ ), la variable de uso correspondiente sea forzada a 1.

$$AsigVC_{p,cta} \leq UsoAdic_{cta} \quad \forall p \in P_{act}, \forall cta \in Cuentas_{adic} \quad (19a)$$

$$AsigVC_{p,cta} \leq UsoBase_{cta} \quad \forall p \in P_{act}, \forall cta \in Cuentas_{base} \quad (19b)$$

(7) La ecuación 20 define formalmente que todas las variables de decisión introducidas en esta etapa ( $AsigVC_{p,cta}$ ,  $UsoAdic_{cta}$ ,  $UsoBase_{cta}$ ) son binarias, pudiendo tomar únicamente los valores 0 o 1.

$$AsigVC_{p,cta}, UsoAdic_{cta}, UsoBase_{cta} \in \{0,1\} \text{ para sus respectivos dominios} \quad (20)$$

La solución óptima minimiza el costo ponderado, asegurando que no se activen cuentas adicionales a menos que sea indispensable por las reglas de compartición.

### ***3.9.3.3 Interpretación General del Modelo de la Etapa 2***

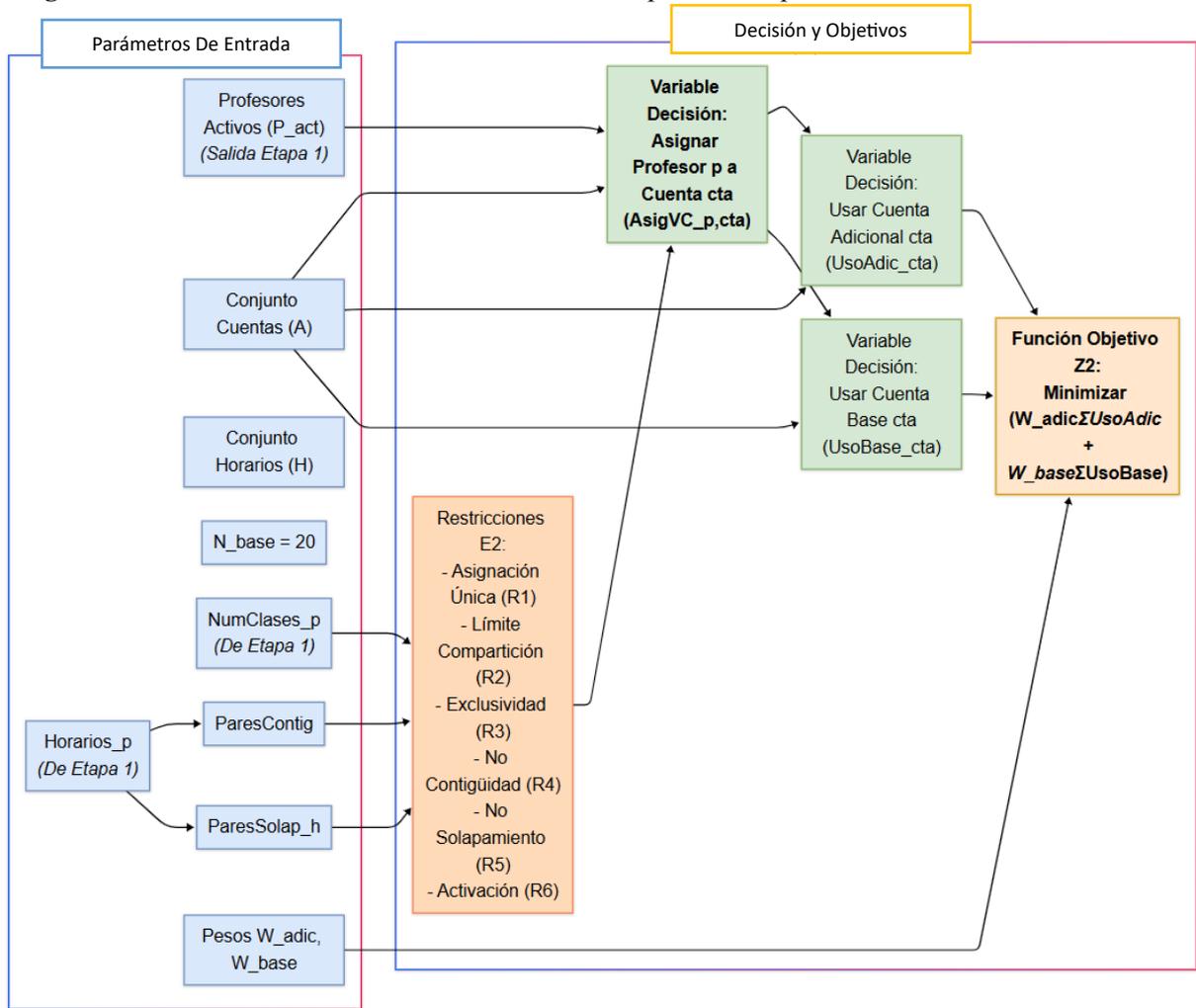
En esta etapa, la variable de decisión central de asignar el profesor a la cuenta depende del conjunto de profesores activos provenientes de la Etapa 1 y el conjunto total de cuentas de videoconferencia.

Los parámetros como el número de clases por profesor, horarios específicos y los conjuntos calculados previamente de contigüidad y solapamiento alimentan el bloque de restricciones, el cual define las asignaciones válidas.

Las variables de decisión se activan en función de las asignaciones y junto con los pesos correspondientes conforman la función objetivo de la Etapa 2 que se minimiza.

**Figura 6**

*Diagrama de Interacciones entre variables del Modelo para la Etapa 2*



*Nota. Elaboración propia*

### 3.9.4 Modelo de la Etapa 3

Esta etapa final, utilizando la información de las clases asignadas de la Etapa 1 y la tabla 4, tiene como objetivo asignar una licencia de libro digital ( $l$ ) a cada clase ( $c$ ). El objetivo principal es asegurar la compatibilidad del libro con el módulo de la clase ( $Modulo_c$ ) y respetar una regla operativa que limita el uso de una misma licencia ( $l$ ) a un máximo de 4 clases que ocurran en la misma franja horaria ( $h$ ). El objetivo secundario es minimizar el número total de licencias distintas utilizadas ( $UsoLibro_l$ ), promoviendo así la eficiencia en el uso del inventario de libros digitales del instituto para el programa de

inglés. El modelo de programación lineal entera para la Etapa 3 está compuesto por los conjuntos que se muestran en la tabla 10.

**Tabla 10**

*Conjunto de datos definidos para el modelo de la Etapa 3*

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA	SIGNIFICADO
C	Conjunto de índices $c$ $\{1, \dots, N_C\}$	Clases únicas asignadas en Etapa 1. $N_C = 46$
L	Conjunto de índices $l$ $\{\text{Libro } 1, \dots, \text{Libro } 11\}$	Licencias de Libros digitales disponibles
M	Conjunto de índices $m$ $\{B1, B2, \dots, A4\}$	Módulos de inglés.
H	Conjunto de índices $h$	Horarios con clases asignadas $c \in C$
<b>ModulosCubre<sub>l</sub></b>	Conjunto $\text{ModulosCubre}_l \subseteq M$	Módulos que cubre la licencia del libro $l \in L$ . Ver tabla 4.

*Nota. Elaboración propia*

A continuación, en la tabla 11 se detallan los parámetros de la Etapa 3.

**Tabla 11**

*Parámetros definidos para el modelo de la Etapa 3*

SÍMBOLO	DOMINIO	SIGNIFICADO
<b>Modulo<sub>c</sub></b>	$c \in C$	Módulo $m$ asociado a la clase $c$ .
<b>Horario<sub>c</sub></b>	$c \in C$	Horario $h$ asociado a la clase $c$ .
<b>Compatible<sub>l,c</sub></b>	$l \in L$ $c \in C$	Parámetro binario: 1 si $\text{Modulo}_c \in \text{ModulosCubre}_l$ , 0 si no.
<b>Lim</b>	Escalar entero $\text{Lim} \in \mathbb{Z}^+$	Límite máximo de uso simultáneo por libro y por horario.

*Nota. Elaboración propia*

### 3.9.4.1 Función Objetivo de la Etapa 3

La función objetivo definida para la Etapa 3 es una función de minimización, el objetivo es Minimizar el Número Total de Licencias de Libros Digitales. Esto se logra minimizando la suma de las variables binarias  $UsoLibro_l$  sobre todas las licencias (l) disponibles en el conjunto (L). Cada variable  $UsoLibro_l$  actúa como un indicador que toma el valor de 1 si la licencia (l) es asignada a por lo menos una clase, y permanece con el valor de 0 si no se utiliza. Al minimizar la suma, se incentiva al modelo a encontrar una asignación factible que active la menor cantidad posible de estas variables indicadoras, promoviendo así la reutilización de las mismas licencias para diferentes clases con horarios diferentes o para módulos diferentes si son compatibles, en lugar de usar innecesariamente una mayor variedad de licencias del inventario de libros. La función diseñada se encuentra descrita en la ecuación 21.

$$\text{Minimizar } Z_3 = \sum_{l \in L} UsoLibro_l \quad (21)$$

Donde:

$UsoLibro_l$ : Variable binaria que permite al modelo contar y minimizar el número de licencias distintas activadas, en lugar de simplemente contar el número total de asignaciones.

$$UsoLibro_l = \begin{cases} 1 & \text{si el libro } l \text{ es usado por al menos una clase} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\forall l \in L$$

### 3.9.4.2 Formulación Matemática de las Restricciones de la Etapa 3

Las restricciones utilizadas para esta última etapa fueron analizadas de igual forma con el personal de sistemas y secretaría formuladas matemáticamente para obtener la solución deseada.

(1) La ecuación 22 es una restricción de cobertura total, asegurando que cada clase (c) en el conjunto (C) reciba exactamente una asignación de libro. La suma de las variables  $AsigLibro_{c,l}$  sobre todas las posibles licencias (l) en (L) debe ser igual a 1 para cada clase (c).

$$\sum_{l \in L} AsigLibro_{c,l} = 1 \quad \forall c \in C \quad (22)$$

Donde:

$AsigLibro_{c,l}$ : Variable binaria central que representa la decisión de asignar (1) o no asignar (0) una licencia de libro específica (l) a una clase específica (c). Existen 506 de estas variables en total que es el producto de las cardinalidades de los conjuntos de índices de las 46 clases y los 11 libros, por lo que la restricción número 1 de la Etapa 3 asegura que para cada clase solo una de sus posibles asignaciones de libro será activada en la solución final.

$$AsigLibro_{c,l} = \begin{cases} 1 & \text{si la clase } c \text{ usa el libro } l \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\forall c \in C, \quad \forall l \in L$$

(2) La ecuación 23 impone la restricción de contenido. Una asignación de libro (l) a una clase (c) solo es permitida si el libro (l) es compatible con el módulo de la clase (c). Esto se modela asegurando que  $AsigLibro_{c,l}$  no puede ser 1 si el parámetro  $Compatible_{l,c}$  es 0.

$$AsigLibro_{c,l} \leq Compatible_{l,c} \quad \forall c \in C, \forall l \in L \quad (23)$$

(3) La ecuación 24 representa la restricción operativa sobre la concurrencia. Para cada licencia de libro digital (l) y para cada horario (h), se limita el número máximo de clases que pueden usar esa licencia simultáneamente. Se suman las variables  $AsigLibro_{c,l}$  únicamente para aquellas clases (c) que ocurren en el horario h ( $Horario_c = h$ ) y cuyo módulo es compatible con el libro (l). El resultado de esta suma no debe exceder el límite (Lim) establecido en 4.

$$\sum_{\substack{c \in C \\ Horario_c = h | Compatible_{l,c} = 1}} AsigLibro_{c,l} \leq Lim \quad \forall l \in L, \forall h \in H \quad \text{donde } Lim = 4 \quad (24)$$

(4) La ecuación 25 es una restricción de vinculación lógica para la función objetivo. Conecta la decisión de asignar un libro (l) a una clase (c) con la variable que indica si ese libro (l) está siendo utilizado. Si  $AsigLibro_{c,l}$  es 1 para cualquier (c), entonces  $UsoLibro_l$  también lo es.

$$AsigLibro_{c,l} \leq UsoLibro_l \quad \forall c \in C, \forall l \in L \quad (25)$$

(5) La ecuación 26 especifica la naturaleza binaria de todas las variables de decisión involucradas en la Etapa 3.

$$AsigLibro_{c,l}, UsoLibro_l \in \{0,1\} \quad \text{para sus respectivos dominios} \quad (26)$$

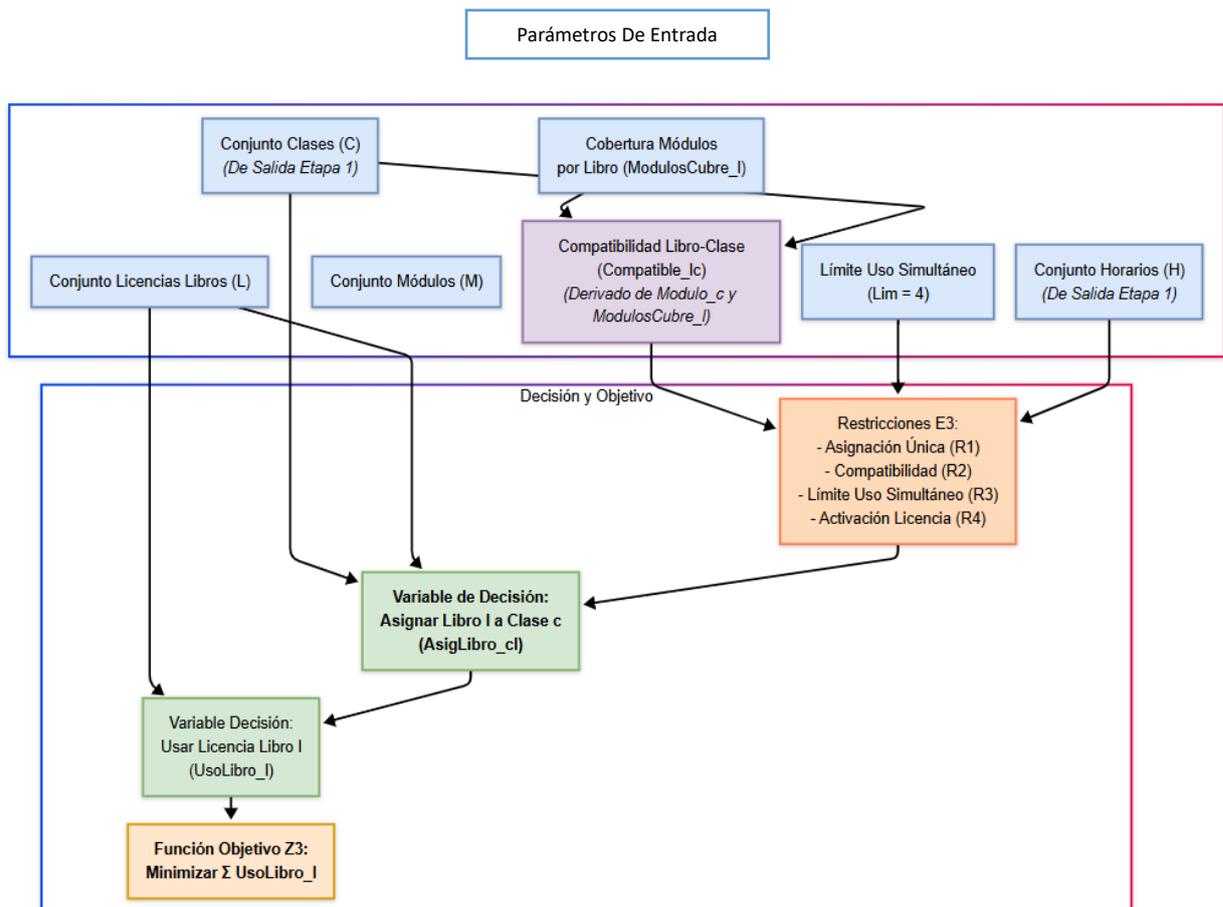
La solución óptima de este modelo BILP para la Etapa 3 proporciona una asignación completa de libros digitales a las clases con profesores asignados en la Etapa 1 que es pedagógicamente válida, operativamente factible bajo la regla de uso simultáneo ajustada y eficiente en términos de la diversidad de licencias activadas. El resultado es directamente aplicable para la gestión del inventario de libros digitales del Instituto para el ciclo académico 2024-6B.

### 3.9.4.3 Interpretación General del Modelo de la Etapa 3

El modelo de la Etapa 3 se centra en la variable de decisión de asignar el libro a la clase. Esta decisión es tomada por el conjunto de clases definidas en la Etapa 1, el inventario de libros, los parámetros de compatibilidad y el límite de uso simultáneo. Estos parámetros, junto con los horarios de las clases, configuran el bloque de restricciones que acotan las asignaciones válidas. La variable de uso del libro que se activa cuando un libro es asignado, constituye la función objetivo de la Etapa 3, la cual busca minimizar el número de licencias distintas utilizadas.

**Figura 7**

*Diagrama de Interacciones entre variables del Modelo para la Etapa 3*



*Nota. Elaboración propia*

### 3.10 Programación del Modelo Matemático en Python

#### 3.10.1 Herramientas del Entorno de Software y Hardware

La resolución de los modelos matemáticos de optimización formulados en las secciones anteriores se llevó a cabo mediante su implementación computacional, utilizando herramientas de software especializadas en Programación Lineal y específicamente en Programación Lineal Entera Binaria (BILP). El lenguaje de programación seleccionado para la implementación y ejecución de los modelos fue Python, debido a su versatilidad, amplia adopción en la comunidad científica y computacional, y la disponibilidad de librerías robustas para el manejo de datos y la optimización matemática. La implementación se realizó y validó utilizando un entorno estándar de Python, compatible con la mayoría de los sistemas operativos modernos.

**Tabla 12**

*Descripción de componentes de Hardware utilizados para resolver computacionalmente el modelo matemático*

COMPONENTE	DESCRIPCIÓN	JUSTIFICACIÓN
Procesador (CPU)	Intel(R) Core (TM) i5-4460 CPU @ 3.20GHz 3.20 GHz	Adecuado para manejar la carga computacional del Solver MILP (CBC).
Memoria RAM	12 GB DDR5	Suficiente para cargar datos y permitir al Solver operar eficientemente.
Espacio en Disco	SSD 512 GB	El modelo y los datos no requieren gran espacio de almacenamiento.
Marca	MSI	PC de escritorio

*Nota. Elaboración propia*

En el caso del software se detallan los especificados en la siguiente tabla.

**Tabla 13***Software Código Abierto utilizado para implementar el modelo matemático propuesto*

<b>SOFTWARE /LIBRERÍA</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>PROPÓSITO EN LA IMPLEMENTACIÓN</b>	<b>LICENCIA</b>
Sistema Operativo	Windows 10 (64-bit) Business	Amplia compatibilidad con Python y las librerías utilizadas.	Microsoft
Python	3.11.12	Lenguaje base de programación para la lógica del script, manejo de datos y orquestación del modelo.	PSF
PuLP	3.1.1	Librería principal para modelar problemas de optimización lineal (LP/MILP/BILP). Permite definir variables, restricciones y objetivo.	MIT
Pandas	2.2.2	Utilizada para la lectura eficiente de datos de entrada desde archivos Excel, manipulación y estructuración de datos (DataFrames).	BSD 3- Clause
OpenPyXL	3.1.5	Librería requerida por Pandas para leer y escribir archivos en formato .xlsx.	MIT
CBC (Solver)	2.10.7	Solver de código abierto para Programación Lineal Entera Mixta (MILP), invocado por PuLP para encontrar la solución óptima.	EPL 2.0

*Nota. Elaboración propia*

### **3.10.2 Consideraciones de Implementación en Python**

Durante la implementación de los modelos en Python, se tomaron las siguientes consideraciones para el manejo de la información y la estructuración de los datos:

1. **Lectura de Datos Estructurada:** Se utilizó la librería Pandas para leer los datos de entrada tal como las listas de clases, preferencias o aptitudes de profesores y la compatibilidad de libros desde archivos Excel en el formato .xlsx. Estos datos se cargaron en DataFrames de Pandas, que actúan como representaciones tabulares o

matrices en memoria. Se asumió una estructura de columnas específica para cada archivo de entrada, tal como se detalló en las secciones de parámetros de cada modelo.

- 2. Preprocesamiento y Limpieza:** Se aplicaron pasos de preprocesamiento directamente sobre los DataFrames de Pandas. Se hizo uso de la función *Strip ()* para eliminar espacios en blanco en las columnas de texto como en el caso del Horario, garantizando la consistencia y la correcta correspondencia al usar estos valores como claves o al compararlos. Además, se hizo la verificación de las columnas necesarias en los archivos de entrada.
- 3. Representación de Conjuntos y Mapeo Índice-Nombre:** Los conjuntos de índices definidos en el modelo matemático (C) para las clases, (P) para profesores, (L) para libros, se manejaron principalmente como listas o conjuntos de Python extraídos de los DataFrames. Para facilitar la interpretación de los resultados, se crearon estructuras de datos auxiliares, típicamente diccionarios de Python, que mapean los identificadores únicos (claves numéricas o códigos usados internamente) a sus nombres descriptivos correspondientes (valores de texto, nombre del módulo, el horario o el nombre del profesor). Por ejemplo, un diccionario para la información de la clase podría definirse como:

```
clase_info = {0: {'Modulo': 'B1', 'Horario': '08H00-10H00',  
'Profesor': 'Profesor X', ...}, 1: {'Modulo': 'B1', 'Horario':  
'17H00-19H00', 'Profesor': 'Profesor Y', ...}, # ... y así para  
las 46 clases ...}
```

Esta estrategia permite trabajar internamente con índices eficientes mientras se presentan resultados finales legibles, accediendo al nombre descriptivo mediante la clave (índice) obtenida de la solución del modelo.

4. **Representación de Parámetros Indexados:** Los parámetros multidimensionales del modelo se representaron eficientemente mediante diccionarios de Python donde las claves son tuplas de los índices correspondientes. Por ejemplo, el parámetro  $\text{PrefMod}_{p,m}$  es una matriz lógica Profesor x Módulo con valores 0/1 que se almacenó como un diccionario donde cada llave es la tupla (p, m) y el valor es 0 o 1.

```
PrefMod = {('Profesor 1', 'B1'): 1, ('Profesor 1', 'B2'): 1, ('Profesor 1', 'B3'): 0, # ... todas las combinaciones p, m ...}
```

Este enfoque es eficiente en memoria para matrices dispersas y permite un acceso rápido durante la construcción de las restricciones y la función objetivo en PuLP, relacionando directamente la estructura de datos con la notación matemática.

5. **Cálculo de Parámetros Derivados:** El cálculo de estos parámetros dependen de los datos de entrada o de resultados intermedios que se calcularon mediante lógica implementada en Python usando herramientas como *Pandas*, *itertools*, *collections.defaultdict* antes de definir las restricciones que los utilizan.
6. **Nomenclatura en PuLP:** Se adoptó una convención de nomenclatura descriptiva para las variables y las restricciones añadidas al modelo PuLP, incorporando los índices relevantes para facilitar la depuración y la trazabilidad entre el modelo matemático y el código.
7. **Orquestación Secuencial:** La implementación respetó la estructura modular por etapas. Cada etapa se encapsuló lógicamente, leyendo sus datos de entrada específicos que incluyen los archivos Excel generados por cada etapa, definiendo y resolviendo su propio modelo PuLP y generando un archivo Excel con sus resultados para documentar la solución o alimentar la etapa siguiente. Con ello se puede realizar

el seguimiento y verificación de asignación por parte de cada departamento de la institución.

### 3.10.3 Definición de Problemas y Variables en PuLP

El primer paso en PuLP es crear una instancia del problema *LpProblem*, especificando un nombre descriptivo y el sentido de la optimización, ya sea *LpMaximize* para problemas de maximización o *LpMinimize* para problemas de minimización. Posteriormente, se declaran las variables de decisión utilizando *LpVariable.dicts*. A continuación, se muestran las definiciones para cada etapa.

La definición del problema de maximización implementado en PuLP para la Etapa 1 se muestra en la figura 8.

#### Figura 8

*Definición del problema de maximización en la Etapa 1 con la librería PuLP*

```
# Crear el problema de Maximización para la Etapa 1
prob_e1 = pulp.LpProblem("Asignacion_Profesores_E1", pulp.LpMaximize)

# Variable binaria x_{p,c}: 1 si profesor p imparte clase c, 0 si no.

x = pulp.LpVariable.dicts("AsignacionProfClase",
                          [(p, c) for p in profesores for c in clases],
                          cat='Binary')
```

*Nota. Elaboración propia*

La definición del problema de minimización implementado en PuLP para la Etapa 2 se muestra en la figura 9.

#### Figura 9

*Definición del problema de minimización en la Etapa 2 con la librería PuLP*

```

# Crear el problema de Minimización para la Etapa 2
prob_e2 = pulp.LpProblem("Asignacion_CuentasVC_E2", pulp.LpMinimize)

# Variable binaria y_{p,cta}: 1 si el profesor p usa la cuenta cta
y = pulp.LpVariable.dicts("AsignacionCuentaVC",
                          [(p, cta) for p in P_activo for cta in A],
                          cat='Binary')

# Variable binaria u_{cta}: 1 si la cuenta adicional cta es usada
u = pulp.LpVariable.dicts("UsoCuentaAdicional", A_add, cat='Binary')
# Variable binaria v_{cta}: 1 si la cuenta base cta es usada
v = pulp.LpVariable.dicts("UsoCuentaBase", A_base, cat='Binary')

```

*Nota. Elaboración propia*

La definición del problema de minimización implementado en PuLP para la Etapa 3 se muestra en la figura 10.

### Figura 10

*Definición del problema de minimización en la Etapa 3 con la librería PuLP*

```

# Crear el problema de Minimización para la Etapa 3
prob_e3 = pulp.LpProblem("Asignacion_Libros_E3", pulp.LpMinimize)

# Variable binaria x_{c,l}: 1 si clase c usa el libro l
x_libro = pulp.LpVariable.dicts("AsignacionLibroClase",
                                [(c, l) for c in C for l in B],
                                cat='Binary')

# Variable binaria u_{l}: 1 si el libro l es usado
u_libro = pulp.LpVariable.dicts("UsoLibro", B, cat='Binary')

```

*Nota. Elaboración propia*

Parámetros:

- Para cada una de las tres etapas, se instancia un objeto *LpProblem* de PuLP, asignándole un nombre descriptivo y especificando el sentido de la optimización. Para la Etapa 1, el problema se denomina *Asignacion\_Profesores\_E1* y se configura como un problema de maximización. Para la Etapa 2, denominada *Asignacion\_CuentasVC\_E2*, y la Etapa 3, denominada *Asignacion\_Libros\_E3*, se configuran como problemas de minimización.

- Se definen las variables de decisión principales para cada problema utilizando la función `LpVariable.dicts`. En la Etapa 1 es la variable `x`, en la Etapa 2 se definen tres conjuntos de variables `y`, `u` y `v`. En la Etapa 3 se definen dos conjuntos de variables `x_libro` y `u_libro`.
- Finalmente, para todas estas variables de decisión se indica que se está trabajando con valores binarios utilizando el parámetro `cat = 'Binary'`.

La traducción de las restricciones matemáticas a código PuLP es directa. Un ejemplo de restricción implementada mediante PuLP se muestra en la figura 11.

### Figura 11

*Ejemplo de definición de restricciones con Pulp. Restricción número 4 de la Etapa 1*

```
#Implementación de la restricción 4 en PuLP (Etapa 1)
for p in P_active: # Para cada profesor p
    for h in H: # Para cada horario h
        # Identifica clases 'c' en el horario 'h'
        clases_en_horario_h = [c_idx for c_idx in C if clase_info[c_idx]['Horario'] == h]

        if clases_en_horario_h: # Solo si hay clases en ese horario
            # Añade la restricción: Suma(x_pc para c en h) <= 1
            prob += pulp.lpSum(x[p, c] for c in clases_en_horario_h) <= 1, f"Conflicto_Horario_{p}_{h}"
```

*Nota. Elaboración propia*

#### 3.10.4 Pseudocódigo de la Estructura Computacional General

Para proporcionar una visión general de la lógica de ejecución de los scripts desarrollados y la interacción entre las distintas etapas de optimización, la figura 12 presenta un pseudocódigo del marco computacional implementado.

## Figura 12

### Pseudocódigo General del Marco de Optimización Secuencial

```
def asignacion_principal_ile():
    # 1. Carga de Datos Iniciales
    print("Cargando datos base (clases, profesores, libros, config)...")
    datos_clases = leer_excel("datos_clases.xlsx")
    datos_profes = leer_excel("datos_profesores.xlsx")
    datos_libros_catalogo = leer_excel("datos_libros.xlsx")
    config_instituto = leer_config_institucional() # N_base_vc, limite_libros, pesos_vc

    # --- ETAPA 1: Asignación Profesor-Clase ---
    print("Iniciando Etapa 1: Asignación Profesor-Clase...")
    modelo_e1 = formular_modelo_e1_prof_clase(datos_clases, datos_profes)
    solucion_e1 = resolver_cbc(modelo_e1)
    if not es_solucion_valida(solucion_e1):
        finalizar_con_error("Etapa 1 no resuelta.")

    resultados_e1 = extraer_asignacion_profesores(solucion_e1)
    guardar_excel(resultados_e1, "asignacion_profesores_E1.xlsx")
    print("Etapa 1 completada -> asignacion_profesores_E1.xlsx")

    # --- ETAPA 2: Asignación Cuentas VC ---
    print("Iniciando Etapa 2: Asignación Cuentas VC...")
    params_e2 = preprocesar_para_e2(resultados_e1, config_instituto.n_base_vc)
    modelo_e2 = formular_modelo_e2_cuentas_vc(params_e2, config_instituto)
    solucion_e2 = resolver_cbc(modelo_e2, time_limit=600)
    if not es_solucion_valida(solucion_e2):
        finalizar_con_error("Etapa 2 no resuelta.")

    resultados_e2 = extraer_asignacion_vc(solucion_e2)
    guardar_excel(resultados_e2, "asignacion_VC_E2.xlsx")
    print("Etapa 2 completada -> asignacion_VC_E2.xlsx")

    # --- ETAPA 3: Asignación Libros Digitales ---
    print("Iniciando Etapa 3: Asignación Libros Digitales...")
    params_e3 = preprocesar_para_e3(resultados_e1, datos_libros_catalogo,
    config_instituto.limite_libros)
    modelo_e3 = formular_modelo_e3_libros(params_e3)
    solucion_e3 = resolver_cbc(modelo_e3)
    if not es_solucion_valida(solucion_e3):
        finalizar_con_error("Etapa 3 no resuelta.")

    resultados_e3 = extraer_asignacion_libros(solucion_e3) # Asigna libro a cada CLASE
    guardar_excel(resultados_e3, "asignacion_libros_E3.xlsx")
    print("Etapa 3 completada -> asignacion_libros_E3.xlsx")

    print("Proceso de Optimización Secuencial Finalizado.")

# --- Definiciones Conceptuales de Funciones (No se ejecutarían como están) ---
def leer_excel(nombre_archivo): pass # Retorna DataFrame
def leer_config_institucional(): pass # Retorna objeto/diccionario con N_base_vc, etc.

def formular_modelo_e1_prof_clase(datos_clases, datos_profes): pass # Retorna modelo PuLP
def preprocesar_para_e2(res_e1, n_base): pass # Retorna datos para E2
def formular_modelo_e2_cuentas_vc(params_e2, config): pass # Retorna modelo PuLP
def preprocesar_para_e3(res_e1, cat_libros, lim_lib): pass # Retorna datos para E3
def formular_modelo_e3_libros(params_e3): pass # Retorna modelo PuLP

def resolver_cbc(modelo_pulp, time_limit=None): pass # Retorna objeto solución PuLP
def es_solucion_valida(solucion): pass # Retorna True/False
def finalizar_con_error(mensaje): print(f"ERROR: {mensaje}"); exit()

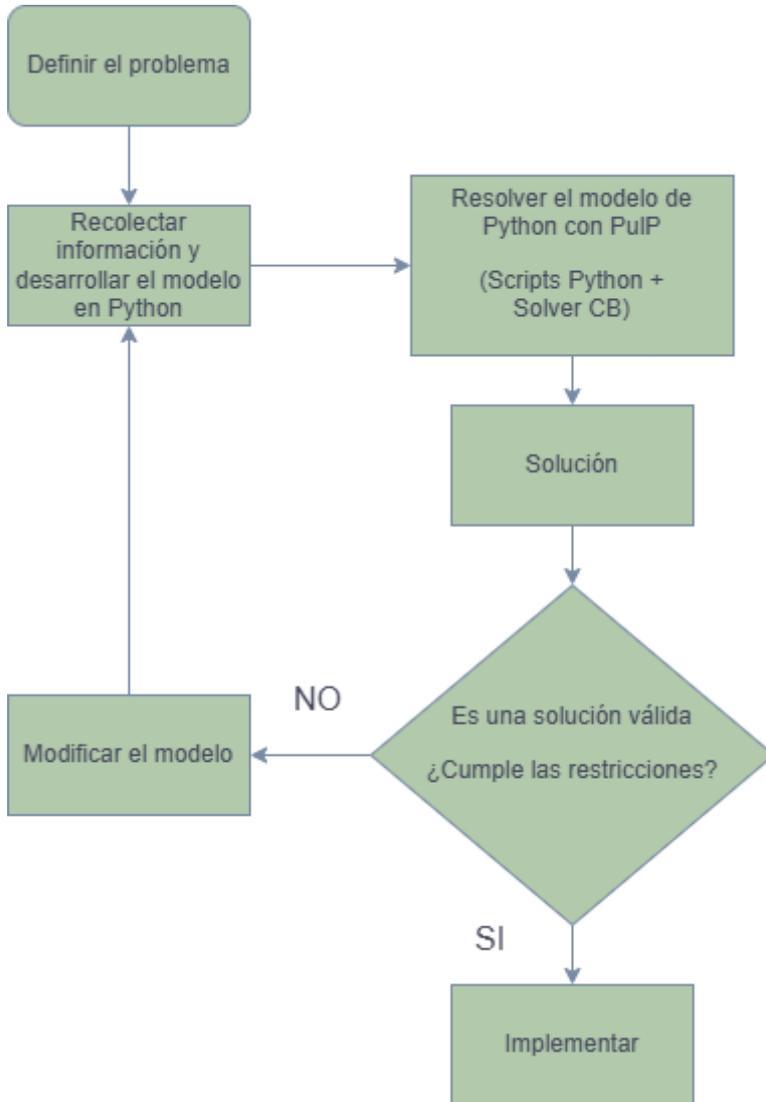
def extraer_asignacion_profesores(sol): pass # Retorna DataFrame
def extraer_asignacion_vc(sol): pass # Retorna DataFrame
def extraer_asignacion_libros(sol): pass # Retorna DataFrame
def guardar_excel(df, nombre_archivo): pass
```

Nota. Elaboración propia

El diagrama de flujo utilizado para modelar el problema se puede observar en la figura 13.

**Figura 13**

*Diagrama de flujo del proceso de modelamiento con la librería PuLP para desarrollar e implementar el problema de asignación*



*Nota. Elaboración propia*

## Capítulo 4

### Análisis y Discusión de los Resultados

#### 4.1 Análisis Descriptivo de los Resultados

##### 4.1.1 Resultados de la Optimización Mediante Programación Lineal Entera Binaria

Una vez formulados e implementados los modelos matemáticos secuenciales utilizando el lenguaje de programación Python y la librería de modelado PuLP se procedió a su resolución computacional. Para encontrar las soluciones óptimas de los problemas de Programación Lineal Entera Binaria, se utilizó el Solver de código abierto CBC (Coin-or Branch and Cut), invocado directamente a través de la interfaz de PuLP.

El enfoque de la evaluación de resultados se centra en:

- a. Presentar las asignaciones detalladas generadas para cada etapa.
- b. Validar que las asignaciones cumplen con todas las restricciones operativas y matemáticas formuladas.
- c. Evaluar la eficiencia lograda en términos de los objetivos planteados para cada etapa.

Dado que el punto de partida es un proceso manual determinado por la personal de coordinación, no se realiza una comparación directa de rendimiento con otros Solver o modelos preexistentes, sino que se evalúa la calidad y factibilidad de la solución generada por el marco propuesto.

#### 4.2 Discusión de los Resultados

Tras implementar y ejecutar los tres modelos de optimización de manera secuencial de cada etapa, se obtuvieron las asignaciones de los horarios de clases a profesores, cuentas de videoconferencia y libros digitales correspondientes al ciclo 2024-6B del programa de inglés

del Instituto de Lenguas Extranjeras. A continuación, se presentan y analizan los resultados para cada etapa.

#### 4.2.1 Resultados de la Etapa 1

El modelo BILP para la asignación de profesores a las 46 clases requeridas se resolvió exitosamente, alcanzando el estado de Óptimo reportado por el Solver CBC. El valor máximo obtenido para la función objetivo ( $Z_1$ ), que representa la suma de las preferencias combinadas cumplidas, fue de 46.0. Esto indica un resultado positivo, donde todas y cada una de las 46 asignaciones realizadas cumplieron simultáneamente con la aptitud del profesor para el módulo y su preferencia por el horario asignado. El tiempo computacional requerido para encontrar y verificar esta solución óptima fue mínimo, computacionalmente eficiente, resolviéndose en pocos segundos.

##### 4.2.1.1 Análisis Descriptivo de la Asignación en la Etapa 1

El modelo logró una asignación óptima en términos del objetivo planteado, alcanzando el máximo valor posible de 46 para la función objetivo. Este valor representa la máxima compatibilidad entre las preferencias de los docentes y la oferta de clases del ciclo. La evidencia de este resultado se obtiene del bloque de código que presenta los resultados del modelo.

#### Figura 14

*Bloque de código en Python que presenta el Valor Óptimo de la Función Objetivo de la Etapa 1*

```
# --- 5. Presentación de Resultados ---
print("\n--- Resultados de la Asignación ---")
print(f"Estado de la solución: {lpStatus[prob.status]}")

if prob.objective is not None:
    obj_value = prob.objective.value()
    print(f"Valor Óptimo de la Función Objetivo (Suma de Preferencias): {obj_value if obj_value is not None else 'N/A'}")
```

*Nota. Elaboración propia*

De esta forma se evalúa el estado de la solución del modelo para determinar si fue óptima, además se calcula y se muestra el valor de la función objetivo que es la suma ponderada de las preferencias entre profesores y clases asignadas. En la figura 15 se muestra el proceso de asignación de la Etapa 1 y el estado de la solución como óptima.

**Figura 15**

*Resultados mostrados en consola luego de ejecutar el código de la Etapa 1*

```
--- Iniciando Proceso de Asignación de Profesores ---
Cargando datos desde archivos Excel...
Datos cargados correctamente.
Preparando conjuntos y parámetros para el modelo...
Columna de Carga/Max Clases identificada: 'Clases'
Módulos identificados: ['B1', 'B2', 'B3', 'B4', 'B5', 'I1', 'I2', 'I3', 'I4', 'A1', 'A2', 'A3', 'A4']
Horarios identificados: ['08H00-10H00', '15H00-17H00', '17H00-19H00', '19H00-21H00']
Calculando preferencias combinadas...
Cálculo de preferencias combinadas terminado. 831 coincidencias (pref=1) encontradas.
Conjuntos y parámetros listos.
Definiendo el modelo de optimización...
Añadiendo restricciones...
Añadiendo restricción de módulo permitido...
Modelo definido.
Resolviendo el problema...
Problema resuelto.

--- Resultados de la Asignación ---
Estado de la solución: Optimal
Valor Óptimo de la Función Objetivo (Suma de Preferencias): 46.0
```

*Nota. Elaboración propia*

Sin embargo, al culminar el proceso se observa que 4 profesores por contrato no recibieron ninguna asignación debido a una combinación de factores como, número de preferencias, alta competencia por módulos u horarios o que todas las clases fueron cubiertas.

**Figura 16**

*Listado de profesores sin asignación de horarios de clases mostrados en consola.*

```
Advertencia: Los siguientes profesores por contrato NO tienen clases asignadas:
- Profesor 4
- Profesor 8
- Profesor 13
- Profesor 24
```

*Nota. Elaboración propia*

Debido a que después de resolver el modelo de optimización, el script cuenta cuántas clases fueron asignadas a cada profesor usando los valores de la solución  $x[p, c]$  por lo que, si un profesor de contrato tiene 0 clases asignadas, se lo agrega a una lista especial.

La tabla 14 presenta la asignación completa generada, detallando el profesor asignado a cada clase junto con la confirmación de *PreferenciaCumplida* = 1 que verifica el cumplimiento de la preferencia combinada

**Tabla 14**

*Asignación óptima de profesores a las clases del periodo 2024-6B*

<b>PROFESOR</b> <b>ACTIVO</b>	<b>CLASE</b> <b>ID</b>	<b>MÓDULO</b>	<b>HORARIO</b>	<b>PARALELO</b>	<b>PREFERENCIA</b> <b>CUMPLIDA</b>
Planta 1	23	I2	08H00-10H00	A	1
Planta 1	1	B1	17H00-19H00	A	1
Planta 1	3	B1	19H00-21H00	B	1
Planta 2	35	A1	08H00-10H00	A	1
Planta 2	28	I3	17H00-19H00	A	1
Planta 2	26	I2	19H00-21H00	B	1
Profesor 1	38	A2	08H00-10H00	A	1
Profesor 10	24	I2	17H00-19H00	A	1
Profesor 10	7	B2	19H00-21H00	A	1
Profesor 11	15	B5	08H00-10H00	A	1
Profesor 11	6	B2	19H00-21H00	A	1
Profesor 12	43	A4	08H00-10H00	A	1
Profesor 12	17	B5	19H00-21H00	A	1
Profesor 14	29	I3	19H00-21H00	A	1
Profesor 15	8	B3	08H00-10H00	A	1
Profesor 15	40	A2	19H00-21H00	A	1
Profesor 16	27	I3	08H00-10H00	A	1
Profesor 16	25	I2	19H00-21H00	A	1
Profesor 17	39	A2	17H00-19H00	A	1
Profesor 17	45	A4	19H00-21H00	A	1
Profesor 18	41	A3	08H00-10H00	A	1
Profesor 19	0	B1	08H00-10H00	A	1

Profesor 19	2	B1	19H00-21H00	A	1
Profesor 2	44	A4	17H00-19H00	A	1
Profesor 2	42	A3	19H00-21H00	A	1
Profesor 20	32	I4	17H00-19H00	A	1
Profesor 20	21	I1	19H00-21H00	A	1
Profesor 21	19	I1	08H00-10H00	A	1
Profesor 21	36	A1	17H00-19H00	A	1
Profesor 22	20	I1	17H00-19H00	A	1
Profesor 22	22	I1	19H00-21H00	B	1
Profesor 23	11	B4	08H00-10H00	A	1
Profesor 23	37	A1	19H00-21H00	A	1
Profesor 25	13	B4	19H00-21H00	A	1
Profesor 26	5	B2	17H00-19H00	A	1
Profesor 27	31	I4	08H00-10H00	A	1
Profesor 27	30	I3	19H00-21H00	B	1
Profesor 28	4	B2	08H00-10H00	A	1
Profesor 28	16	B5	17H00-19H00	A	1
Profesor 3	12	B4	15H00-17H00	A	1
Profesor 3	9	B3	17H00-19H00	A	1
Profesor 3	10	B3	19H00-21H00	A	1
Profesor 5	18	B5	19H00-21H00	B	1
Profesor 6	33	I4	19H00-21H00	A	1
Profesor 7	14	B4	19H00-21H00	B	1
Profesor 9	34	I4	19H00-21H00	B	1

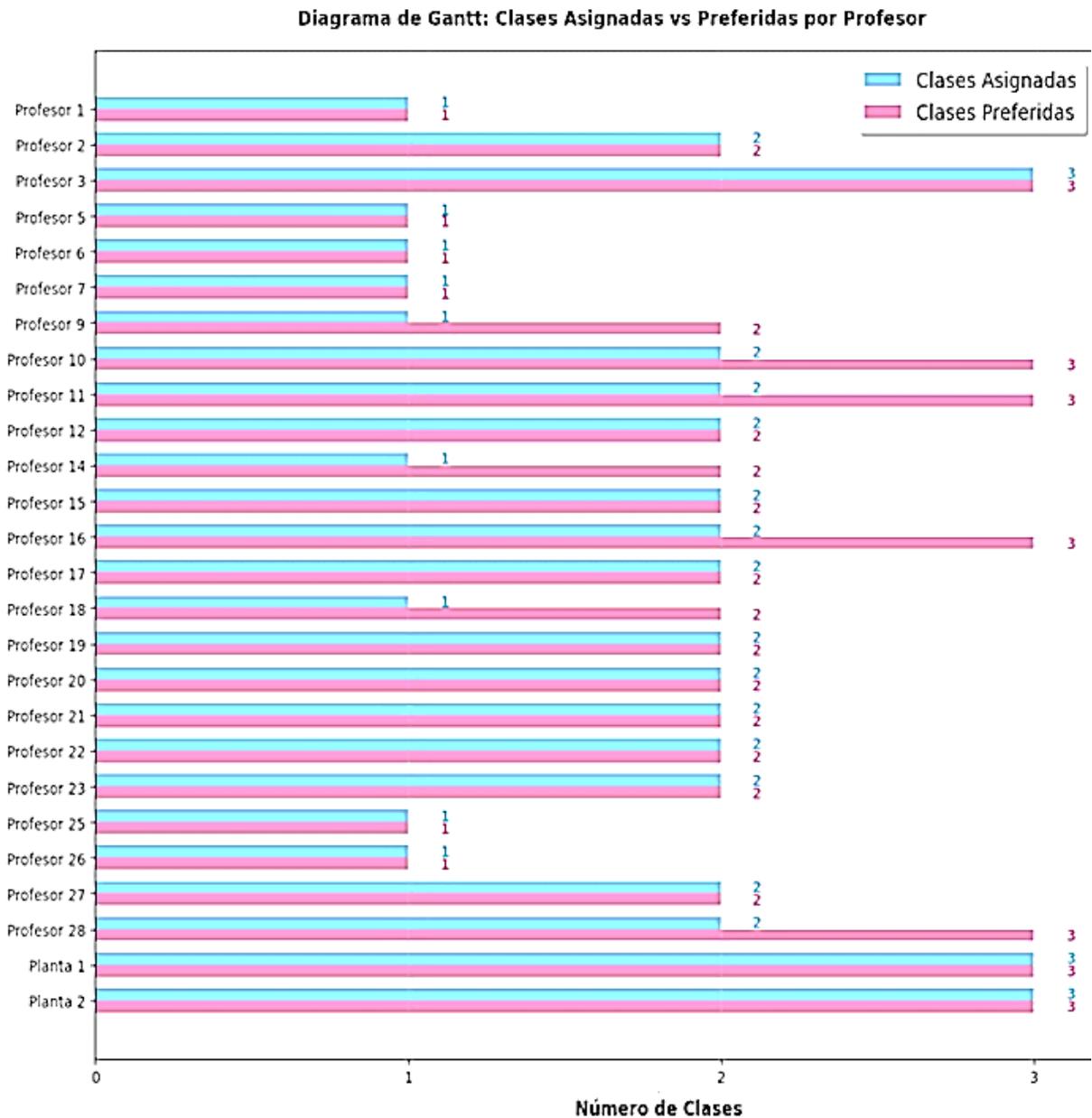
---

*Nota. Elaboración propia*

La tabla 14 evidencia que todos los profesores asignados ya sean de Planta o de Contrato recibieron clases que coincidían con sus preferencias de módulo y horario. La carga de los profesores de planta se cumplió exactamente con 3 clases, en el caso de la carga de los profesores por contrato varió entre 0 y 3 clases, siempre respetando el máximo individual especificado. A continuación, se muestra un diagrama de Gantt con la cantidad de clases asignadas a los profesores.

**Figura 17**

*Diagrama de Gantt de la Cantidad de Clases Asignadas a Profesores vs Preferencias*



*Nota. Elaboración propia*

De esta manera se verificó que la solución cumple con todas las restricciones formuladas en la Etapa 1.

- Cada una de las 46 clases tiene exactamente un profesor asignado.
- Los profesores Planta 1 y Planta 2 tienen exactamente 3 clases asignadas.

- Ningún profesor por contrato excede su carga máxima declarada, tal como se indica en la tabla 3.
- No existen conflictos horarios; ningún profesor imparte dos clases simultáneamente.
- Todas las asignaciones respetan la aptitud del módulo ( $PrefMod = 1$ ), condición necesaria para que  $PrefComb$  sea 1.

El modelo de la Etapa 1 logró generar exitosamente una asignación completa y factible, destacando la capacidad de satisfacer al 100% las preferencias combinadas de módulo y horario de los profesores dentro de las restricciones operativas. Esto sugiere una buena alineación inicial entre la oferta docente y la demanda de clases para este ciclo. La existencia de 4 profesores por contrato sin asignación indica que la oferta de profesores fue suficiente para cubrir la demanda bajo las reglas establecidas, o que las restricciones específicas de estos profesores impidieron su asignación. La salida de esta etapa es un archivo denominado *asignación\_profesores\_E1.xlsx* que proporciona la base fundamental y validada para las etapas subsecuentes de asignación de recursos tecnológicos.

#### 4.2.2 Resultados de la Etapa 2

El modelo para asignar cuentas de videoconferencia a los 26 profesores activos ( $P_{act}$ ) también alcanzó el estado óptimo, con un tiempo real de ejecución de 591.87 segundos.

#### Figura 18

*Resultados del estado y tiempo de ejecución mostrados en consola luego de ejecutar el código de la Etapa 2*

```
Solver finalizado.
Tiempo total de ejecución: 591.87 segundos
Estado de la solución final: Optimal (Code: 1)
```

*Nota. Elaboración propia*

El valor de la función objetivo  $Z_2$  fue de 4020.0, este valor se descompone en un costo de 4000 correspondiente a la activación de 4 cuentas adicionales y un costo de 20 correspondiente al uso de las 20 cuentas base que representa el costo total ponderado minimizado asociado a la asignación de cuentas de videoconferencia. En este caso, las 20 cuentas disponibles más 4 cuentas consideradas por número total de profesores activos ( $N_{max} = 26$ ). Este dato es importante para el área encargada de adquirir nuevas licencias de cuentas de videoconferencia indicando que todas las 20 licencias base son necesarias y adicionalmente se necesitarían 4 licencias.

### Figura 19

*Resultados de la Asignación de Cuentas de videoconferencia mostrados en consola luego de ejecutar el código de la Etapa 2*

```
--- Resultados de la Asignación de Cuentas VC ---  
Número de cuentas base usadas: 20 de 20  
Número de cuentas adicionales necesarias: 4  
Número TOTAL de cuentas usadas: 24
```

*Nota. Elaboración propia*

#### 4.2.2.1 Análisis Descriptivo de la Asignación en la Etapa 2

Se puede deducir que, aunque se intentó minimizar el uso de cuentas base, las estrictas restricciones de compartición y de no solapamiento forzaron la utilización de 24 cuentas. La asignación específica a cada profesor de la cuenta de videoconferencia con el número de clases y horarios se detalla en la tabla 15.

**Tabla 15***Cuenta de videoconferencia asignada a cada profesor activo.*

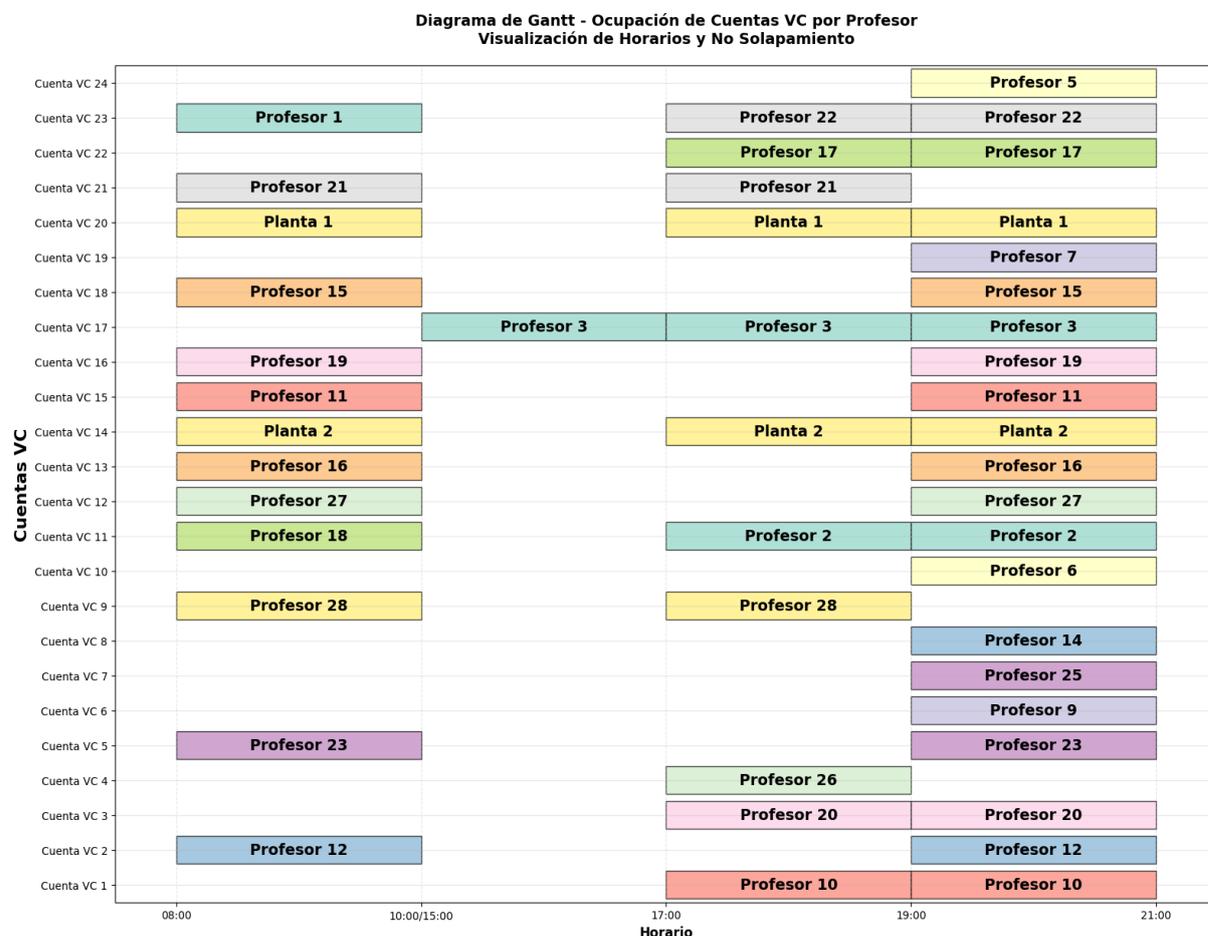
<b>PROFESOR</b>	<b>NÚMERO CLASES</b>	<b>CUENTA VC ASIGNADA</b>	<b>HORARIOS</b>
Profesor 1	1	23	08H00-10H00
Profesor 2	2	11	17H00-19H00, 19H00-21H00
Profesor 3	3	17	15H00-17H00, 17H00-19H00, 19H00-21H00
Profesor 5	1	24	19H00-21H00
Profesor 6	1	10	19H00-21H00
Profesor 7	1	19	19H00-21H00
Profesor 9	1	6	19H00-21H00
Profesor 10	2	1	17H00-19H00, 19H00-21H00
Profesor 11	2	15	08H00-10H00, 19H00-21H00
Profesor 12	2	2	08H00-10H00, 19H00-21H00
Profesor 14	1	8	19H00-21H00
Profesor 15	2	18	08H00-10H00, 19H00-21H00
Profesor 16	2	13	08H00-10H00, 19H00-21H00
Profesor 17	2	22	17H00-19H00, 19H00-21H00
Profesor 18	1	11	08H00-10H00
Profesor 19	2	16	08H00-10H00, 19H00-21H00
Profesor 20	2	3	17H00-19H00, 19H00-21H00
Profesor 21	2	21	08H00-10H00, 17H00-19H00
Profesor 22	2	23	17H00-19H00, 19H00-21H00
Profesor 23	2	5	08H00-10H00, 19H00-21H00
Profesor 25	1	7	19H00-21H00
Profesor 26	1	4	17H00-19H00
Profesor 27	2	12	08H00-10H00, 19H00-21H00
Profesor 28	2	9	08H00-10H00, 17H00-19H00
Planta 1	3	20	08H00-10H00, 17H00-19H00, 19H00-21H00
Planta 2	3	14	08H00-10H00, 17H00-19H00, 19H00-21H00

*Nota. Elaboración propia*

Para visualizar la distribución temporal del uso de las 24 cuentas de videoconferencia asignadas y cómo se gestionó la compartición y exclusividad. La figura 20 presenta un diagrama tipo Gantt donde cada fila representa una cuenta de video conferencia, las columnas las franjas horarias y las barras indican qué profesor está utilizando una cuenta específica durante un horario determinado.

**Figura 20**

*Diagrama de Uso de Cuentas de Videoconferencia por Horario y Profesor Asignado*



*Nota. Elaboración propia*

### **Eficiencia de la compartición**

Esta baja tasa de compartición es una consecuencia directa de las estrictas restricciones impuestas, particularmente la prohibición de compartir cuentas entre profesores con clases en el mismo horario y la regla de no contigüidad. Aunque el modelo minimizó el número total de cuentas necesarias, estas restricciones operativas impiden una consolidación de las cuentas de videoconferencia.

Se puede interpretar que se requieren 24 cuentas de videoconferencia distintas para satisfacer la demanda de clases con profesores asignados, utilizando la totalidad de cuentas base disponibles, además de cuatro cuentas adicionales para los profesores 12, 5, 25 y 10.

De esta manera se verificó que la solución cumple con todas las restricciones formuladas en la Etapa 2.

- Cada uno de los 26 profesores activos aparece exactamente una vez en la columna Profesor del archivo de salida de la Etapa 2.
- Ninguna cuenta tiene más de 2 usuarios en la solución encontrada.
- Los profesores de planta tienen cuentas exclusivas.
- El Solver encontró la solución rigiéndose a las reglas de no contigüidad para profesores que comparten la misma cuenta.

El modelo de la Etapa 2 minimizó de forma exitosa el número total de cuentas requeridas a 24, con ello demostró una mayor eficiencia en el uso de licencias con la adquisición de las 4 licencias adicionales. La función objetivo ponderada priorizó el uso de todas las cuentas base antes de recurrir al mínimo indispensable de adicionales.

La salida de esta etapa es un archivo denominado *asignación\_VC\_E2.xlsx* que proporciona la asignación de cuentas de videoconferencia.

Los slots disponibles en total de las 24 cuentas de videoconferencia son:

*Total Cuentas Usadas \* capacidad de clases por cuenta*

$$24 * 3 = 72$$

Los slots ocupados son de 46, por lo que:

*(Número de clases / slots disponibles) \* 100*

$$46 / 72 \approx 63.88\%$$

El índice de llenado de las cuentas activas fue del 63.88 %, reflejando una compartición impuesta por las restricciones temporales.

El análisis detallado de la asignación óptima revela que la restricción 4 de no contigüidad y restricción 5 de no solapamiento de horario correspondientes a la Etapa 2 son los factores que limitan la compartición de cuentas ya que se refieren a las condiciones que deben cumplirse entre dos profesores distintos. A pesar de que cada cuenta podría teóricamente alojar hasta 3 profesores, la necesidad de separar a los 343 pares de profesores con clases en el mismo horario y a los 197 pares con horarios contiguos impide una mayor consolidación. En consola al ejecutar el script de la Etapa 2 en la sección de precómputos se indican estos los valores.

### **Figura 21**

*Resultado mostrado en consola de los valores resultantes de los pares con Horarios Contiguos y Pares con Solapamiento por Horario en Pulp*

```
Cargando datos desde la salida de la Etapa 1...
Datos cargados correctamente.
Realizando pre-cómputos...
Profesores activos: 26
Pares con horarios contiguos: 197
Pares con solapamiento de horario encontrados: 343
Cuentas base: 20. Cuentas totales consideradas: 26 (hasta 26)
Pesos Objetivo: W_add=1000, W_base=1
Pre-cómputos terminados.
```

*Nota. Elaboración propia*

La identificación y cuantificación de estos 540 pares por solapamiento y contigüidad demuestra la complejidad de las interacciones temporales en la asignación de profesores. La incorporación de las restricciones 4 y 5 basadas en estos conjuntos pre calculados es lo que asegura que la solución final respete las políticas de solapamiento y contigüidad en el uso compartido de las cuentas de video conferencia.

El modelo matemático de la Etapa 2 garantizó una asignación que cumple rigurosamente todas las reglas establecidas y utilizó el mínimo número absoluto de cuentas necesarias. La necesidad de utilizar 24 cuentas distintas, incluyendo las 4 adicionales, se

hace evidente al observar la distribución necesaria para evitar conflictos de solapamiento y contigüidad entre los 26 profesores activos.

### 4.2.3 Resultados de la Etapa 3

La etapa final del modelo secuencial, encargada de asignar licencias de libros digitales a las 46 clases definidas en la Etapa 1, convergió eficientemente a una solución óptima con un tiempo de 0.07 segundos. El script formula el problema BILP utilizando la librería Pulp y lo resuelve mediante el Solver CBC, tras la ejecución, se reporta directamente en la consola el estado final de la solución, el valor de la función objetivo y el tiempo de cómputo.

#### Figura 22

*Valores resultantes de los pares con Horarios Contiguos y Pares con Solapamiento por Horario en Pulp mostrados en consola*

```
Tiempo total de ejecución: 0.07 segundos
Estado de la solución final: Optimal (Code: 1)
```

*Nota. Elaboración propia*

La función objetivo ( $Z_3$ ), minimizó el número de licencias de libros, alcanzó un valor mínimo de 7.0. Este resultado indica que, aplicando la restricción operativa de un máximo de 4 usos simultáneos por licencia y horario ( $L=4$ ), es posible satisfacer las necesidades de todas las clases utilizando solamente 7 de las 11 licencias diferentes disponibles en el inventario del Instituto. Las 4 licencias que resultaron no necesarias para esta asignación óptima fueron los libros 1, 2, 4 y 9.

**Figura 23**

*Valores resultantes de los libros digitales utilizados y no utilizados en la asignación mostrados en consola*

```
--- Resultados de la Asignación de Libros Digitales (Límite 4 por Horario) ---  
Número total de licencias de libros distintas utilizadas: 7  
Licencias de libros NO utilizadas: ['Libro 1', 'Libro 2', 'Libro 4', 'Libro 9']
```

*Nota. Elaboración propia*

### 4.2.3.1 Análisis Descriptivo de la Asignación en la Etapa 3

El modelo logró una asignación óptima que especifica qué libro digital fue asignado a cada clase. La tabla 15 muestra el resultado de cómo se distribuyeron cada uno de los 7 libros utilizados.

**Tabla 16**

*Asignación Óptima de Libros Digitales por Clase*

ID LA CLASE	DE PROFESOR	MÓDULO	HORARIO	PARALELO	LIBRO DIGITAL ASIGNADO
1	Profesor 19	B1	08H00-10H00	A	Libro 3
2	Planta 1	B1	17H00-19H00	A	Libro 3
3	Profesor 19	B1	19H00-21H00	A	Libro 3
4	Planta 1	B1	19H00-21H00	B	Libro 3
5	Profesor 28	B2	08H00-10H00	A	Libro 3
6	Profesor 26	B2	17H00-19H00	A	Libro 3
7	Profesor 11	B2	19H00-21H00	A	Libro 3
8	Profesor 10	B2	19H00-21H00	A	Libro 3
9	Profesor 15	B3	08H00-10H00	A	Libro 5
10	Profesor 3	B3	17H00-19H00	A	Libro 5
11	Profesor 3	B3	19H00-21H00	A	Libro 5
12	Profesor 23	B4	08H00-10H00	A	Libro 5
13	Profesor 3	B4	15H00-17H00	A	Libro 5
14	Profesor 25	B4	19H00-21H00	A	Libro 5
15	Profesor 7	B4	19H00-21H00	B	Libro 5

16	Profesor 11	B5	08H00-10H00	A	Libro 6
17	Profesor 28	B5	17H00-19H00	A	Libro 6
18	Profesor 12	B5	19H00-21H00	A	Libro 6
19	Profesor 5	B5	19H00-21H00	B	Libro 6
20	Profesor 21	I1	08H00-10H00	A	Libro 6
21	Profesor 22	I1	17H00-19H00	A	Libro 6
22	Profesor 20	I1	19H00-21H00	A	Libro 6
23	Profesor 22	I1	19H00-21H00	B	Libro 6
24	Planta 1	I2	08H00-10H00	A	Libro 7
25	Profesor 10	I2	17H00-19H00	A	Libro 7
26	Profesor 16	I2	19H00-21H00	A	Libro 7
27	Planta 2	I2	19H00-21H00	B	Libro 7
28	Profesor 16	I3	08H00-10H00	A	Libro 7
29	Planta 2	I3	17H00-19H00	A	Libro 7
30	Profesor 14	I3	19H00-21H00	A	Libro 7
31	Profesor 27	I3	19H00-21H00	B	Libro 7
32	Profesor 27	I4	08H00-10H00	A	Libro 8
33	Profesor 20	I4	17H00-19H00	A	Libro 8
34	Profesor 6	I4	19H00-21H00	A	Libro 8
35	Profesor 9	I4	19H00-21H00	B	Libro 8
36	Planta 2	A1	08H00-10H00	A	Libro 8
37	Profesor 21	A1	17H00-19H00	A	Libro 8
38	Profesor 23	A1	19H00-21H00	A	Libro 8
39	Profesor 1	A2	08H00-10H00	A	Libro 10
40	Profesor 17	A2	17H00-19H00	A	Libro 10
41	Profesor 15	A2	19H00-21H00	A	Libro 10
42	Profesor 18	A3	08H00-10H00	A	Libro 10
43	Profesor 2	A3	19H00-21H00	A	Libro 10
44	Profesor 12	A4	08H00-10H00	A	Libro 11
45	Profesor 2	A4	17H00-19H00	A	Libro 11
46	Profesor 17	A4	19H00-21H00	A	Libro 11

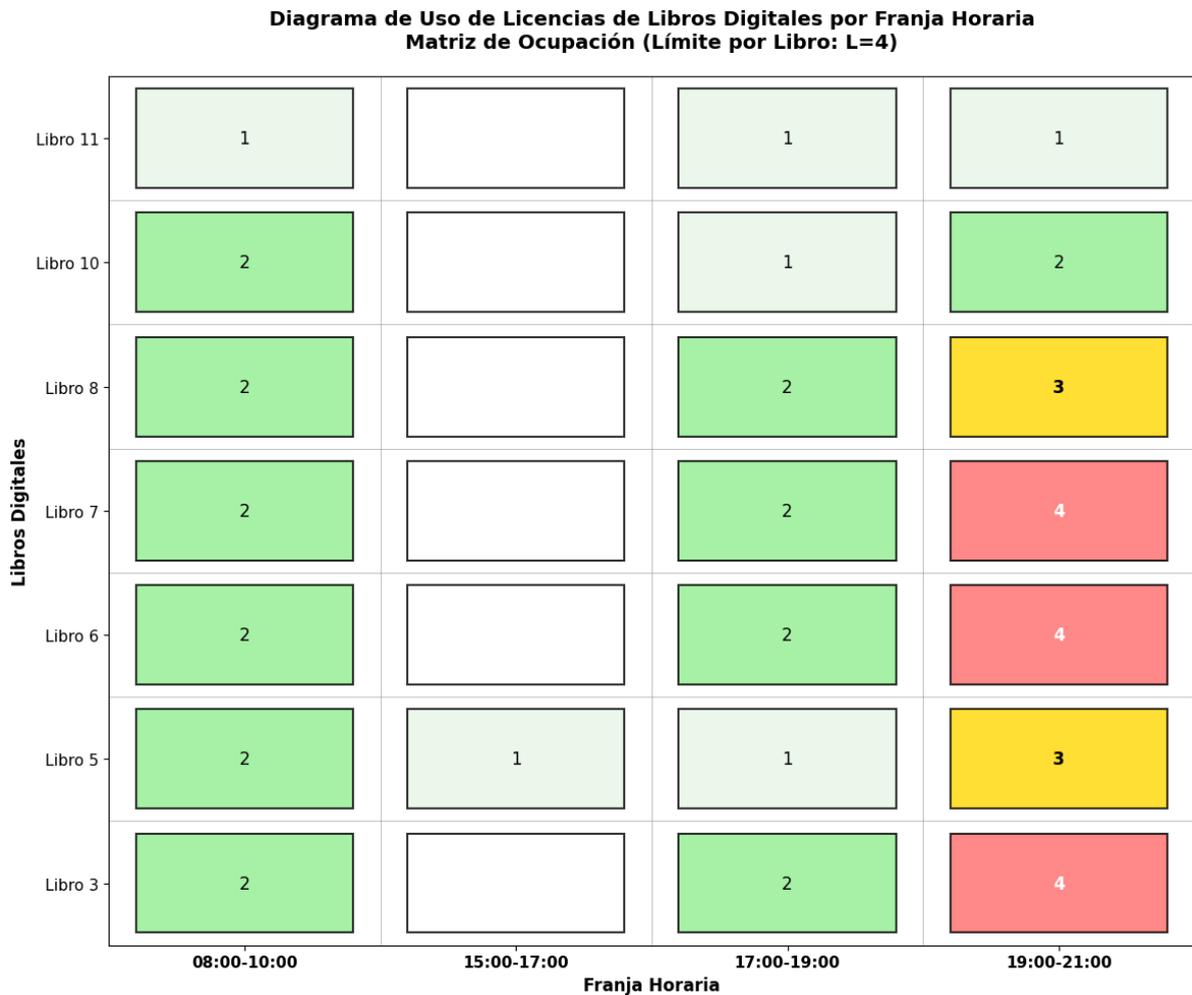
---

*Elaboración propia*

Para ilustrar con mayor claridad la concurrencia en el uso de las licencias de libros se presenta la distribución de uso por franja horaria con el límite máximo de 4 usos simultáneos.

**Figura 24**

*Diagrama de Gantt de la distribución de cada Libro Digital Asignado a la Clase*



*Nota. Elaboración propia*

La demanda de licencias se concentra en los libros que cubren los niveles Principiante e Intermedio desde B1 a I4, con los Libros 3, 6, y 7 siendo los más utilizados con 8 clases cada uno.

**Validación de restricciones**

La validez de la solución se confirmó mediante análisis de la salida y verificaciones programáticas implementadas en el script cumpliendo de esta manera con todas las restricciones formuladas en la Etapa 3.

- Las 46 clases recibieron un libro.
- La asignación respeta la compatibilidad del módulo con el libro correspondiente.
- El uso máximo detectado para cualquier libro en cualquier horario fue de 4.

El modelo de la Etapa 3 logró una asignación eficiente utilizando 7 de las 11 cuentas disponibles de los libros digitales, demostrando el beneficio de la optimización para consolidar el uso de recursos. La salida de esta etapa es un archivo denominado *asignación\_libros\_E3.xlsx* que proporciona la asignación de libros a cada profesor correspondiente a su clase.

La metodología de optimización secuencial en tres etapas ha generado una asignación completa y optimizada de horarios de clases a profesores, cuentas de videoconferencia y libros digitales para el ciclo 2024-6B. Cumple con todas las restricciones operativas, contractuales y pedagógicas modeladas, maximiza las preferencias docentes en la asignación inicial, identifica la necesidad de asignación de cuentas de videoconferencia y optimiza el uso del inventario de libros. Este resultado ofrece una base robusta y efectiva para la estrategia operativa de la institución, que muestra el valor de la optimización matemática para abordar problemas intrincados de distribución de recursos en entornos académicos.

### **4.3 Análisis Comparativo del Modelo Propuesto**

Para evaluar la efectividad de la fase de optimización secuencial se realizó un análisis comparativo con el proceso manual que realiza el Instituto de Lenguas Extranjeras, enfocándose en métricas cuantificables que demuestran el impacto operativo y económico de la implementación.

Se definieron los siguientes Indicadores Clave de Desempeño (KPIs) para la comparación:

- **Tiempo de Planificación:** Tiempo total requerido para generar la asignación completa de profesores, cuentas de video conferencia y libros digitales, desde la definición de clases hasta la comunicación final a los docentes.
- **Cumplimiento de Restricciones:** Capacidad del proceso para asegurar que todas las reglas operativas, contractuales y logísticas se respeten sin errores u omisiones.
- **Eficiencia en el Uso de Recursos:** Optimización del uso de cuentas de video conferencia y licencias de libros, evitando activaciones innecesarias o identificando necesidades reales.

#### 4.3.1 Recopilación de Datos y Estimación de Tiempos de Planificación

Se recopilaron datos sobre el tiempo invertido en el proceso de asignación, tanto para el método manual como para el modelo optimizado propuesto.

- **Proceso Manual**

Según la información operativa proporcionada por la coordinación del Instituto, el proceso manual de asignación se desarrolla intensivamente durante el fin de semana, el esfuerzo dedicado a la asignación completa se estima entre 12 y 16 horas efectivas, concentradas en un periodo de aproximadamente 48 horas previo al inicio de clases.

**Tabla 17**

*Estimación de Tiempos para el Proceso Manual de Asignación*

<b>FASE DEL PROCESO MANUAL</b>	<b>RESPONSABLE</b>	<b>TIEMPO ESTIMADO (HORAS)</b>	<b>PERIODO TÍPICO</b>
Definición/División de Clases y Asignación de Profesores	Coordinación Académica	4	Viernes tarde / sábado mañana
Asignación de Cuentas VC y Libros Digitales	Departamento de Sistemas	8 - 12	Sábado tarde / Domingo (todo el día)

Consolidación y Comunicación Final	Secretaría / Sistemas	0.5 - 1	Domingo tarde / lunes mañana
<b>Tiempo Total Estimado de Esfuerzo Manual Directo</b>		<b>12.5 - 17</b>	<b>Fin de semana previo al inicio de clases</b>

*Elaboración propia basada en información operativa del Instituto.*

- **Modelo Propuesto**

Los tiempos para el proceso utilizando el modelo de optimización se componen de la preparación de datos, la ejecución computacional y la revisión de resultados:

**Tabla 18**

*Tiempos para el Proceso Optimizado de Asignación*

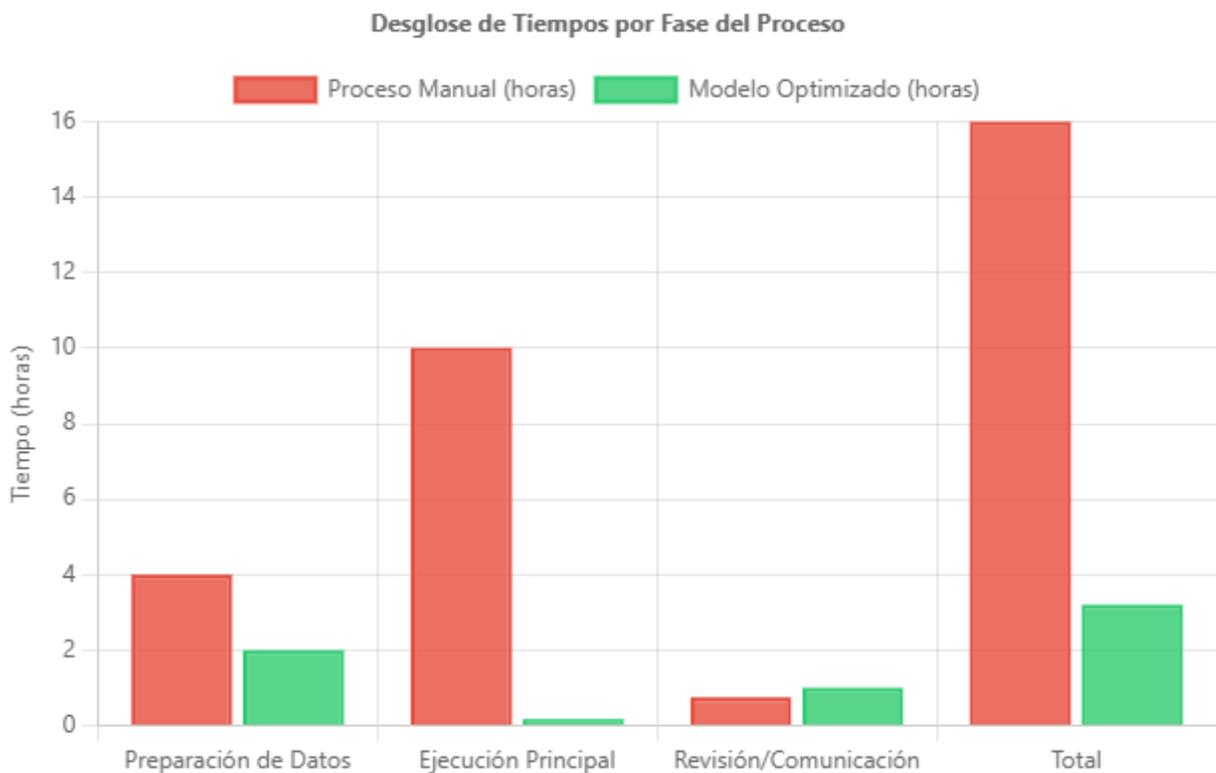
<b>FASE DEL PROCESO OPTIMIZADO</b>	<b>TIEMPO</b>	<b>DEFINICIÓN</b>
Preparación y Formateo de Datos de Entrada	2 horas	Consolidación de archivos Excel (clases, profesores, recursos).
Ejecución Computacional de los 3 Modelos Secuenciales:	Etapa 1: 0.1 segundos	Medido
	Etapa 2: 9.9 min	Medido
	Etapa 3: 0.07 segundos	Medido
	Subtotal Ejecución del Modelo: 10 minutos	Suma de tiempos de ejecución.
Revisión de Resultados y Preparación de Comunicación	1	Revisar salidas Excel, preparar envío de información.
<b>Tiempo Total Estimado del Proceso Optimizado</b>	<b>3.17</b>	

*Nota: Elaboración propia basada en mediciones de ejecución*

La comparación de los tiempos del proceso manual y optimizado se presenta a continuación:

**Figura 25**

*Análisis Comparativo Cuantitativo de los Tiempos Manual vs Optimizado*



*Nota: Elaboración propia*

El análisis comparativo demuestra que la implementación del modelo de optimización secuencial ofrece ventajas sobre el proceso manual. La reducción estimada en el tiempo de planificación junto con la eliminación de la necesidad de trabajo intensivo durante fines de semana y el potencial ahorro en costos de horas extra representan beneficios operativos directos y significativos.

#### **4.3.2 Validación de Factibilidad y Cumplimiento de Restricciones**

Un resultado fundamental del enfoque basado en optimización matemática es la garantía de factibilidad respecto a las restricciones formuladas. A diferencia de un proceso manual, donde la verificación del cumplimiento simultáneo de múltiples reglas complejas es demorosa, tediosa y propensa a errores, la solución generada por el Solver CBC para cada

etapa cumple por definición matemática con todas las restricciones impuestas en tiempos significativamente menores. Las validaciones específicas realizadas en las secciones anteriores confirmaron que:

- Todas las 46 clases fueron asignadas a un único profesor apto y sin conflictos horarios.
- Se respetaron las cargas horarias contractuales de todos los profesores.
- Cada profesor activo recibió una única cuenta de videoconferencia.
- Las reglas de compartición de cuentas videoconferencia con un límite de 3 usuarios, exclusividad, no contigüidad y no solapamiento fueron estrictamente cumplidas.
- Cada clase recibió un único libro digital compatible con su módulo.
- El límite pragmático de 4 usos simultáneos por licencia de libro y horario no fue excedido.

Por lo cual, representa sistematicidad y garantía de cumplimiento como una mejora cualitativa sustancial frente al proceso manual, proporcionando una base operativa coherente en base a las restricciones impuestas para el inicio del ciclo académico.

#### **4.3.3 Evaluación del Desempeño Respecto a Objetivos y Límites Teóricos**

Se evaluó el desempeño de cada etapa en relación con sus objetivos específicos de optimización y los límites del sistema:

- **Maximización de preferencias docentes:** El modelo alcanzó el valor óptimo teórico máximo de  $Z_1^* = 46.0$ , equivalente al número total de clases. Esto se traduce en una tasa de satisfacción del 100% para la preferencia combinada del módulo y el horario preferido en todas las asignaciones realizadas.

- **Minimización de uso de cuentas video conferencia:** La solución óptima  $Z_2^* = 4020.0$  indica que fue imposible satisfacer las restricciones con las 20 cuentas base, cuantificando la necesidad mínima de 4 licencias adicionales.
- **Minimización de licencias de libros:** El modelo logró una optimización significativa del inventario de libros digitales. El valor óptimo  $Z_3^* = 7.0$  indica que solo 7 de las 11 licencias de libros fueron necesarias.

#### 4.3.4 Análisis Comparativo Cuantitativo

La capacidad del modelo para optimizar objetivos específicos como la maximización de preferencias docentes, la cuantificación exacta de la necesidad de cuentas de videoconferencia y la identificación de redundancias en el inventario de libros digitales, provee a la administración información cuantitativa valiosa para una toma de decisiones más informada y una gestión de recursos más estratégica. Estos resultados validan la efectividad del enfoque propuesto para abordar la complejidad de la asignación de recursos.

**Tabla 19**

*Comparación Cuantitativa del Proceso Manual vs el Modelo Optimizado*

<b>Indicador Cuantitativo</b>	<b>Proceso Manual</b>	<b>Modelo Optimizado</b>
Tiempo Total (horas)	16.0	3.2
Satisfacción de preferencias	Decisión de Coordinación	100%
Licencias de libros utilizadas	11	7
Cuentas VC identificadas necesarias	Decisión de Sistemas	24 (20 base +4 adicionales)
Costo estimado por asignación	Alto (horas extra)	Bajo (horario regular)

*Nota: Elaboración propia*

#### 4.3.5 Análisis de Sensibilidad

Para evaluar la robustez y el valor estratégico del modelo más allá del ciclo 2024-6B, se realizó un análisis de sensibilidad. Este proceso examina cómo responde la solución óptima a cambios en parámetros como el uso simultáneo de libros o preferencias del

profesor, demostrando la utilidad del modelo como herramienta de planificación ante escenarios hipotéticos.

#### 4.3.5.1 Escenario 1: Impacto del Cambio en las Preferencias Docentes

Para evaluar la sensibilidad del modelo a las variaciones en la disponibilidad y aptitud de los profesores, un aspecto que cambia cada ciclo académico en el cual se ejecutó el modelo completo utilizando un conjunto de datos alternativo. Se mantuvo la misma demanda de 46 clases del ciclo 2024-6B, pero se reemplazó el archivo Excel de preferencias de los profesores por el correspondiente al ciclo 2024-5B.

El modelo alcanzó nuevamente una solución óptima, logrando asignar cada una de las 46 clases a un profesor que cumplía con sus preferencias de módulo y horario. Sin embargo, el análisis detallado revela un cambio significativo en el número de profesores por contrato a los que se les asignó al menos una clase, aumentó de 24 en el escenario base a 29 en este escenario. Esto elevó el número total de profesores a 31. El modelo determinó que, para dar servicio a los 31 profesores, se requería un total de 25 cuentas de videoconferencia. Esto implicó el uso de las 20 cuentas base disponibles más la necesidad de adquirir 5 licencias adicionales.

#### Figura 26

*Captura de pantalla del mensaje en consola de la asignación de cuentas de videoconferencia*

```
--- Resultados de la Asignación de Cuentas VC ---  
Número de cuentas base usadas: 20 de 20  
Número de cuentas adicionales necesarias: 5  
Número TOTAL de cuentas usadas: 25
```

*Nota: Elaboración propia*

Este resultado demuestra que el modelo es altamente sensible a las preferencias del personal, redistribuyendo la carga de trabajo para maximizar la satisfacción docente global, aun cuando esto implique activar a un mayor número de profesores.

#### 4.3.5.2 Escenario 2: Variación en el Límite de Uso Simultáneo de Libros

Actualmente, cada licencia de libro digital permite hasta 4 usos simultáneos. Si este límite aumenta a 5, se podrían necesitar menos licencias, reduciendo costos. Si disminuye a 3, el modelo podría requerir más licencias, afectando la eficiencia y el aumento de costos. Para ello se modificó la línea de código donde se asigna el valor del límite.

```
105 limite_simultaneo = 3 # <-- LÍMITE ESTABLECIDO
```

Se simuló un escenario en el que las cuentas de libros digitales se reducen al límite de uso simultáneo a 3 usuarios por horario y módulo. Manteniendo todos los demás datos constantes, se ejecutó de nuevo la Etapa 3 del modelo.

El modelo arrojó un resultado de "Infeasible". Esto no es un error, sino un hallazgo que, con el inventario de 11 licencias disponibles, es matemáticamente imposible satisfacer la demanda de las 46 clases sin violar la restricción de 3 usos simultáneos.

Gracias a una rutina de diagnóstico implementada, el modelo identificó la causa precisa donde existen 5 combinaciones de libro y horario donde se necesitan 4 licencias simultáneamente, excediendo el límite de 3. Por ejemplo, para el horario de 19:00 a 21:00, hay 4 clases distintas que, por el módulo de enseñanza, requieren el "Libro 3".

#### Figura 27

*Mensaje en consola de que se requiere un libro adicional para el horario y módulo*

```
- Libro: Libro 3, Horario: 19H00-21H00, Clases Compatibles: 4, Exceso: 1
  → Clase: 3, Módulo: B1, Profesor: Planta 1, Paralelo: B
  → Clase: 2, Módulo: B1, Profesor: Profesor 19, Paralelo: A
  → Clase: 7, Módulo: B2, Profesor: Profesor 26, Paralelo: A
  → Clase: 6, Módulo: B2, Profesor: Profesor 7, Paralelo: A
```

*Nota: Elaboración propia*

El modelo no puede asignar el "Libro 3" a todas sin violar el límite, y como no hay otro libro compatible disponible, el problema se vuelve infactible.

### Figura 28

*Mensaje en consola de que el problema es infactible cuando el límite simultáneo del libro es 3*

```
Tiempo total de ejecución: 0.27 segundos
Estado de la solución final: Infeasible (Code: -1)
```

*Nota: Elaboración propia*

Al aumentar el límite a 5, el modelo convergió a una solución óptima utilizando 7 licencias de libros distintas, el mismo resultado que en el escenario base con límite 4. Esto indica que la flexibilidad adicional de 4 a 5 no genera ahorros adicionales, ya que el cuello de botella real está en el uso simultáneo de 4 licencias para los módulos de enseñanza.

### Figura 29

*Mensaje en consola de que el problema es infactible cuando el límite simultáneo del libro es 3*

```
Verificación del Límite de Uso Simultáneo (<= 5):
No se encontraron violaciones del límite <= 5 por Libro y Horario.
```

*Nota: Elaboración propia*

Este análisis de escenarios demuestra que el modelo propuesto es una herramienta de análisis de costos operativos. Los resultados cuantifican de manera explícita cómo un cambio en un parámetro blando como las preferencias de los profesores tiene un impacto directo y medible en los costos de recursos.

**Tabla 20***Resumen de Análisis de Sensibilidad*

<b>ESCENARIO</b>	<b>PARÁMETRO MODIFICADO</b>	<b>RESULTADO</b>	<b>CONCLUSIÓN</b>
<b>Real</b>	Ciclo 2024-6B; Límite Libros = 4	Solución Óptima: 4 cuentas VC adicionales / 7 libros usados.	Establece la línea base de requerimientos de recursos para la operación normal.
<b>Límite de Libros</b>	Lim de libros = 3	Solución Infeasible.	Identifica el punto de ruptura operativo y justifica la adquisición de licencias específicas para resolver cuellos de botella.
<b>Preferencias Docentes</b>	Preferencias del ciclo 2024-5B	Solución Óptima: 5 cuentas VC adicionales y 31 profesores activos.	Demuestra cómo las preferencias del personal impactan directamente los costos de otros recursos tecnológicos.

*Nota: Elaboración propia*

## Capítulo 5

### Marco Propositivo

#### 5.1 Ejecución del Modelo Matemático

La implementación del modelo optimizado se fundamenta en las mejoras que puede ofrecer frente al proceso existente. El proceso manual, aunque funcional, demostró ser intensivo en tiempo, propenso a errores por la complejidad de las restricciones y utilización de recursos tecnológicos.

El modelo cuenta con la capacidad para automatizar y sistematizar el proceso de asignación, garantizar el cumplimiento de forma matemática las reglas operativas eliminando de esta forma el riesgo de conflictos. De igual manera, la maximización de preferencias docentes y minimización de costos al aprovechar de la mejor manera las cuentas de videoconferencia y libros digitales. Además, la posibilidad de generar datos cuantitativos que apoyen a las decisiones basadas en datos sobre la adquisición de recursos y revisión de políticas.

La adopción de un flujo de trabajo automatizado basado en las tres etapas desarrolladas en Python opera de la siguiente manera:

- El personal de coordinación y sistemas recopilaría y actualizaría los datos de entrada en archivos Excel estandarizados en:
  1. **clases.xlsx**: Archivo con el listado de clases activas separadas en tres columnas con el siguiente formato.

**Columna 1:** “MÓDULO” que contiene las siglas del módulo (GB1).

**Columna 2:** “HORARIO” que contiene uno de los cuatro horarios predefinidos (08H00-10H00).

**Columna 3:** “PARALELO” que contiene el paralelo definido por las letras A, B, C, etc.

2. **preferencias\_profesores.xlsx:** Archivo como plantilla docente actualizada con sus preferencias, aptitudes y disponibilidad con las siguientes columnas.

**Columna 1:** “PROFESOR” que contiene el nombre del profesor de la clase activa.

**Columna 2:** “Clases” que contiene el número de clases de preferencia que el profesor puede enseñar en el ciclo.

**Columna 3 hasta la 15:** “B1”, “B2”, ..., “A4” que contiene el número binario de la aptitud para enseñar el módulo.

**Columna 16 hasta la 19:** “08H00-10H00”,..., “19H00-21H00” que contiene el número binario de la disponibilidad de horarios para enseñar en ese módulo y ciclo.

- Al ejecutar cada script del modelo de optimización de manera secuencial se obtiene:

**Ejecución de la Etapa 1:** Se genera el archivo asignacion\_profesores\_E1.xlsx.

**Ejecución de la Etapa 2:** Lee la salida anterior y genera el archivo asignacion\_VC\_E2.xlsx.

**Ejecución de la Etapa 3:** Lee la salida de la Etapa 1 y genera el archivo asignacion\_libros\_E3.xlsx.

- Por último, se realiza el análisis de resultados y acción administrativa:
  1. El personal de coordinación y sistemas revisa los archivos de salida, que contienen la asignación completa y optimizada.
  2. Basados en los resultados cuantitativos del número de cuentas adicionales necesarias y licencias de libros no utilizadas, la administración toma decisiones sobre adquisiciones o renovaciones.

3. Secretaría utiliza los listados finales para comunicar de manera eficiente y libre de errores las asignaciones con los profesores.

La implementación se basa en herramientas de código abierto y no requiere software comercial especializado. El código fuente completo de los tres modelos de optimización, junto con los archivos de datos de ejemplo utilizados en esta investigación, se encuentra disponible para su consulta y replicación en el siguiente repositorio digital:

<https://github.com/kronosjujo/optimizacion.git>

El repositorio incluye un archivo LÉEME.md con las instrucciones detalladas para la instalación de las dependencias y la ejecución de los scripts.

Para asegurar la correcta ejecución del modelo de optimización en el ciclo 2024-6B y su replicabilidad en futuros períodos académicos, la implementación en Python está diseñada para leer los datos de entrada desde archivos Excel (.xlsx) con una estructura predefinida. La adaptación del modelo a un nuevo ciclo académico solo requiere la actualización del contenido de estos archivos, sin necesidad de modificar el código fuente de los scripts de optimización.

## Conclusiones

- Se concluye que el proceso de asignación de profesores y recursos tecnológicos en el Instituto de Lenguas Extranjeras se basa en un conjunto de reglas implícitas y procedimientos manuales bajo la coordinación de distintos departamentos administrativos, por lo que a través de la metodología de análisis documental en la revisión de las clases activas, inventarios de cuentas de videoconferencia y libros digitales, reuniones con el personal administrativo, preferencia y disponibilidad docente se logró identificar, formalizar y cuantificar un total de 18 tipos de restricciones distintas a lo largo del proceso de asignación evidenciando de esta manera las limitaciones en interdependencias temporales de 343 pares de profesores con solapamiento de horario y los 197 pares con horarios contiguos en ciclo.
- La descomposición del problema global en tres etapas secuenciales fue una metodología efectiva y computacionalmente tratable mediante Programación Lineal Entera Binaria debido a que se fundamentó en la capacidad para representar decisiones binarias al asignar y garantizar la optimalidad de la solución a diferencia de los métodos heurísticos. El diseño secuencial se justificó por la dependencia lógica entre las decisiones para asignación de recursos tecnológicos que dependen intrínsecamente de la asignación del profesor a la clase y horario. Cada etapa se optimizó mediante funciones objetivo tales como la maximización de satisfacción docente, minimización ponderada de costos tecnológicos respetando la jerarquía entre cuentas base y adicionales y la minimización del uso de inventario de libros digitales.
- Se concluye que la implementación computacional del modelo matemático secuencial mediante Python, la librería PuLP y el solver CBC integró datos reales del ciclo 2024-6B el cual estaba conformado por 46 clases, 30 profesores, 20 cuentas

de videoconferencia y 11 libros digitales con acceso simultáneo de 4 usuarios permitiendo generar soluciones óptimas para cada una de las tres etapas en tiempos de ejecución viables para la planificación operativa. La Etapa 1 y 3 se resolvieron en pocos segundos, mientras que la Etapa 2 encontró la solución óptima en aproximadamente 10 minutos debido a una mayor complejidad combinatoria. Esto demuestra que no se requieren recursos computacionales de alto costo ni software comercial licenciado para implementar una solución de optimización efectiva.

- Se concluye que la validación de la efectividad del modelo matemático cumple con todas las restricciones formalizadas. La asignación docente alcanzó el valor óptimo teórico de 46.0, logrando una tasa de satisfacción del 100% en las preferencias combinadas de módulo y horario para las 46 clases asignadas. La solución óptima de la asignación de cuentas de videoconferencia fue de 4020.0 la cual cuantificó con precisión la necesidad de adquirir 4 licencias adicionales sobre las 20 disponibles. En la optimización del inventario de libros, el modelo logró determinar que se necesitaban 7 de los 11 libros digitales para abarcar los módulos de las clases activas. Finalmente, el proceso automatizado reduce el tiempo de planificación de 12 y 17 horas manuales a aproximadamente 3 horas de esfuerzo combinado.

## Recomendaciones

- Se recomienda ejecutar el modelo de forma paralela al proceso manual durante al menos un ciclo académico. Esta estrategia permitirá comparar resultados, validar la fiabilidad del modelo en un entorno real y familiarizar al personal con sus capacidades sin interrumpir las operaciones de la parte administrativa.
- Se sugiere que antes de cada ciclo de planificación, el personal de coordinación deberá recopilar y validar los datos de entrada de las clases en las columnas de módulo, horario y paralelo, de igual forma para las preferencias docentes asegurando que los valores binarios reflejen con precisión la disponibilidad y aptitud. Cualquier cambio en las reglas operativas deberá ser documentado y reflejado en los parámetros del modelo para asegurar que sus soluciones siempre se alineen con la realidad institucional.
- Se sugiere realizar un taller práctico enfocado en la ejecución de los scripts de optimización y la interpretación de los reportes de salida para validar la carga docente e identificar a los profesores que no recibieron asignación, conocer el número de cuentas adicionales necesarias y libros asignados y no utilizados.
- Se recomienda designar a un responsable del modelo dentro del equipo de sistemas centralizará el conocimiento y facilitará su uso recurrente. Realizar revisiones semestrales para actualizar las librerías PuLP y Pandas a sus versiones estables y para verificar que la versión de Python utilizada sigue siendo compatible.
- Se recomienda adoptar e integrar formalmente el marco de optimización matemática como la herramienta para la planificación de recursos y asignación en futuros ciclos académicos y otros programas de idiomas del Instituto de Lenguas Extranjeras para mejorar la eficiencia y la toma de decisiones basada en datos.

- Para enriquecer el modelo implementado se recomienda desarrollar una interfaz gráfica simple para facilitar su uso por personal no técnico que permita cargar los archivos Excel y se obtengan los archivos de salida.

## Bibliografía

- Aardal, K., Scavuzzo, L., & Wolsey, L. A. (2023). A study of lattice reformulations for integer programming. *Operations Research Letters*, 51(4), 401–407. <https://doi.org/10.1016/J.ORL.2023.05.001>
- Abdipoor, S., Yaakob, R., Goh, S. L., & Abdullah, S. (2023). Meta-heuristic approaches for the University Course Timetabling Problem. *Intelligent Systems with Applications*, 19, 200253. <https://doi.org/10.1016/J.ISWA.2023.200253>
- Acuña-Galván, I., Lezama-León, E., Bolaños-Rodríguez, E., Solís-Galindo, A. E., & Vega-Cano, G. Y. (2022). Generación de horarios mediante algoritmos genéticos. *Boletín Científico INVESTIGIUM de la Escuela Superior de Tizayuca*, 8(Especial), 51–57. <https://doi.org/10.29057/est.v8iespecial.9866>
- Apolinar, A., Flórez, P., Pérez, J., Ziviz, Y., & Rodríguez, M. (2020). *Modelo matemático de asignación y elaboración de horarios con rotación de aulas de clase para los cursos de secundaria en un colegio privado en la ciudad de Bogotá*. <https://repositorio.escuelaing.edu.co/handle/001/1323>
- Asamblea Nacional del Ecuador. (2018). *Ley Orgánica de Educación Superior, LOES | Ecuador - Guía Oficial de Trámites y Servicios*. <https://www.gob.ec/regulaciones/ley-organica-educacion-superior-loes>
- Asamblea Nacional del Ecuador. (2021). *Ley Orgánica de Protección de Datos Personales*. <https://www.asambleanacional.gob.ec/es/multimedios-legislativos/63464-ley-organica-de-proteccion-de-datos>
- Bashab, A., Ibrahim, A. O., Hashem, I. A. T., Aggarwal, K., Mukhlif, F., Ghaleb, F. A., & Abdelmaboud, A. (2022). Optimization Techniques in University Timetabling Problem:

- Constraints, Methodologies, Benchmarks, and Open Issues. *Computers, Materials and Continua*, 74(3), 6461–6484. <https://doi.org/10.32604/CMC.2023.034051>
- Brun, A., Feron, E., Alam, S., & Delahaye, D. (2025). Schedule optimization and staff allocation for airport security checkpoints using guided simulated annealing and integer linear programming. *Journal of Air Transport Management*, 124, 102746. <https://doi.org/10.1016/J.JAIRTRAMAN.2025.102746>
- Castro Maldonado, J. J., Gómez Macho, L. K., & Camargo Casallas, E. (2023). La investigación aplicada y el desarrollo experimental en el fortalecimiento de las competencias de la sociedad del siglo XXI. *Tecnura*, 27(75), 140–174. <https://doi.org/10.14483/22487638.19171>
- Chen, Y., Bayanati, M., Ebrahimi, M., & Khalijian, S. (2022). A Novel Optimization Approach for Educational Class Scheduling with considering the Students and Teachers' Preferences. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2022(1), 5505631. <https://doi.org/10.1155/2022/5505631>
- Chigambayeva, D., Goryakin, M., & Batova, P. (2024). Optimization Models for Teaching Load Formation of University Teachers. *2024 IEEE AITU: Digital Generation, Conference Proceedings - AITU 2024*, 146–149. <https://doi.org/10.1109/IEEECONF61558.2024.10585368>
- Cornejo Reyes, J., & Robles Bykbaev, V. (2018). *Diseño e implementación de un algoritmo matemático basado en optimización para la generación de horarios de clases en la Universidad Politécnica Salesiana*. <http://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/16121>
- Elmaghraby, S. E. (2003). Operations Research. *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, 193–218. <https://doi.org/10.1016/B0-12-227410-5/00513-5>

- Espín Guerrero, R., Toalombo Rojas, B., Moyolema Chaglla, Á., & Altamirano Salazar, A. (2022). Optimización de los procesos operativos mediante la teoría de restricciones en una empresa metalmecánica. *Revista Digital Novasinergia*, 5(2), 33–57. <https://doi.org/10.37135/NS.01.10.03>
- Flores Tapia, E., & Flores Cevallos, K. (2021). Método simplex de programación lineal aplicado a una empresa distribuidora de mobiliario. *Revista Entorno*. <https://doi.org/10.5377/entorno.v1i71.14317>
- Gavidia, J., Meneses, A., Zúñiga, L., & Mariño, C. (2021). MODELO MATEMÁTICO PARA MINIMIZAR LOS COSTOS DE PRODUCCIÓN EN UNA ENSAMBLADORA DE VEHÍCULOS - ÁREA DE ENSAMBLAJE. *Perfiles*, 1(26), 90–100. <https://doi.org/10.47187/PERF.V1I26.140>
- Goh, H. H., He, R., Zhang, D., Liu, H., Dai, W., Lim, C. S., Kurniawan, T. A., Teo, K. T. K., & Goh, K. C. (2022). A multimodal approach to chaotic renewable energy prediction using meteorological and historical information. *Applied Soft Computing*, 118, 108487. <https://doi.org/10.1016/J.ASOC.2022.108487>
- González Cuevas, L. A., Román del Valle, M. A., & Cossio Franco, E. G. (2020). PROGRAMACIÓN Y ASIGNACIÓN DE HORARIOS: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LITERATURA. *Academia Journals 2020*, 12(6), 1946–5351.
- Guerrero Salas, H. (2022). *Programación lineal aplicada* (ECOEd, Ed.; Tercera). Ecoe Ediciones S.A.S. <https://www.ecoedediciones.com/product/programacion-lineal-aplicada-3ra-edicion-impreso/>
- Guevara Alban, G. P., Verdesoto Arguello, A. E., & Castro Molina, N. E. (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas,

- y de investigación-acción). *RECIMUNDO*, 4(3), 163–173.  
[https://doi.org/10.26820/recimundo/4.\(3\).julio.2020.163-173](https://doi.org/10.26820/recimundo/4.(3).julio.2020.163-173)
- Hazimeh, H., Mazumder, R., & Saab, A. (2020). Sparse Regression at Scale: Branch-and-Bound rooted in First-Order Optimization. *Mathematical Programming*, 196(1–2), 347–388. <https://doi.org/10.1007/s10107-021-01712-4>
- Hernández Vázquez, J. I., Hernández González, S., Baltazar Flores, M. del R., Jiménez García, J. A., & Hernández Vázquez, J. O. (2020). Programación matemática binaria por etapas en la elaboración de un horario universitario. *Entreciencias: Diálogos en la Sociedad del Conocimiento*, 8(22).  
<https://doi.org/10.22201/enesl.20078064e.2020.22.70018>
- ILE. (2024). *Políticas de Protección de Datos – ILE*. <https://www.ile.ec/politicas-de-privacidad/>
- ISO 9001. (2020). *International Organization for Standardization*.  
<https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:9001:ed-5:v1:es>
- Jartnillaphand, P., Mardaneh, E., & Bui, H. T. (2025). A tabu search algorithm for Unspecified Parallel Machine scheduling with shift consideration. *Computers & Operations Research*, 183, 107151. <https://doi.org/10.1016/J.COR.2025.107151>
- Mahlous, A. R., & Mahlous, H. (2023). Student timetabling genetic algorithm accounting for student preferences. *PeerJ Computer Science*, 9, e1200.  
<https://doi.org/10.7717/PEERJ-CS.1200>
- Mesa, F., Correa-Vélez, G., & Barba-Ortega, J. J. (2022). Optimización de ecuaciones con restricciones no lineales: comparativo entre técnicas heurística y convexa. *Revista UIS Ingenierías*, 21(2), 53–60. <https://doi.org/10.18273/REVUIN.V21N2-2022005>

- Mirhosseini, M., Fazlali, M., Fallah, M. K., & Lee, J. A. (2023). A fast MILP solver for high-level synthesis based on heuristic model reduction and enhanced branch and bound algorithm. *Journal of Supercomputing*, 79(11), 12042–12073. <https://doi.org/10.1007/S11227-023-05109-2/METRICS>
- Pérez Pravia, M. C., Pupo Alarcón, N., & Cruz, L. O. (2023). Modelo de Madurez de Gestión de Restricciones Físicas. *Economía y Negocios*, 14(2), 96–113. <https://doi.org/10.29019/EYN.V14I2.1212>
- Pinargote-Zambrano, I., José, J., Técnica, U., Manabí, D. E., Lino-Calle, I., Universidad Estatal, A. M., Sur, D., Vera-Almeida, I., Jerfreir, B., Universidad, M., & De Manabí, T. (2024). Python en la enseñanza de las Matemáticas para estudiantes de nivelación en Educación Superior. *MQRInvestigar*, 8(3), 3966–3989. <https://doi.org/10.56048/MQR20225.8.3.2024.3966-3989>
- Saeik, F., Avgeris, M., Spatharakis, D., Santi, N., Dechouniotis, D., Violos, J., Leivadreas, A., Athanasopoulos, N., Mitton, N., & Papavassiliou, S. (2021). Task offloading in Edge and Cloud Computing: A survey on mathematical, artificial intelligence and control theory solutions. *Computer Networks*, 195. <https://doi.org/10.1016/j.comnet.2021.108177>
- Saltos Atiencia, R., & Benavides Castillo, L. (2021). Formulación e implementación de un modelo de programación entera para la creación de horarios de clases: un caso de estudio en Ecuador. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 22(1). <https://doi.org/10.18845/RDMEI.V22I1.5734>
- SEIBE. (2023, febrero 22). *Reglamento General a la Ley Orgánica de Educación Intercultural*. <https://educacionbilingue.gob.ec/>

- Serrano Rugel, B. H., Garzón Montealegre, V. J., Macas, A. G., & Trujillo Vásquez, V. M. (2019). Modelo de investigación operativa para la programación óptima de los horarios de clase en las carreras de la Facultad de Ciencias Agropecuarias de la Universidad Técnica de Machala. *Revista Metropolitana de Ciencias Aplicadas*, 2(3), 141–148. <https://doi.org/10.62452/7PSKY374>
- Sylejmani, K., Gashi, E., & Ymeri, A. (2023). Simulated annealing with penalization for university course timetabling. *Journal of Scheduling*, 26(5), 497–517. <https://doi.org/10.1007/S10951-022-00747-5>
- Talbi, E. G. (2024). Metaheuristics for variable-size mixed optimization problems: A unified taxonomy and survey. *Swarm and Evolutionary Computation*, 89, 101642. <https://doi.org/10.1016/J.SWEVO.2024.101642>
- Tan, J. S., Goh, S. L., Kendall, G., & Sabar, N. R. (2021). A survey of the state-of-the-art of optimisation methodologies in school timetabling problems. *Expert Systems with Applications*, 165. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.113943>
- Urbán-Rivero, L. E., Lezama-León, M. H., Cruz-Aldana, E., Mares-Ortega, N. D., & Loera-Díaz, L. F. (2024). Un modelo de programación entera para la generación de horarios universitarios: Un caso de estudio. *Computación y Sistemas*, 28(1), 137–149. <https://doi.org/10.13053/CYS-28-1-4610>
- Xue, D., & Pan, F. (2024). Optimization Problem Solutions. *MATLAB and Simulink in Action*, 323–352. [https://doi.org/10.1007/978-981-99-1176-9\\_11](https://doi.org/10.1007/978-981-99-1176-9_11)