



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y  
TECNOLOGÍAS  
CARRERA DE PEDAGOGIA DE LAS CIENCIAS  
EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA**

**Título:**

**GEOGEBRA Y APLICACIONES DE INTEGRAL DEFINIDA EN  
ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES:  
MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA, UNACH**

**Trabajo de Titulación para optar al título de Licenciado en  
Pedagogía de las Matemáticas y la Física**

**Autor:**

**Hernández Aguagallo Kevin Fabricio**

**Tutor:**

**Dr. Luis Fernando Pérez**

**Riobamba, Ecuador  
2024**

## DECLARATORIA DE AUTORÍA

Yo, Kevin Fabricio Hernández Aguagallo, con cédula de ciudadanía 2150340251, autor del trabajo de investigación titulado: GEOGEBRA Y APLICACIONES DE INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA, UNACH, certifico que la producción, ideas, opiniones, criterios, contenidos y conclusiones expuestas son de mí exclusiva responsabilidad.

Asimismo, cedo a la Universidad Nacional de Chimborazo, en forma no exclusiva, los derechos para su uso, comunicación pública, distribución, divulgación y/o reproducción total o parcial, por medio físico o digital; en esta cesión se entiende que el cesionario no podrá obtener beneficios económicos. La posible reclamación de terceros respecto de los derechos de autor (a) de la obra referida, será de mi entera responsabilidad; librando a la Universidad Nacional de Chimborazo de posibles obligaciones.

En Riobamba, 06 de agosto de 2024



---

Kevin Fabricio Hernández Aguagallo

C.I: 2150340251



## ACTA FAVORABLE - INFORME FINAL DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

En la Ciudad de Riobamba, a los 07 días del mes de agosto de 2024, luego de haber revisado el Informe Final del Trabajo de Investigación presentado por el estudiante **Kevin Fabricio Hernández Aguagallo** con CC: **2150340251**, de la carrera **PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA** y dando cumplimiento a los criterios metodológicos exigidos, se emite el **ACTA FAVORABLE DEL INFORME FINAL DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN** titulado "**Geogebra en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida en los estudiantes de la carrera de matemáticas y física, UNACH**", por lo tanto, se autoriza la presentación del mismo para los trámites pertinentes.



El código QR pertenece a:  
**LUIS FERNANDO PEREZ  
CHAVEZ**

---

Dr. Luis Fernando Pérez Chávez

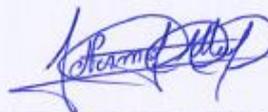
**TUTOR**

## CERTIFICADO DE LOS MIEMBROS DEL TRIBUNAL

Quienes suscribimos, catedráticos designados Miembros del Tribunal de Grado para la evaluación del trabajo de investigación GEOGEBRA Y APLICACIONES DE INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA, UNACH, presentado por Kevin Fabricio Hernández Aguagallo, con cédula de identidad número 2150340251, bajo la tutoría de Dr. Luis Fernando Pérez Chávez; certificamos que recomendamos la APROBACIÓN de este con fines de titulación. Previamente se ha evaluado el trabajo de investigación y escuchada la sustentación por parte de su autor; no teniendo más nada que observar.

De conformidad a la normativa aplicable firmamos, en Riobamba al 27 de enero de 2025

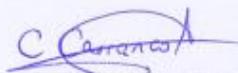
Norma Isabel Allauca Sandoval, Mgs.  
**PRESIDENTE DEL TRIBUNAL DE GRADO**



Jhonny Patricio Ilbay Cando, Mgs.  
**MIEMBRO DEL TRIBUNAL DE GRADO**



Cristian David Carranco Avila Mgs.  
**MIEMBRO DEL TRIBUNAL DE GRADO**





# CERTIFICACIÓN

Que, **Kevin Fabricio Hernández Aguagallo** con CC: **2150340251**, estudiante de la Carrera **Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física**, Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías; ha desarrollado bajo mi tutoría el trabajo de investigación titulado **"GEOGEBRA Y APLICACIONES DE INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA, UNACH"**, cumple con el 8 %, de acuerdo al reporte del sistema **Turnitin Informe de Originalidad**, porcentaje aceptado de acuerdo a la reglamentación institucional, por consiguiente autorizo continuar con el proceso.

Riobamba, 21 de noviembre de 2024



Escaneado digitalmente por:  
**LUIS FERNANDO PEREZ CHAVEZ**

---

Dr. Luis Fernando Pérez Chávez  
C.I: 0602160137  
TUTOR

## **DEDICATORIA**

A mi madre: Mayra Aguagallo

*Kevin Hernández*

## **AGRADECIMIENTO**

A Dios, por la fuerza.

A mi madre, por la vida. "*Dear mama*".

***Kevin Hernández***

## ÍNDICE GENERAL

DECLARATORIA DE AUTORIA

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTO

INDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

RESUMEN

ABSTRACT

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN .....	15
1.1 Antecedentes .....	16
1.2 Planteamiento del problema .....	18
1.3 Formulación del problema .....	20
1.3.1 Preguntas directrices.....	20
1.4 Justificación .....	20
1.5 Objetivos.....	21
1.5.1 General .....	21
1.5.2 Específicos .....	21
CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO .....	22
2.1 Estado del arte.....	22
2.2 Fundamentación teórica .....	22
2.2.1 Aprendizaje .....	22
2.2.2 Teorías de aprendizaje .....	23
2.2.3 Aprendizaje en matemáticas .....	24
2.2.4 Recursos didácticos .....	25
2.2.5 Tics en la educación .....	27
2.2.6 Software geogebra.....	28
2.3 Integral definida – aplicaciones .....	30
2.4 Área bajo la curva .....	31
2.5 Área entre curvas .....	32
2.6 Longitud de arco .....	33
2.7 Centro de masa.....	35
2.8 Centroide de una región plana .....	37
2.9 Volumen de un sólido en revolución en el eje x.....	38

2.10 Volumen de un sólido en revolución en el eje y .....	40
2.11 Trabajo.....	40
<b>CAPÍTULO III. METODOLOGIA .....</b>	<b>41</b>
3.1 Enfoque de investigación .....	41
3.2 Diseño de investigación.....	41
3.3 Nivel de investigación .....	41
3.4 Tipo de investigación .....	42
3.4.1 Según el lugar .....	42
3.4.2 Según el tiempo.....	42
3.5 Población y muestra .....	42
3.5.1 Población .....	42
3.6 Técnicas e instrumentos de recolección de datos .....	43
3.6.1 Técnica .....	43
3.6.2 Instrumentos.....	43
3.7 Procesos de análisis de datos .....	44
<b>CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....</b>	<b>45</b>
4.1 Análisis e interpretación de la prueba objetiva .....	45
4.2 Análisis e interpretación de la encuesta .....	48
4.3 Discusión .....	57
<b>CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>59</b>
5.1 Conclusiones .....	59
5.2 Recomendaciones.....	59
<b>CAPÍTULO VI. PROPUESTA .....</b>	<b>61</b>
6.1 Título de la propuesta.....	61
6.2 Justificación de la propuesta.....	61
6.3 Fines de la guía .....	61
6.4 Objetivo de la propuesta.....	61
6.4.1 Objetivo general de la propuesta.....	61
6.4.2 Objetivos específicos de la propuesta .....	61
6.5 Enfoque teórico y contenido de la guía .....	62
6.6 Recursos utilizados.....	62
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>63</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>65</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1.</b>	Estudiantes que forman parte de la población de estudio .....	42
<b>Tabla 2.</b>	Estudiantes que forman parte de la muestra de estudio.....	43
<b>Tabla 3.</b>	Resumen de respuestas conceptuales. ....	45
<b>Tabla 4.</b>	Resumen de respuestas procedimentales.....	46
<b>Tabla 5.</b>	GeoGebra mejora la comprensión de los conceptos relacionados con la aplicación de la integral definida.....	48
<b>Tabla 6.</b>	El uso de GeoGebra facilita la capacidad para resolver problemas relacionados con la aplicación de la integral definida.....	48
<b>Tabla 7.</b>	GeoGebra contribuye al desarrollo de habilidades prácticas en el manejo de herramientas tecnológicas para el estudio de las matemáticas .....	49
<b>Tabla 8.</b>	La visualización gráfica de GeoGebra es útil para comprender mejor los conceptos de la aplicación de la integral definida .....	49
<b>Tabla 9.</b>	Las manipulaciones interactivas en GeoGebra facilitan la comprensión de la aplicación de la integral definida.....	50
<b>Tabla 10.</b>	Los recursos complementarios, como videos o enlaces a material adicional, proporcionados en GeoGebra enriquecen la comprensión de la aplicación de la integral definida.....	50
<b>Tabla 11.</b>	Experimentó dificultades técnicas o problemas al utilizar GeoGebra en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida.....	51
<b>Tabla 12.</b>	La retroalimentación proporcionada por GeoGebra sobre respuestas y pasos para resolver problemas ha sido clara y útil.....	51
<b>Tabla 13.</b>	Es recomendable proponer el uso de GeoGebra a los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física para el aprendizaje de la aplicación de la integral definida.....	52
<b>Tabla 14.</b>	Es importante contar con una guía didáctica con GeoGebra para el aprendizaje de la aplicación de la integral definida.....	52
<b>Tabla 15.</b>	La introducción clara y motivadora es esencial en una guía didáctica. ....	53
<b>Tabla 16.</b>	La presencia de objetivos de aprendizaje específicos es importante en una guía didáctica.....	53
<b>Tabla 17.</b>	La inclusión de ejemplos prácticos facilita la comprensión en una guía didáctica.....	54
<b>Tabla 18.</b>	Las actividades interactivas para aplicar conceptos en una guía son satisfactorias	54
<b>Tabla 19.</b>	La presencia de recursos multimedia (videos, imágenes, enlaces) enriquece la guía didáctica.....	55

<b>Tabla 20.</b> La inclusión de referencias bibliográficas es relevante para profundizar en los temas tratados .....	55
<b>Tabla 21.</b> La presencia de resúmenes al final de cada sección es útil en una guía didáctica...	56
<b>Tabla 22.</b> La inclusión de ejercicios prácticos con respuestas o soluciones es relevante en una guía....	56
<b>Tabla 23.</b> Una sección de preguntas frecuentes para aclarar dudas es importante en una guía didáctica	57

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Particiones de la función.....	31
<b>Figura 2.</b> Área entre 2 curvas.....	32
<b>Figura 3.</b> Particiones entre el área de las curvas .....	32
<b>Figura 4.</b> Segmento de una línea.....	34
<b>Figura 5.</b> Área de una lamina.....	35
<b>Figura 6.</b> Rectángulo de la lamina .....	36
<b>Figura 7.</b> Región entre dos funciones.....	37
<b>Figura 8.</b> Cilindro tridimensional en el plano .....	38
<b>Figura 9.</b> Solido S dividido en 3 partes perpendicular al eje x .....	39
<b>Figura 10.</b> Resumen de respuestas procedimentales .....	45
<b>Figura 11.</b> Resumen de respuestas conceptuales .....	46
<b>Figura 12.</b> Comparativa de calificaciones entre semestres.....	47

## RESUMEN

En la actualidad es un gran reto para los estudiantes generar motivación por las matemáticas, sin embargo, ahora existen herramientas tecnológicas que ayudan a la comprensión y resolución en diferentes temáticas, es por ello que el trabajo presentado tiene como objetivo elaborar una guía didáctica utilizando como herramienta a GeoGebra para la comprensión de la aplicación de integrales definidas. En tal sentido, la metodología empleada en este estudio fue de enfoque cuantitativo con diseño no experimental de alcance descriptivo-propositivo, se tomó como sujetos de estudio a los estudiantes de la carrera de matemáticas y física de la UNACH, específicamente a los que están cursando el quinto, sexto y séptimo semestre. Los participantes respondieron a 2 instrumentos para la recolección de datos que son una prueba objetiva y una encuesta. Mediante la prueba objetiva se verificó que más del 60% de estudiantes presentan problemas para resolver ejercicios de integrales definidas; mientras que, mediante la encuesta, se observó que más del 70% de encuestados consideraron importante el uso del software GeoGebra para una mejor comprensión de la temática. Como conclusión, se determinó que la mayoría de estudiantes necesitan una guía que sirva de apoyo para el autoaprendizaje y acompañamiento en cuanto a las integrales definidas y con esto poder desarrollar ejercicios que fortalezcan su conocimiento, de manera que se logró construir una guía que permita a los estudiantes mantener el autoaprendizaje.

**Palabras claves:** GeoGebra, Integrales Definidas, Guía didáctica, software

## ABSTRACT

The main objective of this research study was to develop a didactic guide using Geogebra as a tool for understanding the application of definite integrals. Nowadays it is a great challenge for students to generate motivation for mathematics, however, now there are technological tools that help understanding and resolution in different topics. In this sense, the methodology used in this study was a quantitative approach with a non-experimental design of descriptive-propositive scope, the study subjects were taken as students of mathematics and physics at UNACH, specifically those who are studying in the fifth, sixth and seventh semester. The participants responded to two instruments for data collection: an objective test and a survey. By means of the objective test it was verified that more than 60% of students present problems to solve exercises of definite integrals; while, by means of the survey, it was observed that more than 70% of respondents considered important the use of GeoGebra software for a better understanding of the subject matter. As a conclusion, it was determined that most students need a guide to support self-learning and accompaniment in terms of definite integrals and with this to be able to develop exercises that strengthen their knowledge, so that it was possible to build a guide that allows students to maintain self-learning.

**Keywords:** GeoGebra, definite integrals, didactic guide, software.



Reviewed by:  
Marco Antonio Aquino  
ENGLISH PROFESSOR  
C.C. 1753456134

## CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

La aplicación de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en el área educativa es de suma importancia en la actualidad ya que disminuye poco a poco la diferencia digital que existe en la sociedad, brinda tanto como a estudiantes y docentes de habilidades y destrezas adecuadas para el fortalecimiento del aprendizaje (Alcívar et al. 2019). Es necesario que los procesos educativos puedan relacionarse con las tecnologías de información del conocimiento, de esta manera lograr que todos los recursos se ajusten a las necesidades educativas. La incorporación del software educativo en cada una de las clases permite lograr objetivos dentro de cada una de las actividades. Es por esta razón que la presente investigación será orientada en fomentar la utilización del software GeoGebra dentro de las aulas, específicamente en el tema de integral definida.

GeoGebra proporciona herramientas de solución computacional y numérica que facilitan a los estudiantes la realización de cálculos precisos y la verificación de resultados. Esto permitirá analizar y comparar diferentes resultados obtenidos mediante técnicas analíticas y numéricas, mejorando la comprensión de las aplicaciones de la integral definida. Permite a los estudiantes modelar situaciones del mundo real y aplicar conceptos para resolver problemas relacionados con el cálculo de área, volumen, tasa de cambio y otros conceptos fundamentales.

Este trabajo de Investigación se desarrollará en la Universidad Nacional de Chimborazo de la ciudad de Riobamba, con los estudiantes de quinto semestre de la carrera de pedagogía de las ciencias experimentales: Matemáticas y la Física. Los datos se obtendrán mediante una investigación cuantitativa, de diseño no experimental ya que no se manipularán las variables de estudio, tipo descriptiva, para la recolección de datos se utilizará el método de la encuesta con su instrumento el cuestionario.

En cuanto a la estructura que este estudio tendrá, será:

Capítulo I: Se presenta la introducción, antecedentes de la investigación, planteamiento y formulación del problema y preguntas directrices, objetivos de la investigación y justificación. Los cuales son las especificaciones del qué y el para qué de la investigación.

Capítulo II: Presenta el marco teórico, que se constituye con la información teórica de la investigación, que servirá de fundamento para el análisis y presentación.

Capítulo III: Se encuentra la metodología de la investigación, conformado por el enfoque, diseño, tipo, instrumentos para recoger la información, así como la población y la muestra, además de los métodos y recurso utilizados en la investigación.

Capítulo IV: Sintetización, tabulación y discusión de los resultados obtenidos a través de tablas y gráficas tanto de la prueba objetiva como de la encuesta.

Capítulo V: Conclusiones y recomendaciones de la investigación, a las cuales se han llegado gracias a la investigación y a los objetivos planteados en un inicio.

Capítulo VI: Se presenta el resultado de la investigación como producto, que es la guía didáctica en forma de propuesta, la cual consta de información y desarrollo usando GeoGebra en temas como: Área bajo la curva, área entre curvas, longitud de arco, centro de

masa, centroide de una región plana, volumen de un sólido en revolución en el eje  $x$  y  $y$ , y el estudio del trabajo.

## 1.1 Antecedentes

En el contexto de un proyecto de investigación, un antecedente se refiere a cualquier estudio previo, investigación, teoría, descubrimiento, evento histórico, u otro hecho relevante que ha sido realizado u ocurrido con respecto al tema de estudio del proyecto. Los antecedentes son importantes porque proporcionan una base sólida para la investigación que se está realizando y ayudan a contextualizar el problema. Al revisar los antecedentes, el investigador puede identificar lagunas en el conocimiento actual y encontrar oportunidades para aportar nueva información o perspectivas útiles.

En el año 2019, Alexander Bravo Molina, Javier Eugenio Arenas Díaz y Eliécer Pineda Ballesteros en su investigación titulada "El aprendizaje de la geometría con GeoGebra, un enfoque de aprendizaje por problemas", presentaron una experiencia que evaluó el efecto del software GeoGebra como complemento del aprendizaje por problemas en la enseñanza de la geometría. El estudio utilizó el enfoque metodológico de la investigación-acción, con un grupo control y un grupo experimental. La estrategia pedagógica se basó en cinco talleres en los que se abordaron las habilidades geométricas básicas y superiores para resolver problemas y ejercicios relacionados con círculos, cuadrados, triángulos y rectángulos, con el uso de GeoGebra como mecanismo informático. Para la recolección de datos se emplearon instrumentos pre y pos test, y para su análisis se utilizó Excel. Los resultados concluyeron que la inclusión del aprendizaje por problemas, mediado por GeoGebra, mejoró el rendimiento de la geometría. Se observó que los resultados en la formación de las habilidades geométricas básicas y superiores del grupo control estuvieron por debajo del grupo experimental (Bravo et al, 2019). Este estudio representa un aporte significativo a la literatura sobre el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas y la geometría, y se convierte en un antecedente importante para el presente trabajo de investigación.

El avance de la tecnología ha permitido que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas sea más interactivo y dinámico. En este sentido, el software GeoGebra se ha convertido en una herramienta de gran utilidad en la enseñanza de las matemáticas. En su estudio "GeoGebra en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas" (Sánchez & Borja, 2022), presentan los resultados de una investigación realizada en la Unidad Educativa "5 de octubre" del cantón Echeandía en la provincia de Bolívar durante el período 2020-2021. La investigación se llevó a cabo con estudiantes del Primer año del Bachillerato General Unificado y se centró en analizar el uso de GeoGebra como herramienta de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Los resultados demostraron que el uso de GeoGebra mejora significativamente la comprensión y resolución de problemas matemáticos, permitiendo a los estudiantes encontrar la respuesta correcta. Para la realización de la investigación se utilizó una metodología que incluyó la aplicación de una encuesta a los docentes de la Unidad Educativa "5 de octubre" del cantón Echeandía, con el fin de identificar las particularidades en el contexto del uso de GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los resultados obtenidos sirvieron de base para

generar propuestas de estrategias para el uso de GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas. El estudio demuestra que el uso de GeoGebra como herramienta de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas mejora significativamente la comprensión y resolución de problemas matemáticos en los estudiantes del Bachillerato General Unificado. Estos resultados son una muestra del potencial que tienen las herramientas tecnológicas en el proceso educativo.

La inclusión de las TIC en la enseñanza de las matemáticas ha sido objeto de numerosos estudios en los últimos años. En este sentido, se realizó una investigación que tuvo como objetivo caracterizar la inclusión del software GeoGebra en las clases de matemática del nivel secundario (Rodríguez, 2020). Para ello, se utilizaron entrevistas semiestructuradas a docentes y alumnos, así como observaciones y registros de clases. Los resultados obtenidos indican que la mayoría de los docentes destacan las características positivas de GeoGebra, tales como su utilidad, fácil acceso, sencillez, agilidad, popularidad, completitud, gratuidad, intuición, ligereza, posibilidad de doble percepción de los objetos matemáticos y ahorro de tiempo. En particular, el software es utilizado con mayor frecuencia en el tema de funciones, ya que permite visualizar fácilmente el comportamiento de éstas y los estudiantes pueden hacer deducciones con mayor autonomía y obtener generalidades. Esta inclusión se analizó tanto desde una mirada de la Didáctica General como de la Didáctica de la Matemática y de la Tecnología Educativa. En definitiva, esta investigación ofrece una perspectiva valiosa sobre el uso de GeoGebra como herramienta didáctica en la enseñanza de las matemáticas.

El uso de la tecnología en la vida cotidiana es cada vez más común, especialmente en el ámbito universitario. Sin embargo, aunque se da por sentado que los estudiantes universitarios poseen ciertas competencias digitales, no siempre es así. Por esta razón, es fundamental que el futuro profesorado cuente con la capacidad de utilizar herramientas digitales en contextos educativos y didácticos, ampliando y mejorando su competencia digital y matemática. En este sentido, el objetivo principal de la investigación desarrollada, con título "Competencia matemática y digital del futuro docente mediante el uso de GeoGebra" (García & Martín, 2023), consistió en fomentar el dominio de técnicas relacionadas con las transformaciones geométricas, a la vez que se mejoraba la competencia digital, matemática y didáctica de los futuros docentes. Para ello, se utilizó el software libre de GeoGebra, con el objetivo de que los estudiantes en formación adquirieran competencias para la enseñanza de conceptos geométricos, como los de simetría axial, central, inversión, rotación, traslación y homotecia. La metodología empleada fue mixta, con diseño pre experimental y una muestra de 68 participantes pertenecientes a la asignatura de Matemáticas y su didáctica III del Grado en Educación Primaria de la Universidad Rey Juan Carlos, matriculados durante el curso 2021/2022. La evaluación de la investigación se llevó a cabo a través de talleres y un cuestionario especialmente diseñado, lo que permitió realizar un análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados obtenidos. La aplicación de GeoGebra permitió desarrollar estrategias que combinan competencias de forma simultánea y simplifica algunas dificultades que surgen en el aprendizaje. En consecuencia, se concluyó que la utilización de GeoGebra es una herramienta eficaz para la adquisición de

competencias matemáticas y digitales por parte del futuro profesorado, mejorando su formación académica y su capacidad didáctica en el aula.

La incorporación del software GeoGebra en las clases de Educación Básica Superior es esencial para que los estudiantes puedan mejorar su rendimiento académico y potenciar sus habilidades críticas y analíticas para resolver procesos y problemas matemáticos. El objetivo del estudio, es analizar la herramienta GeoGebra en la enseñanza de la Matemática para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de Educación Básica Superior (Soledispa & Garcia, 2022). La metodología utilizada se basó en un enfoque mixto, en el que se describieron y analizaron elementos básicos de artículos científicos arbitrados para detectar información útil y realizar los aportes pertinentes. Se realizó un análisis sistemático de la literatura, obteniendo 3 investigaciones en las que se midió la variable independiente GeoGebra y la variable dependiente de rendimiento. Los resultados obtenidos demostraron que el uso del software GeoGebra mejora significativamente el rendimiento de los estudiantes en la asignatura de matemáticas. A medida que los estudiantes utilizan el software, su aprendizaje va aumentando y su interés por la materia también crece. Los estudiantes asimilan rápidamente las propiedades de los ejercicios, gracias a que la interfaz de GeoGebra es agradable para ellos, lo que influye positivamente en su rendimiento académico. Este estudio concluye que el empleo de GeoGebra en la enseñanza de la Matemática es altamente efectivo y recomendable. Por tanto, es importante que los estudiantes comiencen a utilizar este programa lo antes posible para poder efectuar abstracciones, conjeturas e interpretación de los resultados matemáticos. La inclusión de GeoGebra en la enseñanza de la Matemática en Educación Superior contribuye significativamente al desarrollo del pensamiento abstracto y a la mejora del rendimiento.

## **1.2 Planteamiento del problema**

La constante evolución tecnológica y los avances que penetran en la sociedad y en el ámbito educativo, requieren una renovación en la forma de impartir clases. Entre las materias que han sufrido una baja aceptación por parte de la comunidad educativa se encuentran las matemáticas, y esto se debe en gran parte a la metodología empleada por los docentes. La manera en la que el profesor integra los recursos tecnológicos, humanos y materiales para alcanzar a sus estudiantes es crucial para que estos puedan adquirir conocimientos de manera efectiva (Santiago et al., 2021).

Las tecnologías de información para el conocimiento representan una gran oportunidad para los estudiantes, ya que aportan un enfoque innovador y dinámico en el aprendizaje dentro del aula de clases (Granados et al, 2020). La utilización de software específicamente diseñado para la enseñanza, como GeoGebra, brinda la posibilidad de explorar diferentes conceptos matemáticos, como álgebra, geometría, ecuaciones, áreas y volúmenes, de manera lúdica y visual. Además, su interfaz amigable y la representación visual de los conceptos permiten que tengan una comprensión más clara y profunda de los mismos. En este sentido, el software GeoGebra es una herramienta valiosa para la asignatura de cálculo integral.

La enseñanza de la aplicación de la integral definida es un tema fundamental en el currículo de las carreras de matemática, física y aquellas que involucran las aplicaciones de estas ciencias. Sin embargo, muchos estudiantes enfrentan dificultades para comprender y aplicar este concepto de manera efectiva. En este contexto, el software GeoGebra ha surgido como una herramienta potencialmente poderosa para apoyar el aprendizaje de la integral definida al proporcionar representaciones visuales interactivas y herramientas de cálculo.

Aunque existen investigaciones previas que han examinado el uso de GeoGebra en el ámbito educativo, hay una falta de estudios específicos que evalúen el impacto de este software en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida en estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física. Por lo tanto, surge la necesidad de investigar cómo el uso de GeoGebra puede influir en el desarrollo de habilidades y comprensión en relación con la aplicación de la integral definida.

Sin embargo, el uso efectivo de TIC en la práctica educativa requiere más que simplemente la disponibilidad de herramientas tecnológicas. Los docentes deben tener una actitud positiva hacia el uso de las TIC y estar dispuestos a innovar en sus clases, incorporando los avances tecnológicos de manera adecuada. El compromiso de los docentes en la innovación y la actualización es fundamental para mejorar el rendimiento de los estudiantes y fomentar su motivación en las clases de matemáticas, además de la utilización de esta herramienta dentro de sus planificaciones de clase (Gómez, 2015).

Así, el software GeoGebra permite el autoaprendizaje del estudiante, de manera que se puede aplicar los conocimientos tomados en clases en cualquier lugar donde se acceda a las tecnologías de información. En los últimos años, la investigación sobre el uso de GeoGebra en la educación ha cobrado un gran interés y ha sido objeto de numerosos estudios. Según Calva (2021), una gran parte de estas investigaciones se han centrado en el fortalecimiento del aprendizaje a través del uso de GeoGebra. Otros estudios, como el de Tenesaca (2020), han analizado las ventajas y desventajas del uso de tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la educación y cómo GeoGebra puede ser una herramienta valiosa. Por su parte, Lugo (2017) ha investigado los efectos de la aplicación de GeoGebra en el aprendizaje y su impacto en el rendimiento de los estudiantes. Además, se han realizado investigaciones en torno al desarrollo de la aplicación y cómo se puede mejorar para ser más efectiva en el aula de clases.

Existen investigaciones que destacan la importancia de que los estudiantes desarrollen habilidades y destrezas digitales para fortalecer su propio aprendizaje. El rendimiento académico en el área de matemáticas es una de las mayores preocupaciones de las instituciones educativas y Universidades, y esto se debe en gran parte a la forma en que se dan las clases. En la actualidad, la enseñanza de matemáticas se realiza de manera tradicional, lo que puede generar problemas en los salones de clases. Los estudiantes no logran comprender los contenidos matemáticos y, en consecuencia, no sienten la importancia de los mismos (Obreque et al., 2019).

Existe un problema en el desarrollo adecuado de los conocimientos en cálculo integral y, específicamente, en la aplicación de la integral definida por parte de los estudiantes. Un factor que contribuye a esta situación es la falta de habilidades y destrezas en el uso de las TIC en esta temática. Dentro de la planificación de la carrera unos de los

apartados en el perfil de egreso del estudiante, es que este utilice de manera responsable, segura y eficaz las tecnologías de información y comunicación para obtener, organizar, crear información y comunicarla en la promoción del aprendizaje de los saberes matemáticos y físicos de que quehacer profesional, además de que diseñe y elabore materiales educativos en el área de la matemática y física (Universidad Nacional de Chimborazo, 2019).

Por ello, esta investigación busca diseñar una guía didáctica utilizando el software GeoGebra para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida para los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo.

### **1.3 Formulación del problema**

¿Cómo estaría estructurada una guía didáctica utilizando GeoGebra como herramienta para mejorar el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida para los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de la Universidad Nacional de Chimborazo?

#### **1.3.1 Preguntas directrices**

- ¿Cuáles son los principales contenidos relacionados a las aplicaciones de la integral definida que deben ser abordados en una guía didáctica para los estudiantes de la carrera?
- ¿Cuál es el nivel de conocimientos en cuanto a las aplicaciones de la integral definida de los estudiantes de la carrera?
- ¿Qué características y elementos clave deben ser considerados al diseñar la guía didáctica para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida de los estudiantes de la carrera?
- ¿Cómo será el diseño de una guía didáctica enfocada al aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida usando el software GeoGebra para los estudiantes de la carrera?

### **1.4 Justificación**

El uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas es muy importante para facilitar la comprensión conceptual y la aplicación. El uso de software educativo como GeoGebra en el aula ha demostrado ser beneficioso para mejorar la comprensión de los temas y motivar a los estudiantes. Teniendo en cuenta estas ventajas, surge la necesidad de diseñar una guía didáctica que utilice a GeoGebra como herramienta de apoyo en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida.

El objetivo principal de esta investigación es desarrollar una guía didáctica para facilitar la comprensión, el análisis y el uso efectivo de la aplicación de integrales definidas en GeoGebra. Esta guía se enfocará en demostrar la utilidad de la integral definida dentro de un medio geométrico y aplicar conceptos teóricos a situaciones del mundo real. La investigación estará enfocada a los estudiantes del quinto semestre de la carrera de ciencias

Experimentales: Matemáticas y Física puedan utilizar el software GeoGebra para aprender la aplicación de integrales definidas. Se recopilarán datos para ilustrar el uso de GeoGebra en los cálculos de áreas bajo la curva, entre curvas, volúmenes de cuerpos en rotación, entre otros, sentando las bases necesarias para desarrollar una guía de estudio para la aplicación de GeoGebra.

Es factible porque el desarrollo del diseño de investigación propuesto requiere de la colaboración del docente a cargo de la asignatura y de los recursos necesarios. Además, será posible monitorear los resultados y realizar futuros estudios que profundicen en los beneficios del uso de GeoGebra y las guías desarrolladas en el aula.

La elaboración de guías didácticas sobre la aplicación de integrales definidas utilizando GeoGebra permitirá a los estudiantes profundizar sus conocimientos y adquirir habilidades teóricas y prácticas sobre el tema. Esto contribuirá a su formación y preparación para la futura integración en el mundo laboral ya que estarán preparados para cualquier situación, y también sentará las bases para futuras investigaciones en esta área.

## **1.5 Objetivos**

### **1.5.1 General**

Elaborar una guía didáctica estructurada que utilice GeoGebra como herramienta para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de la Universidad Nacional de Chimborazo

### **1.5.2 Específicos**

- Identificar los principales contenidos relacionados con las aplicaciones de la integral definida que deben ser abordados en una guía didáctica para los estudiantes de la carrera.
- Evaluar el nivel de conocimientos existentes en cuanto a las aplicaciones de la integral definida por parte de los estudiantes de la carrera.
- Identificar las características y elementos clave que deben ser considerados al diseñar una guía didáctica para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida por parte de los estudiantes de la carrera.
- Diseñar una guía didáctica enfocada en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida utilizando el software GeoGebra para los estudiantes de la carrera.

## **CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO**

### **2.1 Estado del arte**

El aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, como la integral definida, ha representado un desafío constante en el ámbito educativo, especialmente en carreras de pedagogía enfocadas en ciencias experimentales como Matemáticas y Física. En este contexto, el uso de herramientas tecnológicas ha emergido como una estrategia clave para facilitar el autoaprendizaje y fomentar la evolución de las prácticas pedagógicas.

GeoGebra es un software ampliamente reconocido por su versatilidad y capacidad para abordar conceptos matemáticos de manera interactiva y visual. Su implementación en procesos de enseñanza-aprendizaje ha sido estudiada en áreas como álgebra, geometría y cálculo diferencial, destacándose por su potencial para promover el autoaprendizaje y la comprensión intuitiva de conceptos abstractos. Sin embargo, a pesar de su éxito en estos campos, no se han encontrado investigaciones significativas que aborden específicamente la utilización de GeoGebra en el estudio y aplicación de la integral definida.

La integral definida es un concepto central en el cálculo, con aplicaciones prácticas en diversas disciplinas científicas y de ingeniería. Tradicionalmente, su enseñanza se ha centrado en métodos teóricos y algoritmos, los cuales, aunque efectivos, suelen ser percibidos como abstractos y descontextualizados por los estudiantes. Esto dificulta la comprensión de su aplicabilidad en problemas reales.

A pesar de los avances en el uso de tecnologías como GeoGebra en la enseñanza de matemáticas, existe una brecha importante en la literatura académica respecto a su integración en el aprendizaje de la integral definida y sus aplicaciones prácticas. No se han desarrollado guías específicas que combinen el potencial del software con estrategias pedagógicas para estudiantes de pedagogía en ciencias experimentales.

Ante esta brecha, surge la necesidad de desarrollar recursos didácticos que permitan a los futuros docentes no solo comprender los fundamentos de la integral definida, sino también explorar sus aplicaciones prácticas mediante el uso de GeoGebra. Este enfoque no solo contribuye al aprendizaje autónomo de los estudiantes, sino que también refuerza su formación como educadores capaces de integrar herramientas tecnológicas en sus clases, alineándose con las demandas actuales de la enseñanza de las ciencias.

### **2.2 Fundamentación teórica**

#### **2.2.1 Aprendizaje**

El aprendizaje es un proceso fundamental para el desarrollo humano, que involucra la adquisición de nuevos conocimientos, habilidades y competencias. La adquisición de nuevos conocimientos con significado, comprensión, criticidad y posibilidades de usar esos conocimientos en explicaciones, argumentaciones y solución de situaciones o problemas. Este proceso no solo implica la recepción pasiva de información, sino también la interpretación activa de los datos, la reflexión crítica y la capacidad de aplicar lo aprendido en situaciones reales. Para lograr esto, se requiere un enfoque significativo y crítico, que

permita a los estudiantes comprender la importancia y relevancia de lo que están aprendiendo (Baque & Portilla, 2021).

Es importante destacar que el aprendizaje no solo se limita al ámbito académico, sino que también es esencial en la vida cotidiana y en el desarrollo profesional. Este es continuo y constantemente crucial para enfrentar los desafíos de la sociedad contemporánea, y las habilidades adquiridas a lo largo del proceso de aprendizaje son valiosas para el crecimiento personal y profesional. Por lo tanto, fomentarlo a lo largo de la vida es esencial para la formación de individuos capaces de enfrentar los retos que se presentan en la sociedad actual.

Por otro lado, se define el aprendizaje como todo aquel conocimiento que se adquiere a partir de las cosas que suceden en la vida diaria, lo que incluye habilidades, destrezas, aptitudes, entre otros (Vega et al, 2019). Esta definición se enfoca en el aprendizaje no necesariamente significativo ni crítico, sino en todo conocimiento adquirido en la vida diaria (Baque & Portilla, 2021). Aunque ambas definiciones comparten la idea de que implica la adquisición de conocimientos, habilidades y destrezas, la definición se enfoca en el aprendizaje informal, mientras que la definición de Baque y Portilla se centra en el formal.

### **2.2.2 Teorías de aprendizaje**

Las teorías de aprendizaje, como lo definen (Vega et al, 2019) son un conjunto de explicaciones y modelos que buscan estandarizar cómo se produce el aprendizaje, qué factores influyen en él y cómo se puede optimizar el proceso. Estas teorías son una construcción basada en las concepciones de distintos teóricos, y se han convertido en herramientas fundamentales en la investigación y práctica educativa.

Las teorías de aprendizaje más destacadas incluyen el conductismo, el cognitivismo, el constructivismo y el socio constructivismo, cada una con su propio enfoque. Estas teorías se enfocan en aspectos diferentes, desde la relación estímulo-respuesta del conductismo, hasta la interacción social del socio constructivismo. A pesar de que cada teoría tiene sus fortalezas y debilidades, ninguna de ellas puede explicar completamente el proceso de aprendizaje humano. Por lo tanto, es importante tener una perspectiva crítica y abierta a nuevas ideas y enfoques.

#### **2.2.2.1 Teoría conectivista**

El aprendizaje en la era digital ha dado lugar a nuevas teorías, como el conectivismo, que se enfoca en la importancia de la conexión y la red en la adquisición de conocimientos (Sánchez et al, 2019)

Un concepto capital en el Conectivismo es la idea del conocimiento como voluble, inestable, incontrolable y en continua expansión, lo que supone que escape del control total de la persona, pudiendo residir en sus redes externas (comunidades, dispositivos digitales, etc) y estar en permanente cambio (p.13).

Por otro lado, Siemens (2008) citado por López De La Cruz et al., (2020) planteó que “el conocimiento es una constelación de conexiones bajo una red tecnológica y social, tanto interna como externa. Además, el flujo del conocimiento es tan exponencial que a veces es difícil seguir el ritmo y procesar toda la información disponible” (p. 17), en este contexto, el uso de herramientas digitales y software se ha convertido en una necesidad para el

aprendizaje y el acceso a la información. En lugar de depender exclusivamente de la memoria o de fuentes de información limitadas, las personas tienen la capacidad de conectarse y acceder a una cantidad infinita de información en línea. Esto ha cambiado la forma en que adquirimos y procesamos conocimientos. Sin embargo, el acceso a tanta información también requiere habilidades para filtrar y evaluar información relevante y confiable. El reto es que el conocimiento y la información evolucionan de manera acelerada, lo que exige desarrollar competencias y habilidades en el manejo de la información en un entorno cambiante y en constante evolución.

En el conectivismo, el aprendizaje se produce mediante la conexión de nodos de conocimiento, en la que cada nodo es una fuente de información que se conecta con otros, generando así un entorno amplio y diverso. El conectivismo propone una nueva manera de aprender, en la que el conocimiento no solo es construido por el individuo, sino que se expande a través de las redes sociales y las tecnologías digitales. En este sentido, el conectivismo enfatiza la importancia de las herramientas digitales y la tecnología en el aprendizaje, y promueve la creación de comunidades en línea para apoyar el desarrollo del conocimiento en un entorno digital.

### **2.2.3 Aprendizaje en matemáticas**

El aprendizaje de las matemáticas es una de las áreas de la educación que más desafíos presenta en la actualidad, ya que se requieren métodos de enseñanza que permitan a los estudiantes comprender los conceptos y aplicarlos en la realidad. Según Vargas y Morales (2020): “los estudiantes necesitan métodos de aprendizaje diferentes a los tradicionales, que les permitan comprender mejor los conceptos y reflejarlos en la realidad” (p.32). En este sentido, el docente debe buscar estrategias didácticas que involucren al estudiante en la construcción del conocimiento, lo que implica el desarrollo de habilidades cognitivas y meta cognitivas en los estudiantes.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se debe enfatizar en la resolución de problemas, la comprensión de conceptos y el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. De esta manera, el estudiante no solo adquiere conocimientos, sino que también desarrolla habilidades que le permiten aplicarlos en situaciones reales y cotidianas. Una de las nuevas formas de aprendizaje que se ha implementado es el trabajo colaborativo. Al trabajar en equipo, los estudiantes pueden compartir ideas y conocimientos, lo que les permite aprender de manera más dinámica y enriquecedora. Además, el trabajo en grupo fomenta el desarrollo de habilidades sociales y emocionales, como la cooperación, la tolerancia, el respeto y la responsabilidad. Sin embargo, una posible desventaja de esta metodología es que algunos estudiantes pueden sentirse cohibidos o no participar activamente en el grupo.

Otra metodología que se ha implementado es el aprendizaje basado en problemas. Esta metodología se enfoca en resolver problemas prácticos y cotidianos, lo que permite a los estudiantes relacionar los conceptos teóricos con situaciones reales. Además, el aprendizaje basado en problemas fomenta el pensamiento crítico y la creatividad. Sin embargo, una posible desventaja de esta metodología es que algunos estudiantes pueden tener dificultades para identificar el problema y para relacionarlo con los conceptos teóricos.

La tecnología ha tenido un impacto significativo en el aprendizaje de las matemáticas. La utilización de software especializado y herramientas virtuales ha permitido a los estudiantes interactuar con los conceptos matemáticos de una manera más visual y dinámica. Además, la tecnología ha permitido el acceso a una gran cantidad de recursos y materiales que pueden ayudar a los estudiantes a comprender mejor los conceptos.

#### **2.2.4 Recursos didácticos**

En el área de la matemática, los recursos didácticos son fundamentales, ya que permiten a los estudiantes una mayor comprensión y consolidación de los conceptos matemáticos. Según Valverde y Hernández (2021): "los recursos didácticos son instrumentos y materiales diseñados para facilitar la comprensión y el aprendizaje de los contenidos curriculares" (p.10). La utilización de recursos didácticos en la enseñanza de las matemáticas permite, según los autores, que se promueva la competencia matemática, se propicie el aprendizaje significativo y se responda a los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes. Para ello, es necesario que los recursos estén diseñados con un enfoque por competencias y que sean seleccionados y adaptados en función de las características de los estudiantes y de los objetivos de aprendizaje. Así, los recursos didácticos son una herramienta clave para que los estudiantes puedan comprender mejor los conceptos matemáticos y puedan aplicarlos en situaciones reales.

Los recursos didácticos convencionales han sido utilizados desde tiempos remotos para complementar y ayudar en el proceso de aprendizaje, estos recursos incluyen materiales impresos, como libros y guías de ejercicios, así como materiales audiovisuales, como pizarras, proyectores y televisores. La planificación del docente es fundamental en la selección y utilización de estos recursos, ya que es el docente quien debe mediar en la clase para asegurar que se estén utilizando de manera efectiva. Los recursos didácticos convencionales pueden ser muy útiles en la enseñanza de matemáticas, ya que permiten una presentación visual de los conceptos y un seguimiento estructurado de los temas.

Sin embargo, es importante destacar que el uso exclusivo de recursos didácticos convencionales puede limitar el aprendizaje de los estudiantes. Valverde y Hernández (2021) señalan que el enfoque tradicional de enseñanza, basado únicamente en la transmisión de conocimientos, puede ser poco efectivo para muchos estudiantes. Es necesario, entonces, complementar el uso de los recursos didácticos convencionales con nuevas estrategias que se adapten a las necesidades y estilos de aprendizaje de los estudiantes.

##### **2.2.4.1 Características de los recursos didácticos**

Los recursos didácticos son una parte fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y sus características pueden variar en función de los objetivos que se persigan, así como del contexto en el que se desarrollan las actividades. Como señalan (Matamoros et al, 2021): "un material didáctico para el área de matemáticas no puede ser preparado de la misma forma que para otras asignaturas" (p.54), por lo que es necesario adaptar los recursos didácticos a las particularidades de esta disciplina.

Entre las características que debe tener un recurso didáctico se encuentra la facilidad de uso, ya que esto permite que los estudiantes puedan trabajar de forma autónoma y no se

vean frustrados en su proceso de aprendizaje. Asimismo, es importante que los recursos sean versátiles, abiertos y proporcionen información de calidad para que puedan ampliar sus conocimientos y resolver problemas de forma efectiva. Además, un recurso didáctico para matemáticas debe ser capaz de motivar a los estudiantes, adecuarse a su ritmo de trabajo y estimular su aprendizaje a través de un esfuerzo cognitivo adecuado y una disponibilidad constante. De esta forma, se logra una mayor comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos, y se fomenta el interés de los estudiantes por esta disciplina (Matamoros et al, 2021).

#### **2.2.4.2 Clasificación de los recursos didácticos**

La clasificación de los recursos didácticos es esencial para el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que permite al docente seleccionar y utilizar los recursos adecuados para cada situación de aprendizaje. Los recursos didácticos se pueden clasificar en tres categorías principales: materiales, tecnológicos y humanos. Los recursos materiales incluyen objetos físicos como libros, pizarras, materiales manipulables y otros recursos impresos o audiovisuales. Los recursos tecnológicos son aquellos que utilizan tecnología para facilitar el aprendizaje, como los programas informáticos, los dispositivos móviles y las plataformas en línea. Por último, los recursos humanos incluyen a los profesores, tutores y otros expertos que facilitan el aprendizaje mediante la interacción personal y la orientación. En conclusión, la clasificación de los recursos didácticos es un aspecto importante a tener en cuenta para lograr una educación de calidad, ya que permite la selección adecuada de recursos para cada situación educativa y ayuda a optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Dentro de la clasificación también tenemos lo dicho por (Cruces & Provoste, 2022) donde señala que:

Existen también los materiales bibliográficos impresos no permanentes que proponen instancias enriquecedoras para ser utilizadas en el final de la clase, como, por ejemplo, los tickets de salida. Por su parte los materiales bibliográficos no permanentes cumplen con la función de entregar actividades, metodologías y herramientas para el desarrollo de la práctica educativa (pág. 43).

La utilización de una variedad de recursos didácticos es de gran importancia en la educación, ya que permite a los docentes ofrecer diferentes alternativas para que los estudiantes puedan aprender de manera efectiva. Cada estudiante tiene un estilo de aprendizaje diferente, por lo que, al proporcionar una variedad de recursos didácticos, se pueden satisfacer las necesidades de todos los estudiantes. Además, el uso de diferentes recursos didácticos también ayuda a mantener la atención y el interés de los estudiantes durante la clase, lo que aumenta la motivación y mejora el aprendizaje. Los recursos didácticos también pueden ayudar a los docentes a presentar la información de manera más clara y concisa, lo que facilita la comprensión y retención de los conceptos por parte de los estudiantes.

##### **a) Recursos didácticos impresos**

En el ámbito educativo, los recursos didácticos impresos tienen un papel fundamental ya que ofrecen una amplia variedad de información en su contenido. Desde los libros de texto hasta los periódicos y revistas, estos recursos permiten a los estudiantes tener acceso a diferentes fuentes de información y conocimiento. Además, los docentes pueden utilizar

estos recursos para realizar diversas actividades en el aula y así optimizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, especialmente los más pequeños. Los recursos didácticos impresos pueden ser utilizados para enseñar a los estudiantes a leer y escribir, mejorar su comprensión lectora y desarrollar su pensamiento crítico. También pueden ser utilizados para enseñar a los estudiantes sobre temas específicos, como historia, geografía, ciencia, arte y literatura. En resumen, los recursos didácticos impresos son un componente esencial de la educación y pueden ser utilizados de manera efectiva para mejorar el aprendizaje y el desarrollo de habilidades en los estudiantes (Vera & Posligua, 2020).

#### **b) Recursos didácticos audiovisuales**

Con el fin de abordar la enseñanza de los contenidos curriculares y al mismo tiempo fomentar el desarrollo de competencias clave en los estudiantes, los recursos audiovisuales se presentan como una alternativa innovadora y efectiva. En la actualidad, el consumo de productos audiovisuales como películas, series, videojuegos y vídeos de YouTube es cada vez más común, especialmente entre los jóvenes. Por lo tanto, incorporar estos recursos en la enseñanza permite acercar la educación a los intereses y preferencias de los estudiantes, reduciendo así la brecha entre las actividades escolares y las extra-académicas. Además, el uso de recursos audiovisuales también puede proporcionar una oportunidad para que los estudiantes refuercen su aprendizaje fuera del aula, ya que pueden acceder a ellos en cualquier momento y lugar. En resumen, los recursos audiovisuales son una alternativa valiosa para enriquecer la enseñanza y mejorar la adquisición de habilidades y conocimientos en los estudiantes (Ramos & Moreno, 2020).

#### **c) Recursos didácticos informáticos**

En la actualidad, los recursos didácticos digitales y electrónicos han cobrado gran relevancia en las aulas de clases debido a su facilidad de acceso y uso (Agraso, L., & Suelves, 2019), estos recursos permiten a los docentes mejorar la enseñanza y facilitar el aprendizaje de los estudiantes mediante la incorporación de herramientas tecnológicas interactivas, como presentaciones multimedia, videos educativos, juegos educativos en línea, entre otros. Además, el uso de estos recursos también puede ayudar a los docentes a personalizar el aprendizaje para cada estudiante y a ofrecer diferentes alternativas para que los estudiantes puedan aprender de manera efectiva. Es importante destacar que, a medida que la tecnología sigue evolucionando, la inclusión de recursos didácticos digitales y electrónicos en las aulas de clases se vuelve cada vez más necesaria para garantizar una educación de calidad.

En conclusión, la utilización de una variedad de recursos didácticos es crucial para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que ayuda a satisfacer las necesidades de los estudiantes y a mantener su atención e interés en la clase.

### **2.2.5 Tics en la educación**

Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) han transformado significativamente el panorama educativo en todo el mundo. Hoy en día, las TIC se han convertido en una herramienta fundamental para la enseñanza y el aprendizaje, ya que ofrecen a los estudiantes y docentes un amplio abanico de posibilidades para mejorar la calidad de la educación. (Quiroga et al, 2021), las TIC permiten el acceso a una gran cantidad de información, recursos educativos y herramientas interactivas, que facilitan la adquisición

de conocimientos y habilidades en los estudiantes. Además, las TIC también permiten a los docentes diseñar y ofrecer actividades de aprendizaje más dinámicas y creativas, y a los estudiantes tener un papel más activo en su propio proceso de aprendizaje. Por lo tanto, es evidente que las TIC tienen un impacto significativo en la educación, ya que han revolucionado la forma en que se aprende y se enseña.

En este sentido, las TIC han impactado en diversas áreas de la actividad humana, incluyendo la educación. Las nuevas tecnologías han favorecido la aparición de herramientas como los Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA), Materiales Educativos Computarizados (MEC) y Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA), así como plataformas para la administración de contenidos y páginas web especializadas (Gallo et al, 2021).

Estas herramientas digitales han sido utilizadas en el aprendizaje de las matemáticas para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los AVA, por ejemplo, ofrecen diversas herramientas que permiten a los estudiantes aprender de forma interactiva, visual y dinámica. Por su parte, los MEC y los OVA brindan la posibilidad de experimentar con situaciones y problemas matemáticos en ambientes simulados, lo que resulta en un mayor interés y motivación por parte de los estudiantes. En resumen, el uso de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas puede mejorar la calidad de la educación y que los estudiantes comprendan y apliquen los conceptos matemáticos de manera más efectiva.

### **2.2.6 Software GeoGebra**

GeoGebra es un software educativo que combina geometría, álgebra y cálculo. Este programa permite a los estudiantes y docentes explorar y experimentar con diferentes conceptos matemáticos de manera interactiva. GeoGebra es una herramienta especialmente útil para enseñar matemáticas en el aula, ya que permite visualizar de manera clara y gráfica conceptos abstractos como funciones, gráficos, vectores y transformaciones geométricas. Además, GeoGebra es una herramienta gratuita y de código abierto, lo que la hace accesible a cualquier estudiante o docente con acceso a una computadora y conexión a internet. En resumen, el software GeoGebra es una excelente herramienta para enseñar y aprender matemáticas de manera interactiva, visual y creativa (Bolaños & Ruiz, 2018).

Dentro de los usos del software para Alvares et al, (2019) es posible diseñar una secuencia de enseñanza utilizando GeoGebra, una herramienta de software libre utilizada para enseñar y aprender matemáticas y otras ciencias, con el objetivo de mejorar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas y su competencia matemática.

Esta secuencia de enseñanza podría incluir actividades interactivas y visualmente atractivas que involucren a los estudiantes en la exploración y manipulación de conceptos matemáticos utilizando GeoGebra. Al permitir que los estudiantes interactúen con las matemáticas de manera más dinámica, se espera que la herramienta fomente un cambio positivo en sus actitudes hacia la asignatura y, en última instancia, les ayude a desarrollar su competencia matemática. Además, la evaluación de esta secuencia de enseñanza sería importante para determinar su efectividad y hacer mejoras en el proceso de enseñanza en el futuro. Los resultados obtenidos permitirían a los educadores ajustar su enfoque para hacer que el aprendizaje de las matemáticas sea más atractivo y efectivo para los estudiantes.

### **2.2.6.1 Características del software GeoGebra**

Dentro de las aulas de clase, GeoGebra se ha convertido en una herramienta valiosa para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los profesores pueden utilizar GeoGebra para crear actividades interactivas que involucren a los estudiantes en la exploración y manipulación de conceptos matemáticos de una manera más atractiva y efectiva. Al utilizar el software, los estudiantes pueden visualizar y experimentar con diferentes conceptos matemáticos de una manera más clara y dinámica, lo que les ayuda a entender mejor la materia. En general, se ha convertido en una herramienta indispensable para la enseñanza de las matemáticas en las aulas de clase modernas.

Se reconoce que GeoGebra ofrece amplias posibilidades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, su uso aún no es generalizado en las aulas debido a diversas razones. Como señala Valdés et al (2019), "no podemos afirmar que su uso se haya generalizado y mucho menos que esto se haya convertido en una práctica habitual en el desarrollo de las clases" (p. 103). El autor explica que entre las razones para esta situación se encuentran el miedo y la insuficiente preparación de los profesores para utilizar esta herramienta tecnológica en sus clases, así como el equipamiento tecnológico insuficiente y no siempre en las mejores condiciones disponibles en los centros de enseñanza.

### **2.2.6.2 Ventajas y desventajas**

El software ofrece muchas ventajas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tales como la creación de figuras geométricas y la representación gráfica de funciones matemáticas de una manera fácil y rápida, así como la posibilidad de utilizar múltiples representaciones de los conceptos matemáticos. Dentro de esto Ramírez et al (2021) en su investigación donde involucraron al software en la educación encontraron que el software GeoGebra:

Ver el aprendizaje como un proceso constructivo en el que la tarea es proporcionar una guía que facilite la exploración y el descubrimiento.

Utilizar simulaciones para llamar la atención de los estudiantes a los aspectos de una situación o problema que fácilmente pueden pasar desapercibidos o no observados en condiciones normales.

Proporcionar un ambiente de apoyo que es rico en recursos, ayudas a la exploración, crea una atmósfera en la que las ideas se pueden expresar libremente, y proporciona un estímulo cuando los estudiantes hacen un esfuerzo por comprender (p. 4).

Sin embargo, también existen desventajas en su uso, como el miedo y la insuficiente preparación de los profesores para utilizar esta herramienta tecnológica en sus clases, así como la disponibilidad limitada o insuficiente de equipos y recursos tecnológicos en algunos centros educativos, además de los que señala Ramírez et al (2021).

Es un programa algo complejo para los que comienzan. Resulta algo exclusivo porque no todos los estudiantes tienen la posibilidad de conectarse a internet, ni disponen de los dispositivos necesarios por lo elevado de su costo. Distracción en los estudiantes: al usar los dispositivos electrónicos, los educandos tienen acceso a otras aplicaciones durante la clase y esto conlleva a no estar enfocados en el tema de la misma. Dependencia tecnológica:

Para los estudiantes se ha convertido en una necesidad estar siempre pendientes de estar conectados, a tal punto que para algunos se convierte en una adicción y por otra parte su uso ha llevado a cierta atrofia de las habilidades y destrezas esenciales como realizar cálculos elementales y memorizar información.

En este sentido, es importante considerar tanto las ventajas como las desventajas de GeoGebra para tomar decisiones informadas sobre su uso en la enseñanza de las matemáticas.

### 2.2.6.3 GeoGebra en la educación

El uso de GeoGebra en la educación ha tenido un impacto significativo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Gracias a su capacidad para crear figuras geométricas y representaciones gráficas de funciones matemáticas, los estudiantes pueden experimentar y explorar conceptos de una manera más interactiva y visual. Permite a los profesores diseñar y crear actividades interactivas para involucrar a los estudiantes en la exploración de conceptos matemáticos. Además, GeoGebra fomenta el desarrollo de habilidades digitales en los estudiantes, lo que puede ser útil en otros campos de estudio y en el mundo laboral. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el uso de software requiere una buena formación por parte del profesorado para su correcta aplicación, y que la disponibilidad de equipos y recursos tecnológicos pueden afectar su implementación en algunos centros educativos. A pesar de esto, sigue siendo una herramienta valiosa en la educación y puede ser utilizada para mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las aulas de clase (Díaz, 2018).

### 2.3 Integral definida – aplicaciones

Una integral definida es una operación que por lo general se viene utilizando con el propósito de determinar el valor de áreas que están limitadas por rectas y curvas (Univesidad Autónoma de Madrid, 2019). Por lo general se define como una función continua que se encuentra definida por puntos  $a$  y  $b$  ( $a \leq x \leq b$ ) al área de la porción de un plano y su representación es:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Donde se cumple las siguientes propiedades:

- Toda integral evaluada en un solo punto es igual a cero.
- Si  $f(x) > 0$ , su integral es positiva, caso contrario su integral es negativa ( $f(x) < 0$ )
- La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integraciones por separado
- La integral de una función que posee una constante es igual a la constante multiplicada por la integral de la función

$$\int_a^b Kf(x) dx = K \int_a^b f(x) dx$$

- La permutación de los límites de una integral cambia el signo de esta.

- Si  $a < b < c$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Si  $f(x) \leq g(x)$ , en un intervalo  $[a, b]$  se:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Se presentarán 7 aplicaciones de la integral definida, las cuales son temas vistos dentro de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.

## 2.4 Área bajo la curva

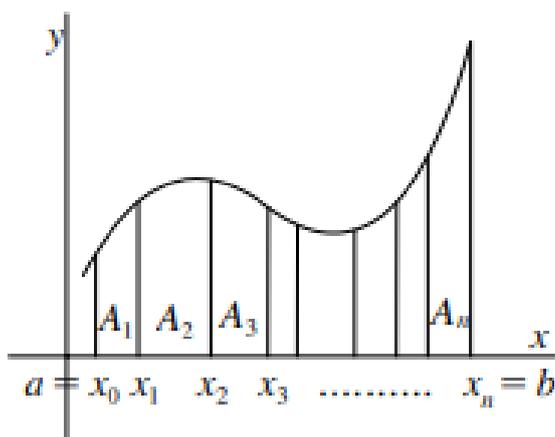
Para poder determinar el área bajo la curva se debe utilizar la integral definida donde la función  $f(x)$  se dividirá en rectángulos iguales para después se puedan sumar y calcular el área. Por lo tanto, se dividirá el intervalo de la función  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos:  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i=1, \dots, n$  (Univesidad Autónoma de Madrid, 2019).

Teniendo las participaciones  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ , donde  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Estas particiones (figura 1) se dividirán en un conjunto de áreas de cada subconjunto de forma que se tiene lo siguiente:

$$\text{Área}(A) = \text{área}(A_1) + \text{área}(A_2) + \dots + \text{área}(A_n).$$

**Figura 1.**

*Particiones de la función*



*Nota.* Representación de las particiones de una función (Univesidad Autónoma de Madrid, 2019).

Donde el ancho de cada intervalo es:  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , y sea  $C_i$  un punto del subintervalo  $i$ -ésimo  $[x_{i-1}, x_i]$  de anchura  $\Delta x_i$ . Entonces la integral definida de la función es:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(C_i) \Delta x_i$$

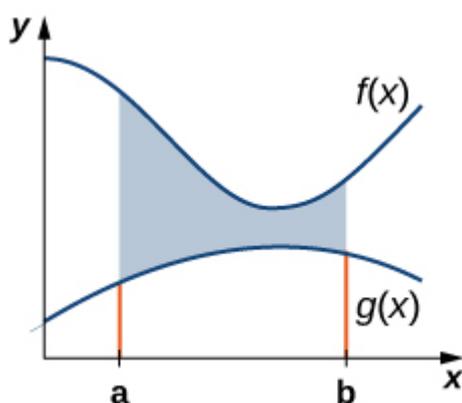
La definición utilizada fue hecha por el matemático Bernahrd Riemann para hallar las áreas de las funciones bajo la curva. A medida que estos rectángulos se hacen más pequeños se acercarán al área entre el gráfico a calcular.

## 2.5 Área entre curvas

Supongamos que tenemos 2 funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  que son continuas y están entre un intervalo  $[a,b]$ , donde  $f(x) \geq g(x)$ . Donde el principal objetivo será encontrar el área que se forma entre los gráficos de las funciones (Strang & Herman, 2022).

**Figura 2.**

*Área entre 2 curvas*

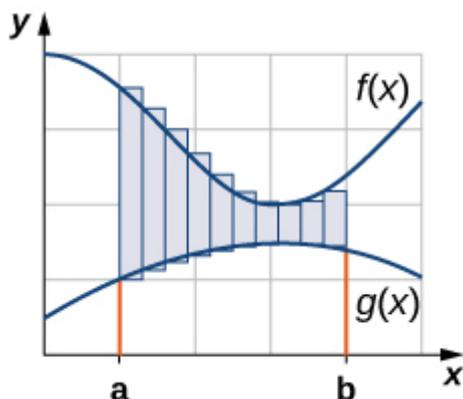


Nota: Área entre dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  (Strang & Herman, 2022).

En este punto se usará el mismo razonamiento empleado en el área bajo la curva, se dividirá el área en varios rectángulos donde tendremos  $n$  particiones. Para  $i=0,1,2,\dots,n$ , se tiene estas participaciones  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  en el intervalo  $[a,b]$ . Se elegirá un punto  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$  y en cada intervalo se construirá un rectángulo verticalmente entre cada función.

**Figura 3.**

*Particiones entre el área de las curvas*



Nota: Particiones entre el Área entre dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  (Strang & Herman, 2022).

Donde la altura de cada rectángulo individual sería la resta de las funciones en ese punto, es decir,  $f(x_i^*) - g(x_i^*)$  y posee una anchura de  $\Delta x$ . Al calcular el área de estos se tendría una suma de todos los rectángulos, siendo una aproximación de:

$$A \approx \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

Al observar la sumatoria se nota la forma de la suma de Riemann, se toma el límite con  $n \rightarrow \infty$ , obteniendo:

$$A \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

## 2.6 Longitud de arco

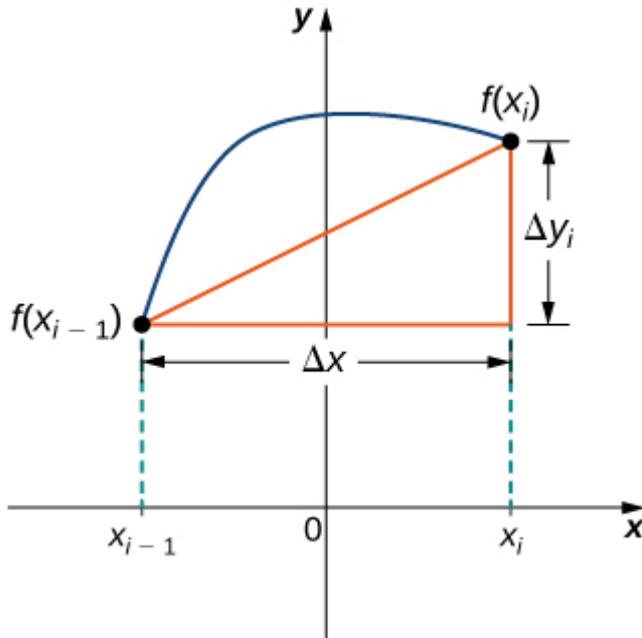
La longitud del arco tiene que ser evaluada para ambos ejes, es decir para el eje X y eje Y, pero en ambos casos siguen el mismo razonamiento. Supongamos que se quiere calcular la longitud de arco de una curva  $y=f(x)$ , se tiene que tener más requisitos para este propósito y uno de esos requisitos es que la función  $f(x)$  sea diferenciable y su derivada sea continua.

Usando el mismo razonamiento que en los problemas anteriores, supongamos que  $f(x)$  es una función definida por  $[a,b]$  y para calcular la longitud de la curva se tiene desde el punto  $(a,f(a))$  hasta  $(b,f(b))$ .

En este punto se utilizará segmentos lineales para aproximar la longitud de la curva. Teniendo  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  segmentos en el intervalo  $[a,b]$ . Para  $i=0,1,2,\dots,n$ , se construye un segmento lineal desde el punto  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  hasta  $(x_i, f(x_i))$ . Como se utiliza particiones iguales estos vienen dados por  $\Delta x$ , pero al ser distancias verticales se utilizará  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$  para determinar el cambio de la distancia vertical en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , algunos valores  $\Delta y_i$  pueden ser negativos.

**Figura 4.**

*Segmento de una línea*



Nota: segmento aproximado a la curva de intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  (Strang & Herman, 2022)

Por el teorema de Pitágoras, la longitud del segmento sería:  $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$ , que también es expresado como  $\Delta x \sqrt{1 + ((\Delta y_i)/\Delta x)^2}$ .

Por el teorema del valor medio,  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$  de manera que  $f'(x_i^*) = (\Delta y_i)/(\Delta x)$ , la longitud del segmento sería  $\Delta x \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}$ . La suma de los segmentos sería:

$$\text{Longitud de arco} \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x$$

Por suma de Riemann sería:

$$\text{Longitud de arco} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x = \int_a^b [\sqrt{1 + (f'(x))^2}] dx$$

Por lo tanto, la longitud del arco para  $y=f(x)$ , sería:

$$\text{Longitud de arco} = \int_a^b [\sqrt{1 + (f'(x))^2}] dx$$

Para  $x=g(y)$  se usa el mismo razonamiento teniendo la longitud de arco:

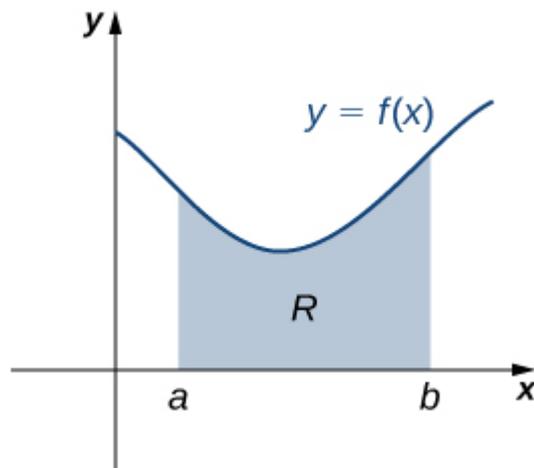
$$\text{Longitud de arco} = \int_a^b [\sqrt{1 + (g'(y))^2}] dy$$

## 2.7 Centro de masa

Supongamos que tenemos una lámina limitada por el gráfico de una función continua  $f(x)$ :

### Figura 5.

Área de una lamina

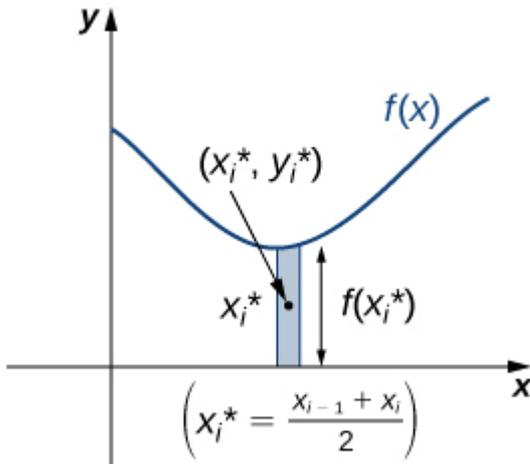


Nota: Región en el plano de una lámina (Strang & Herman, 2022).

Para encontrar el centro de masa de la lámina necesitamos encontrar la masa total de esta, así como los momentos de la lámina con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ . Aproximamos estas cantidades dividiendo el intervalo  $[a,b]$  y construyendo rectángulos. Para  $i=0,1, 2, \dots,n$ , supongamos que  $P=\{x_i\}$  es una partición regular de  $[a,b]$ . Se escoge un punto  $x_i^*$  del intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  como nuestra, pero será el punto medio del intervalo. En este caso,  $x_i^* = (x_{i-1} + x_i)/2$  para  $i=1,2,\dots,n$ , donde un rectángulo tendrá la altura de  $f(x_i^*)$  sobre  $[x_{i-1}, x_i]$ . Por lo tanto, el centro de masa de ese rectángulo será  $(x_i, (f(x_i)/2))$ .

**Figura 6.**

*Rectángulo de la lamina*



Nota: ejemplo (Strang & Herman, 2022)

Ahora supongamos que  $\rho$  representa la densidad de la lámina. En este caso,  $\rho$  se expresa en términos de masa por unidad de superficie. Así, para encontrar la masa total del rectángulo, multiplicamos el área del rectángulo por  $\rho$ . Entonces, la masa del rectángulo viene dada por  $\rho f(x_i^*)\Delta x$ , donde la masa total de los rectángulos sería:

$$m \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho f(x_i^*) \Delta x$$

Usando Riemann, se tendría:

$$m = \sum_{i=1}^n \rho f(x_i^*) \Delta x = \rho \int_a^b f(x) dx$$

Si tratamos el rectángulo como si fuera una masa puntual situada en el centro de masa, no cambia el momento. Así, el momento del rectángulo con respecto al eje  $x$  viene dado por la masa del rectángulo,  $\rho f(x_i^*)\Delta x$  multiplicado por la distancia desde el centro de masa al eje  $x$ :  $(f(x_i^*)/2)$ . El momento respecto al eje  $x$  del rectángulo es  $\rho([f(x_i^*)]^2/2)\Delta x$ . Al sumarlos por Riemann sería:

$$M_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \left( \frac{[f(x_i)]^2}{2} \right) \Delta x = \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx$$

Ahora se deriva respecto al eje  $y$ , observando que la distancia desde el centro de masa del rectángulo es  $x_i^*$ . Entonces el momento de la lámina con respecto al eje  $y$  es:

$$M_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho x_i^* f(x_i^*) \Delta x = \rho \int_a^b x f(x) dx$$

Por lo tanto, las coordenadas del centroide serían dividir los momentos por la masa total, esto sería:

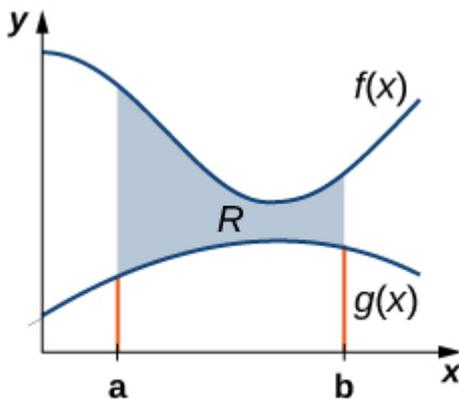
$$\bar{x} = \frac{1}{m} \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx; \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \rho \int_a^b x[\rho(x)] dx$$

## 2.8 Centroide de una región plana

Adaptando los mismos enfoques vistos, para el centroide de regiones se debe de suponer que se tiene una región que está limitada por el grafico de una función continua  $f(x)$ , donde el límite inferior de la región será el eje  $x$  y teniendo una segunda función continua  $g(x)$  que se ubica debajo de la primera función.

**Figura 7.**

*Región entre dos funciones*



Nota: ejemplo (Strang & Herman, 2022)

Se divide el intervalo  $[a,b]$  para la construcción de rectángulos. Donde el centroide de un rectángulo es  $(x_i^*, (f(x_i^*) + g(x_i^*))/2)$ . Donde la altura de cada rectángulo viene dada por  $(f(x_i^*) - g(x_i^*))$ , donde la masa total sería:

$$m = \sum_{i=1}^n \rho(f(x_i^*) - g(x_i^*)) \Delta x = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Respecto a los momentos con respecto al eje  $x$ , el momento de cada rectángulo se halla al multiplicar el área del rectángulo,  $\rho[f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$  por la distancia del centroide al eje  $x$ ,  $(f(x_i^*) + g(x_i^*))/2$ .

$$M_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho[f(x_i^*) - g(x_i^*)] * (f(x_i^*) + g(x_i^*))/2 \Delta x = \rho \int_a^b \frac{1}{2} (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

Ahora se deriva respecto al eje  $y$ , observando que la distancia desde el centro de masa del rectángulo y es  $x_i^*$ . Entonces el momento de la lámina con respecto al eje  $y$  es:

$$M_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho x_i^* \frac{1}{2} (f(x_i^*)^2 - g(x_i^*)^2) \Delta x = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \rho \int_a^b \frac{1}{2} (f(x)^2 - g(x)^2) dx; \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx$$

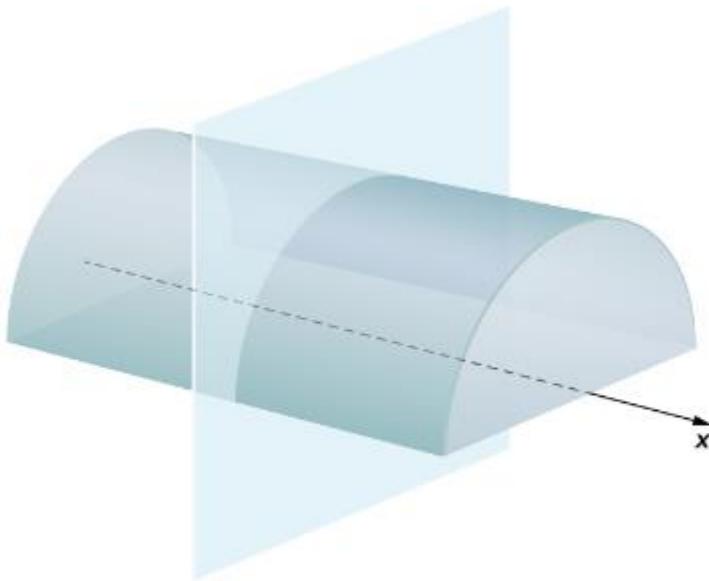
## 2.9 Volumen de un sólido en revolución en el eje x

Cuando se analiza una región bidimensional, se evaluará el volumen de un sólido tridimensional. Algunos de los volúmenes más utilizados son el rectangular ( $V=lwh$ ), volumen de una esfera ( $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ), volumen de un cono ( $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ), volumen de una pirámide ( $V = \frac{1}{3}Ah$ ).

Definimos la sección transversal de un sólido como la intersección de un plano con el sólido. Se define un cilindro como cualquier sólido que se genera trasladando una región plana a lo largo de una línea perpendicular a la región, denominada eje del cilindro. Así, todas las secciones transversales perpendiculares al eje de un cilindro son idénticas. Entonces, para calcular el volumen de un cilindro basta con multiplicar el área de la sección transversal por la altura del cilindro:  $V=A.h$ . En el caso de un cilindro circular recto, esto se convierte en  $V=\pi r^2 h$ .

### Figura 8.

*Cilindro tridimensional en el plano*



**Cilindro tridimensional**

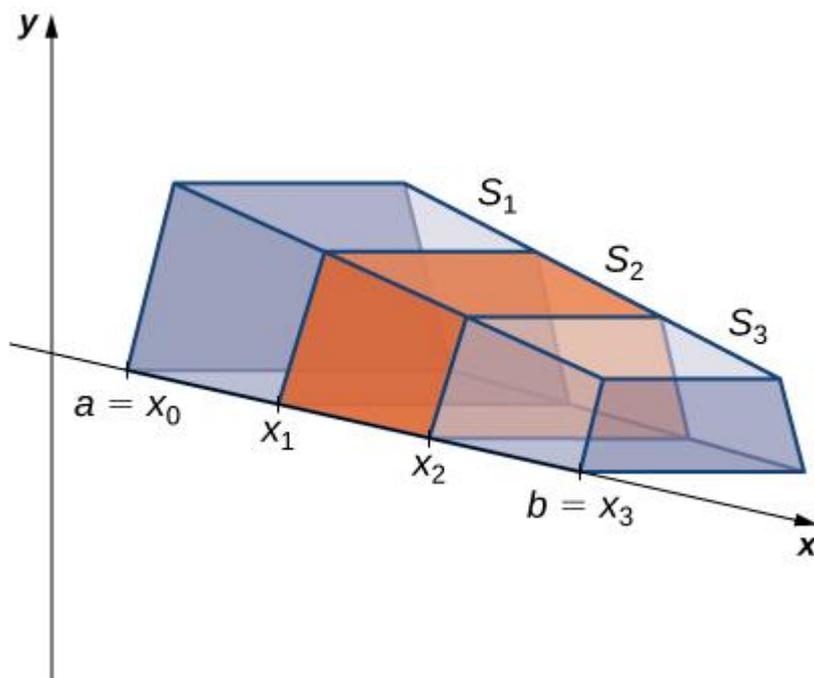
Nota: ejemplo (Strang & Herman, 2022)

En ese caso, podemos utilizar una integral definida para calcular el volumen de ese sólido. Para ello, rebanamos el sólido, estimamos el volumen de cada rebanada y luego sumamos esos volúmenes estimados. Las rebanadas deben ser todas paralelas entre sí, y cuando las juntamos todas, deberíamos obtener el sólido completo.

Ya que el área de la sección transversal no es constante, suponemos que  $A(x)$  representa el área de la sección transversal en el punto  $x$ . Ahora supongamos que  $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es una partición regular de  $[a, b]$ , y para  $i=1, 2, \dots, n$ , supongamos que  $S_i$  representan la porción de  $S$  que se extiende desde  $x_{i-1}$  para  $x_i$ . La figura 9 muestra el sólido cortado con  $n=3$ .

**Figura 9.**

*Sólido  $S$  dividido en 3 partes perpendicular al eje  $x$*



Nota: ejemplo del volumen de un sólido (Strang & Herman, 2022)

Por último, para  $i=1, 2, \dots, n$ , supongamos que  $x_i^*$  es un punto arbitrario en  $[x_{i-1}, x_i]$ , entonces el volumen de la rebanada  $S_i$  será estimada mediante  $V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x$ . Sumando estas aproximaciones se obtiene:

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x$$

$$V(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

Al trabajar con un sólido de revolución sería:  $A(x) = \pi r^2$ , donde el radio de un sólido en revolución está dado por la  $f(x)$ . Entonces se tendría  $r=f(x)$ , teniendo la fórmula final:

$$V(S) = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

## 2.10 Volumen de un sólido en revolución en el eje y

Se utiliza la misma lógica visto anteriormente teniendo, suponemos que  $A(y)$  representa el área de la sección transversal en el punto  $y$ . Ahora supongamos que  $P=\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  es una partición regular de  $[a, b]$ , y para  $i=1, 2, \dots, n$ , supongamos que  $S_i$  representan la porción de  $S$  que se extiende desde  $y_{i-1}$  para  $y_i$ .

Por último, para  $i=1, 2, \dots, n$ , supongamos que  $y_i^*$  es un punto arbitrario en  $[y_{i-1}, y_i]$ , entonces el volumen de la rebanada  $S_i$  será estimada mediante  $V(S_i) \approx A(y_i^*)\Delta y$ . Sumando estas aproximaciones se obtiene:

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^n A(y_i^*)\Delta y$$
$$V(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y_i^*)\Delta y = \int_a^b A(y) dy$$

Al trabajar con un sólido de revolución sería:  $A(y) = \pi r^2$ , donde el radio de un sólido en revolución está dado por la  $f(x)$ . Entonces se tendría  $r=f(y)$ , teniendo la formula final:

$$V(S) = \int_a^b \pi f(y)^2 dy$$

## 2.11 Trabajo

En física, el trabajo está relacionado con la fuerza, que a menudo se define intuitivamente como un empuje o un tirón sobre un objeto. Cuando una fuerza mueve un objeto, decimos que la fuerza realiza un trabajo sobre el objeto. Según la física, cuando tenemos una fuerza constante, el trabajo puede expresarse como el producto de la fuerza por la distancia.

Cuando tenemos una fuerza constante, las cosas son bastante fáciles. Sin embargo, es raro que una fuerza sea constante. El trabajo realizado para comprimir (o alargar) un resorte, por ejemplo, varía en función de cuánto se lo haya comprimido o estirado. Más adelante, en esta misma sección, se analizan los resortes con más detalle.

Supongamos que  $F(x)$  es una fuerza variable que mueve un objeto en dirección positiva en el eje  $X$  en los puntos  $[a, b]$ . Hacemos la partición en  $n$  intervalos iguales  $P=\{x_i\}$  para  $i=0, 1, 2, \dots, n$ , se escoge un punto arbitrario  $x_i^*$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ , suponiendo que la fuerza aproximada constante en el punto  $y$  se utiliza  $F(x)$ . El trabajo realizado en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  es:

$$W_i \approx F(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i^*)\Delta x$$

Realizando la sumatoria de los trabajos sería:

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(x_i^*)\Delta x$$

Mediante la suma de Riemann, se tiene:

$$W \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i^*)\Delta x = \int_a^b F(x) dx$$

## CAPÍTULO III. METODOLOGIA

### 3.1 Enfoque de investigación

**Cuantitativo:** La investigación cuantitativa proporcionó una base sólida para obtener resultados precisos y confiables, lo que permitió obtener conclusiones más objetivas y respaldadas por evidencia empírica. Asimismo, su enfoque sistemático y estructurado facilita la comparación con estudios previos y la replicación de la investigación en diferentes contextos, lo que contribuye a la construcción del conocimiento en el área de estudio. Se empleó en este estudio para obtener datos numéricos y objetivos que permitan describir y analizar el uso de GeoGebra en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, respaldando así las conclusiones y recomendaciones de manera rigurosa y confiable.

### 3.2 Diseño de investigación

**No experimental:** El diseño no experimental se utilizó en esta investigación debido a que el objetivo principal es la elaboración de una guía didáctica utilizando GeoGebra como herramienta de apoyo en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida. No se pretende manipular variables ni establecer relaciones de causa y efecto, sino más bien describir y analizar la forma en que los estudiantes utilizan el software y el impacto que tiene en su comprensión y aplicación de los conceptos. El diseño no experimental permitió recopilar datos de manera no intrusiva, a través de la encuesta, brindando una visión detallada del uso de GeoGebra en el contexto educativo y aportando información relevante para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje en esta área específica de las matemáticas.

### 3.3 Nivel de investigación

**Descriptivo-propositivo:** La investigación de nivel descriptivo se utilizó en este estudio con el objetivo de proporcionar una descripción detallada y precisa de cómo se utiliza GeoGebra como herramienta de apoyo en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida por parte de los estudiantes de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física. Mediante el análisis de datos recopilados a través de cuestionarios, se buscó obtener información descriptiva sobre el uso del software, el nivel de comprensión de los estudiantes y el impacto en su aprendizaje. El enfoque descriptivo permitió identificar patrones, tendencias y características relevantes del proceso de enseñanza-aprendizaje, proporcionando una base sólida para el diseño de la guía didáctica y recomendaciones prácticas para mejorar el uso de GeoGebra en el contexto educativo. Además, se la consideró propositiva ya que esta investigación tiene como resultado final la elaboración de una guía la cual puede ser utilizada para mejorar la situación en cuanto al conocimiento de los estudiantes.

### 3.4 Tipo de investigación

#### 3.4.1 Según el lugar

**Campo:** Esto se debe a que se centró en recopilar datos en un entorno específico, en este caso, la Universidad Nacional de Chimborazo. El objetivo es analizar y comprender el uso de GeoGebra como herramienta de apoyo en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en el contexto de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de esta institución. Al realizar la investigación en el lugar de campo, se pudo obtener datos directamente de los estudiantes y docentes involucrados, lo que permitió una comprensión más profunda y contextualizada de la situación,

#### 3.4.2 Según el tiempo

**Transversal:** En cuanto al tipo de investigación según el tiempo, se llevó a cabo un estudio de tipo transversal. Esto significa que los datos fueron recopilados en un solo momento o periodo específico. En este caso, se recolectaron datos sobre el uso de GeoGebra y la comprensión de las aplicaciones de la integral definida en un momento determinado dentro del semestre académico. El objetivo fue capturar una instantánea de la situación en ese momento y analizarla de manera exhaustiva, se prioriza obtener datos representativos en un periodo acotado para proporcionar una visión clara y detallada del uso de GeoGebra en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en el contexto específico de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física en la Universidad Nacional de Chimborazo.

### 3.5 Población y muestra

#### 3.5.1 Población

La población de esta investigación estuvo constituida por los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de la Universidad Nacional de Chimborazo que cursan los semestres de quinto en adelante, ya que en este nivel cursaron la materia de cálculo integral, en la cual se presentan las aplicaciones de la integral definida. Estos estudiantes representaron el grupo de interés principal.

**Tabla 1.**

*Estudiantes que formar parte de la población de estudio*

Semestre	Estudiantes
Quinto	14
Sexto	16
Séptimo	21
Octavo	22
Total	73

### 3.5.2 Muestra

Tipo de muestro intencional no probabilístico, con los estudiantes de la tabla 2, de la carrera de Pedagogía en Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física. No se tomó en cuenta a los estudiantes de octavo semestre ya que dentro de este nivel cursan la materia de ecuaciones diferenciales donde ya pueden recordar y fortalecer las aplicaciones de la integral definida, mientras que en sexto y séptimo no cuentan con alguna asignatura que fortalezca el tema a partir de estos niveles.

**Tabla 2.**

*Estudiantes que forman parte de la muestra de estudio*

Semestre	Estudiantes
Quinto	14
Sexto	16
Séptimo	21
Total	51

## 3.6 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

### 3.6.1 Técnica

#### 3.6.1.1 Encuesta

Se diseñaron cuestionarios estructurados que aborden aspectos específicos del uso de GeoGebra y la comprensión de las aplicaciones de la integral definida por parte de los estudiantes. Estos cuestionarios incluyeron preguntas de opción múltiple y escalas de valoración.

#### 3.6.1.2 Prueba objetiva

La prueba objetiva permitió evaluar el nivel de conocimientos sobre aplicación de la integral definida en los estudiantes, ya que las preguntas estuvieron establecidas bajo este objetivo. Esta técnica de recolección de datos es confiable y estandarizada, permitiendo una evaluación comparativa cuantitativa y la identificación de fortalezas y debilidades en la enseñanza y aprendizaje del tema.

### 3.6.2 Instrumentos

#### 3.6.2.1 Cuestionario

Este instrumento se elaboró con diferentes preguntas enfocados al tema de las aplicaciones de la integral definida. Se diseñó un cuestionario estructurado con 12 preguntas relacionadas con el uso de GeoGebra, las aplicaciones de la integral definida y su impacto en el aprendizaje aplicando la escala de Likert. El cuestionario se administró de manera presencial para garantizar la confidencialidad de las respuestas. La encuesta proporcionó

datos cuantitativos que podrán ser analizados y comparados, permitiendo identificar tendencias, patrones y relaciones relevantes para el desarrollo de la guía didáctica y la mejora de la enseñanza de las aplicaciones de la integral definida con el uso de GeoGebra.

### **3.6.2.2 Validación del instrumento de investigación**

Se solicitó la colaboración de expertos en investigación y docencia en matemáticas para validar los instrumentos. Estos expertos los analizaron y determinaron si son adecuados para su aplicación tomando en cuenta factores como la factibilidad, pertinencia, organización e importancia.

### **3.7 Procesos de análisis de datos**

Se utilizó Rstudio como herramienta digital para el análisis estadístico y la comprobación de las hipótesis debido a su capacidad para presentar información en gráficos estadísticos de manera clara y concisa. Además, se empleó la estadística descriptiva para el análisis de los datos recopilados.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1 Análisis e interpretación de la prueba objetiva

La prueba objetiva aplicada estuvo constituida por 12 preguntas, donde las primeras 4 corresponden a la dimensión procedimental, por otro lado, 8 pertenecen a la dimensión conceptual, por ello se presenta el análisis e interpretación de cada dimensión, apoyándose en tablas y gráficas correspondientes. Para poder observar las preguntas evaluadas, ver anexo 1.

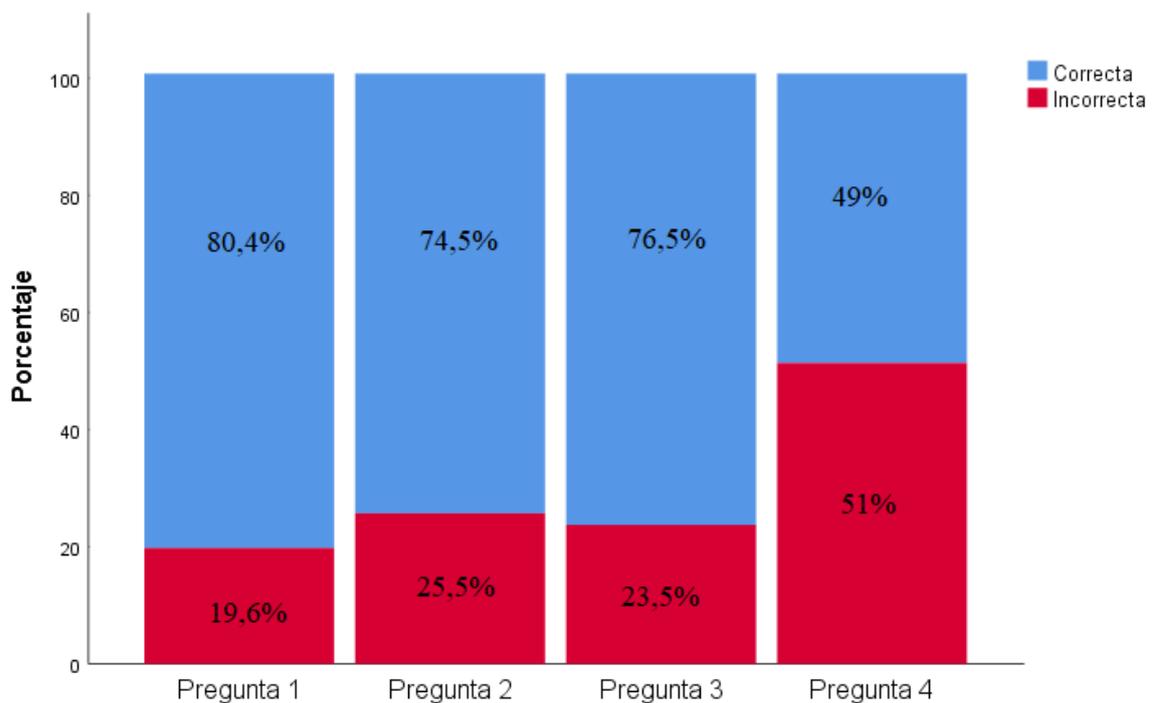
**Tabla 3.**

*Resumen de respuestas procedimentales.*

<b>Resultado</b>	<b>Pregunta 1</b>	<b>Pregunta 2</b>	<b>Pregunta 3</b>	<b>Pregunta 4</b>
Correctas	41	38	39	25
Incorrectas	10	13	12	26
<b>Total participantes</b>	51	51	51	51

**Figura 10.**

*Resumen de respuestas procedimentales.*



### Análisis e interpretación

Los resultados obtenidos de las respuestas conceptuales muestran que la mayoría de los estudiantes responden de manera correcta, teniendo el 80.4% de los estudiantes saben el método a utilizar para aproximar el área bajo la curva, el 74.5% de los estudiantes saben qué hacer para aproximar el área bajo la curva mediante trapecios, el 76.5% de los estudiantes conocen la regla de Simpson y solo el 49% de los estudiantes supieron identificar las fórmulas según el método de áreas por integrales definidas.

Esta última muestra algunas falencias mostradas en identificar el cálculo correcto mediante las formula del área bajo la curva, área entre la curva, longitud de arco, centro de masa, centroide de una región plana, volumen de un sólido en revolución (eje x e y) y el trabajo. La duda de no saber diferenciar las distintas fórmulas debido a que no tienen una guía completa para poder diferenciarla de gran manera.

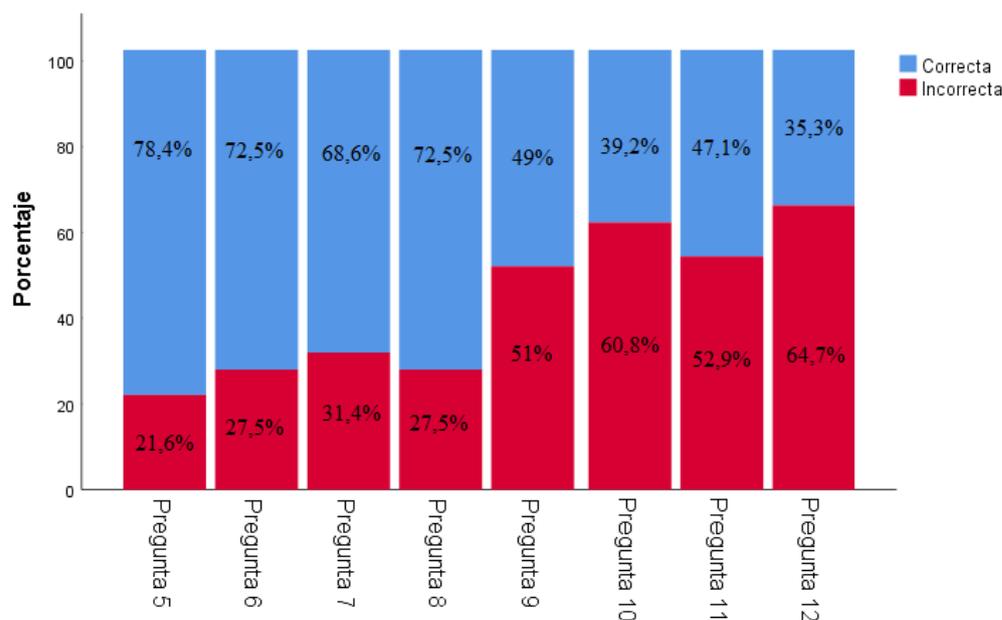
**Tabla 4.**

*Resumen de respuestas conceptuales*

Resultado	Pregunta 5	Pregunta 6	Pregunta 7	Pregunta 8	Pregunta 9	Pregunta 10	Pregunta 11	Pregunta 12
Correctas	40	37	35	37	25	20	24	18
Incorrectas	11	14	16	14	26	31	27	33
<b>Total</b>	51	51	51	51	51	51	51	51

**Figura 11.**

*Resumen de respuestas conceptuales*



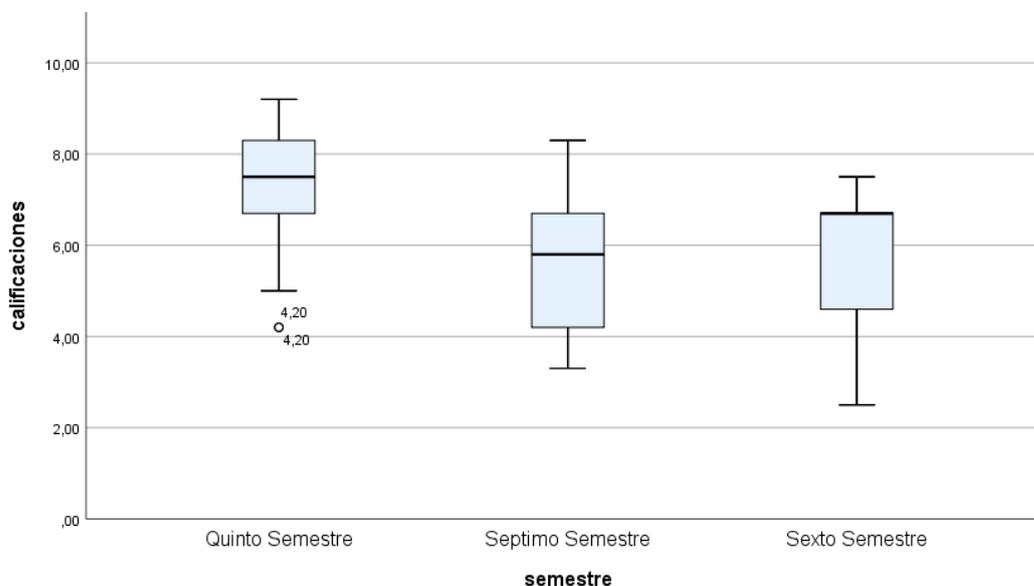
### Análisis e interpretación

Los resultados obtenidos en la dimensión procedimental muestran que en la mitad de las preguntas se tiene una mayoría de estudiantes que respondieron de manera correcta y la otra mitad de las preguntas la mayoría de los estudiantes respondieron de manera incorrecta. Se tiene que el 78.4% de los estudiantes conocen como hallar el área bajo la curva de una función, el 72.5% de los estudiantes pudieron hallar el área de una función, el 68.6% de los estudiantes pudieron hallar el área entre 2 curvas, el 72.5% de los estudiantes pudieron hallar la longitud de arcos. Sin embargo, en las otras preguntas tenemos que el 51% de los estudiantes no pudieron hallar el volumen de un sólido, el 60.8% de los estudiantes no pudieron hallar el centroide de la región, el 52.9% de los estudiantes no pudieron hallar el centro de masa de una función y el 64.7% no pudieron hallar el trabajo realizado.

Realizando un análisis de estos resultados se puede ver falencias en las integrales definidas de los temas del centro de masa, centroide, volumen de un sólido y el trabajo generado. Se observa que anteriormente los estudiantes dominan los conceptos, pero tienen muchas dudas al momento de aplicarlos, quizá esto se deba a una falta de ejemplos donde puedan identificar los elementos que se deben de utilizar en las fórmulas.

**Figura 12.**

*Comparativa de calificaciones entre semestres*



### Análisis e interpretación

En la gráfica se observa una comparativa entre las calificaciones obtenidas en los 3 semestres de la prueba de 12 preguntas, donde se observa que la calificación media en los estudiantes del quinto semestre es de 7 con un rango de notas entre 4.2 y 9.2, los estudiantes de séptimo semestre tienen una media de 5.9 con un rango de notas entre 3 y 8, y los estudiantes de sexto semestre tienen una media de 5,7 con un rango de notas entre 2 y 8.

Donde los estudiantes del quinto semestre tienen una mayor media y una mayor concentración de notas mayores a los demás semestres.

#### 4.2 Análisis e interpretación de la encuesta

Se realizó una encuesta de 19 preguntas medidas en escala de Likert con el objetivo de recolectar información precisa y detallada sobre la percepción y experiencia de los estudiantes al utilizar GeoGebra como apoyo en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida. Estas preguntas se dividen en 2 secciones que son la experiencia con GeoGebra en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida y percepción sobre el uso de una guía didáctica

**Sección 1:** Experiencia con GeoGebra en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida

**Tabla 5.**

*GeoGebra mejora la comprensión de los conceptos relacionados con la aplicación de la integral definida*

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Totalmente en desacuerdo	5	9.8%
En desacuerdo	3	5.9%
Neutro	3	5.9%
De Acuerdo	18	35.3%
Totalmente de acuerdo	22	43.1%
Total	51	100%

#### Análisis e interpretación

Se observa los datos de la encuesta referente a GeoGebra mejora la comprensión de los conceptos relacionados con la aplicación de la integral definida, donde el 43.1% menciona que está totalmente de acuerdo, el 35.3% menciona que está de acuerdo, el 5.9% permanece neutro, el 5.9% menciona que está en desacuerdo y el 9.8% menciona que está totalmente en desacuerdo. Esto significa que la mayoría de personas entienden que la utilización de tecnología es importante para el fortalecimiento de los conocimientos.

**Tabla 6.**

*El uso de GeoGebra facilita la capacidad para resolver problemas relacionados con la aplicación de la integral definida*

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Totalmente en desacuerdo	6	11.76%
En desacuerdo	7	13.73%
Neutro	8	15.69%
De Acuerdo	15	29.41%
Totalmente de acuerdo	15	29.41%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

Los datos son respecto a si el uso de GeoGebra facilita la capacidad para resolver problemas relacionados con la aplicación de la integral definida, donde el 29.41% menciona que está totalmente de acuerdo, el 29.41% menciona que está de acuerdo, el 15.69% permanece neutro, el 13.73% menciona que está en desacuerdo y el 11.76% menciona que está totalmente en desacuerdo. Existe gran participación de respuesta en cuanto a las opciones de neutro, en desacuerdo y totalmente desacuerdo, esto puede entenderse que los estudiantes no creen que GeoGebra pueda ayudar a resolver problemas, porque no saben usar el software.

**Tabla 7.**

*GeoGebra contribuye al desarrollo de habilidades prácticas en el manejo de herramientas tecnológicas para el estudio de las matemáticas*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	4	7.84%
En desacuerdo	3	5.88%
Neutro	3	5.88
De Acuerdo	12	23.53%
Totalmente de acuerdo	29	56.86%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En cuanto a GeoGebra contribuye al desarrollo de habilidades prácticas en el manejo de herramientas tecnológicas para el estudio de las matemáticas, donde el 56.86% menciona que está totalmente de acuerdo, el 23.53% menciona que está de acuerdo, el 5.88% permanece neutro, el 5.88% menciona que está en desacuerdo y el 7.84% menciona que está totalmente en desacuerdo. La mayoría de estudiantes creen que es importante aprender a manejar softwares para poder fortalecer diferentes temáticas dentro de la matemática.

**Tabla 8.**

*La visualización gráfica de GeoGebra es útil para comprender mejor los conceptos de la aplicación de la integral definida*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	4	7.84%
En desacuerdo	3	5.88%
Neutro	4	7.84%
De Acuerdo	10	19.61%
Totalmente de acuerdo	30	58.82%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En la tabla 8 se observa los datos de la encuesta referente a la visualización gráfica de GeoGebra es útil para comprender mejor los conceptos de la aplicación de la integral definida, donde el 58.82% menciona que está totalmente de acuerdo, el 19.61% menciona que está de acuerdo, el 7.84% permanece neutro, el 5.88% menciona que está en desacuerdo y el 7.84% menciona que está totalmente en desacuerdo. Así mismo como es importante fortalecer las habilidades tecnológicas para diferentes temas de la matemática, en específico la mayoría de participantes concuerdan en que estas habilidades también son importantes para las aplicaciones de la integral definida.

**Tabla 9.**

*Las manipulaciones interactivas en GeoGebra facilitan la comprensión de la aplicación de la integral definida*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	8	15.69%
En desacuerdo	6	11.76%
Neutro	3	5.88%
De Acuerdo	8	15.69%
Totalmente de acuerdo	26	50.98%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En la tabulación se observa los datos de la encuesta referente a las manipulaciones interactivas en GeoGebra facilitan la comprensión de la aplicación de la integral definida, donde el 50.98% menciona que está totalmente de acuerdo, el 15.69% menciona que está de acuerdo, el 5.88% permanece neutro, el 11.76% menciona que está en desacuerdo y el 15.69% menciona que está totalmente en desacuerdo. Los resultados demuestran que una gran cantidad de estudiantes no están muy convencidos que la manipulación de GeoGebra mejore la comprensión de los temas, nuevamente esto debido a que no tienen la habilidad para manejar el software.

**Tabla 10.**

*Los recursos complementarios, como videos o enlaces a material adicional, proporcionados en GeoGebra enriquecen la comprensión de la aplicación de la integral definida*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	3	5.88%
En desacuerdo	2	3.92%
Neutro	5	9.8%
De Acuerdo	14	27.45%
Totalmente de acuerdo	27	52.94%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a los recursos complementarios, como videos o enlaces a material adicional, proporcionados en GeoGebra enriquecen la comprensión de la aplicación de la integral definida, donde el 52.94% menciona que está totalmente de acuerdo, el 27.45% menciona que está de acuerdo, el 9.8% permanece neutro, el 3.92% menciona que está en desacuerdo y el 5.88% menciona que está totalmente en desacuerdo. Se entiende estos resultados como la forma en la que los estudiantes utilizan a GeoGebra, más que como una herramienta tecnológica la usan como una fuente para obtener información externa.

**Tabla 11.**

*Experimentó dificultades técnicas o problemas al utilizar GeoGebra en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	2	3.92%
En desacuerdo	4	7.84%
Neutro	6	11.76%
De Acuerdo	15	29.41%
Totalmente de acuerdo	24	47.06%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a experimentó dificultades técnicas o problemas al utilizar GeoGebra en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida, donde el 47.06% menciona que está totalmente de acuerdo, el 29.41% menciona que está de acuerdo, el 11.76% permanece neutro, el 7.84% menciona que está en desacuerdo y el 3.92% menciona que está totalmente en desacuerdo. Menos de la mitad de estudiantes han obtenido dificultades al momento de utilizar la herramienta, esto no se debe a un error de la GeoGebra si a la poca familiaridad que se tiene con la aplicación, por parte de los estudiantes.

**Tabla 12.**

*La retroalimentación proporcionada por GeoGebra sobre respuestas y pasos para resolver problemas ha sido clara y útil*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	6	11.76%
En desacuerdo	3	5.88%
Neutro	3	5.88%
De Acuerdo	12	23.53%
Totalmente de acuerdo	27	52.94%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a la retroalimentación proporcionada por GeoGebra sobre respuestas y pasos para resolver problemas ha sido clara y útil, donde el 52.94% menciona que está totalmente de acuerdo, el 23.53% menciona que está de acuerdo, el 5.88% permanece neutro, el 5.88% menciona que está en desacuerdo y el 11.76% menciona que está totalmente en desacuerdo.

**Tabla 13.**

*Es recomendable proponer el uso de GeoGebra a los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física para el aprendizaje de la aplicación de la integral definida*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	3	5.88%
En desacuerdo	2	3.92%
Neutro	1	1.96%
De Acuerdo	12	23.53%
Totalmente de acuerdo	33	64.71%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a si es recomendable proponer el uso de GeoGebra a los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física para el aprendizaje de la aplicación de la integral definida, donde el 64.71% menciona que está totalmente de acuerdo, el 3.92% menciona que está en desacuerdo y el 5.88% menciona que está totalmente en desacuerdo. Con un gran margen de diferencia entre las personas que están en desacuerdo y las que no, se entiende que los estudiantes consideran importa implementar el uso de softwares que puedan fortalecer el aprendizaje en las clases.

**Sección 2:** Percepciones sobre el uso de una guía didáctica.

**Tabla 14.**

*Es importante contar con una guía didáctica con GeoGebra para el aprendizaje de la aplicación de la integral definida*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	2	3.92%
En desacuerdo	2	3.92%
Neutro	1	1.96%
De Acuerdo	16	31.37%
Totalmente de acuerdo	30	58.82%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a es importante contar con una guía didáctica con GeoGebra para el aprendizaje de la aplicación de la integral definida, donde el 58.82% menciona que está totalmente de acuerdo, el 31.37% menciona que está de acuerdo, el 1.96% permanece neutro, el 3.92% menciona que está en desacuerdo y el 3.92% menciona que está totalmente en desacuerdo. Con los datos se puede entender que la elaboración de una guía usando como herramienta a GeoGebra significa de mucha ayuda para los estudiantes.

**Tabla 15.**

*La Introducción clara y motivadora es esencial en una guía didáctica.*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	4	7.84%
En desacuerdo	4	7.84%
Neutro	4	7.84%
De Acuerdo	11	21.57%
Totalmente de acuerdo	28	54.9%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a la introducción clara y motivadora es esencial en una guía didáctica, donde el 54.9% menciona que está totalmente de acuerdo, el 21.57% menciona que está de acuerdo, el 7.84% permanece neutro, el 7.84% menciona que está en desacuerdo y el 7.84% menciona que está totalmente en desacuerdo. Para los estudiantes una de las partes importantes de la guía es una introducción que los motive hacia el autoaprendizaje.

**Tabla 16.**

*La presencia de objetivos de aprendizaje específicos es importante en una guía didáctica.*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	10	19.61%
En desacuerdo	5	9.8%
Neutro	3	5.88%
De Acuerdo	12	23.53%
Totalmente de acuerdo	21	41.18%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a la presencia de objetivos de aprendizaje específicos es importante en una guía didáctica, donde el 41.18% menciona que está totalmente de acuerdo, el 23.53% menciona que está de acuerdo, el 5.88% permanece neutro, el 9.8% menciona que está en desacuerdo y el 19.61% menciona que está

totalmente en desacuerdo. Existe un porcentaje en diferencia a las demás preguntas en la opción de totalmente en desacuerdo, no es incidente, pero llama la atención el hecho de que algunos estudiantes no consideren a los objetivos como parte de una guía didáctica.

**Tabla 17.**

*La inclusión de ejemplos prácticos facilita la comprensión en una guía didáctica.*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	1	1.96%
En desacuerdo	2	3.92%
Neutro	2	3.92%
De Acuerdo	17	33.33%
Totalmente de acuerdo	29	58.86%
<b>Total</b>	<b>51</b>	<b>100%</b>

### **Análisis e interpretación**

En la tabla 17 se observa los datos de la encuesta referente a la inclusión de ejemplos prácticos facilita la comprensión en una guía didáctica, donde el 58.86% menciona que está totalmente de acuerdo, el 33.33% menciona que está de acuerdo, el 3.92% permanece neutro, el 3.92% menciona que está en desacuerdo y el 1.96% menciona que está totalmente en desacuerdo. Más de la mitad de estudiantes consideran que los ejercicios con ejemplos resueltos son de suma importancia, esto ya que pueden observar el ejercicio cada vez que se necesario, y analizar cada uno de los pasos.

**Tabla 18.**

*Las actividades interactivas para aplicar conceptos en una guía son satisfactorias*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	6	11.76%
En desacuerdo	4	7.84%
Neutro	4	7.84%
De Acuerdo	14	27.45%
Totalmente de acuerdo	23	45.1%
<b>Total</b>	<b>51</b>	<b>100%</b>

### **Análisis e interpretación**

En la tabla 18 se observa los datos de la encuesta referente a las actividades interactivas para aplicar conceptos en una guía son satisfactorias, donde el 45.1% menciona que está totalmente de acuerdo, el 27.45% menciona que está de acuerdo, el 7.84% permanece neutro, el 7.84% menciona que está en desacuerdo y el 11.76% menciona que está totalmente en desacuerdo.

**Tabla 19.**

*La presencia de recursos multimedia (videos, imágenes, enlaces) enriquece la guía didáctica*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	1	1.96%
En desacuerdo	2	3.92%
Neutro	1	1.96%
De Acuerdo	18	35.29%
Totalmente de acuerdo	29	56.86%
<b>Total</b>	<b>51</b>	<b>100%</b>

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a la presencia de recursos multimedia (videos, imágenes, enlaces) enriquece la guía didáctica, donde el 58.86% menciona que está totalmente de acuerdo, el 35.29% menciona que está de acuerdo, el 1.96% permanece neutro, el 3.92% menciona que está en desacuerdo y el 1.96% menciona que está totalmente en desacuerdo. Casi todos los encuestados mencionan que les sería de mucha utilidad enlaces externos y recursos que les pueda ayudar a entender la temática, más que solo leer.

**Tabla 20.**

*La inclusión de referencias bibliográficas es relevante para profundizar en los temas tratados*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	10	19.61%
En desacuerdo	5	9.8%
Neutro	3	5.88%
De Acuerdo	18	35.29%
Totalmente de acuerdo	15	29.41%
<b>Total</b>	<b>51</b>	<b>100%</b>

### **Análisis e interpretación**

En la tabla 20 se observa los datos de la encuesta referente a la inclusión de referencias bibliográficas es relevante para profundizar en los temas tratados, donde el 29.41% menciona que está totalmente de acuerdo, el 35.29% menciona que está de acuerdo, el 5.88% permanece neutro, el 9.8% menciona que está en desacuerdo y el 19.61% menciona que está totalmente en desacuerdo. Algunos estudiantes consideran que incluir bibliografía en la guía no es necesaria, esto se puede entender de manera que los estudiantes no consideran importante contar con un apartado de fuentes bibliográficas que sirvan como apoyo para repasar conceptos y ejercicios sobre la temática

**Tabla 21.**

*La presencia de resúmenes al final de cada sección es útil en una guía didáctica.*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	6	11.76%
En desacuerdo	4	7.84%
Neutro	6	11.76%
De Acuerdo	15	29.41%
Totalmente de acuerdo	20	39.22%
<b>Total</b>	<b>51</b>	<b>100%</b>

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a la presencia de resúmenes al final de cada sección es útil en una guía didáctica, donde el 39.22% menciona que está totalmente de acuerdo, el 29.41% menciona que está de acuerdo, el 11.76% permanece neutro, el 7.84% menciona que está en desacuerdo y el 11.76% menciona que está totalmente en desacuerdo. No existe una gran presencia de estudiantes que consideren que el resumen al final cada tema sea importante, debido a que esto les podría confundir y crear nuevas dudas.

**Tabla 22.**

*La inclusión de ejercicios prácticos con respuestas o soluciones es relevante en una guía.*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	1	1.96%
En desacuerdo	1	1.96%
Neutro	1	1.96%
De Acuerdo	20	39.22%
Totalmente de acuerdo	28	54.9%
<b>Total</b>	<b>51</b>	<b>100%</b>

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a la inclusión de ejercicios prácticos con respuestas o soluciones es relevante en una guía, donde el 54.9% menciona que está totalmente de acuerdo, el 39.22% menciona que está de acuerdo, el 1.96% permanece neutro, el 1.96% menciona que está en desacuerdo y el 1.96% menciona que está totalmente en desacuerdo. Casi todos los estudiantes consideran que es importante que la guía cuente con problemas para que ellos puedan practicar, además estos ejercicios deben de tener una solución o respuesta para que los estudiantes la puedan comprobar, de esta manera pueden aplicar lo aprendido.

**Tabla 23.**

*Una sección de preguntas frecuentes para aclarar dudas es importante en una guía didáctica*

<b>Opciones</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Porcentaje</b>
Totalmente en desacuerdo	3	5.88%
En desacuerdo	3	5.88%
Neutro	3	5.88%
De Acuerdo	15	29.41%
Totalmente de acuerdo	27	52.94%
Total	51	100%

### **Análisis e interpretación**

En la tabla se observa los datos de la encuesta referente a una sección de preguntas frecuentes para aclarar dudas es importante en una guía didáctica, donde el 52.94% menciona que está totalmente de acuerdo, el 29.41% menciona que está de acuerdo, el 5.88% permanece neutro, el 5.88% menciona que está en desacuerdo y el 5.88% menciona que está totalmente en desacuerdo.

### **4.3 Discusión**

Molina B. et al (2019), resaltó el efecto del software GeoGebra como complemento del aprendizaje por problemas en la enseñanza de la geometría donde concluyó que la inclusión del aprendizaje por problemas usando GeoGebra, mejoró el rendimiento de la geometría. Se observó que la formación de las habilidades geométricas básicas y superiores de los estudiantes mejoraron considerablemente. Siendo similar a los resultados donde más del 50% de los estudiantes mencionan que el uso de GeoGebra mejoraría y fortalecería al momento de comprender conceptos, además de la resolución de ejercicios y la comprensión de graficas de la aplicación de la integral definida, sin embargo, se les complica un poco utilizar la herramienta de GeoGebra. Estos resultados son similares a los encontrados por Sánchez R. y Borja A. (2022) que se centró en analizar el uso del software GeoGebra como herramienta de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Encontrando que el uso de GeoGebra mejora significativamente la comprensión y resolución de problemas matemáticos, permitiendo a los estudiantes encontrar la respuesta correcta.

El avance de la tecnología ha permitido que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas sea más interactivo y dinámico. En este sentido, el software GeoGebra se ha convertido en una herramienta de gran utilidad en la enseñanza de las matemáticas. Soledispa C. y García G. (2022) realizaron un estudio para analizar la herramienta GeoGebra en la enseñanza de la Matemática para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de Educación Básica Superior con el propósito de que puedan mejorar su rendimiento académico y potenciar sus habilidades críticas y analíticas para resolver procesos y problemas matemáticos, demostraron que el uso del software GeoGebra mejora significativamente el rendimiento de los estudiantes en la asignatura de matemáticas. A medida que los estudiantes utilizan el software, su aprendizaje va aumentando y su interés

por la materia también crece. Los estudiantes asimilan rápidamente las propiedades de los ejercicios, gracias a que la interfaz de GeoGebra es agradable para ellos, lo que influye positivamente en su rendimiento académico. Por ende, los estudiantes mencionan que una buena guía para comprender las matemáticas será mediante propiedades, ejercicios y análisis de problemas permitirá que puedan comprender con mayor facilidad. Siendo similar a las opiniones obtenidas en este estudio donde la mayoría de los estudiantes mencionan que necesitan una guía para poder mejorar en la definición de integrales definidas y que la guía debe estar conformada por preguntas frecuentes, guía de ejercicio, actividades interactivas y una introducción clara y concisa.

## **CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

### **5.1 Conclusiones**

Se encontró que los principales conceptos y temas relacionados a las aplicaciones de la integral definida, son: área bajo la curva, área entre curvas, longitud de arco, centro de masa, centroide de una región plana, volumen de un sólido en revolución en el eje  $x$  y  $y$ , además del trabajo físico. Estos temas son los cursados por los estudiantes, de manera que la guía sirva como un acompañamiento y sirva de mucho a los estudiantes en los temas específicos que ellos necesitan.

Acorde al análisis de la investigación, respecto al conocimiento conceptual de los estudiantes, se encontró que más del 70% de los estudiantes tienen un conocimiento alto en los conceptos de la aplicación de integrales definidas, sin embargo, no tienen un buen conocimiento en los temas más complicados de la aplicación de las integrales definidas que son el centro de masa, centroide de una región de plana, volumen de un sólido y el trabajo. Este problema se debe a que los estudiantes tienen un buen conocimiento en la teoría, pero se les complica poder plasmarlo en un ejercicio.

Para los estudiantes, los principales elementos que una guía didáctica debe contener son una introducción, el 56,86% consideran que se debe incluir ejemplos prácticos y resueltos, además de recursos externos como imágenes y enlaces a información, un 54.9% señala que la guía debe contener ejercicios para que los estudiantes puedan resolverlos y practicar lo aprendido, con la característica de que estos deben tener respuesta o solución para poder comprobar su trabajo. Más del 50% mencionan que el uso de GeoGebra mejoraría al momento de comprender la aplicación de las integrales definidas, fortaleciendo la resolución de ejercicios y la comprensión.

En cuanto a la creación de la guía sobre la aplicación de las integrales definidas se planteó para que los estudiantes puedan seguir paso a paso cada proceso tanto en una resolución matemática mediante las fórmulas conocidas y en GeoGebra, ayudándose con imágenes para que el lector de la guía pueda observar y reconocer cada uno de los iconos y apartados que debe de utilizar, finalizando con ejercicios para aplicar lo aprendido y una sección de enlaces externos para los que consideren necesario.

### **5.2 Recomendaciones**

Durante la investigación se pudo ver que el uso de nuevas herramientas durante la enseñanza es importante si se desea lograr un mayor conocimiento en el área de matemática, las herramientas tecnológicas son de suma importancia en la actualidad permitiendo que los estudiantes puedan adquirir nuevas habilidades durante su etapa académica. Por todo esto es recomendable el uso de la herramienta GeoGebra para el desarrollo de las integrales definidas, por lo tanto, se debería de tener una guía completa del uso del software pues los mismos estudiantes dan esa opinión y también es recomendable analizar otro tipo de herramienta que pueda ser útil para los estudiantes, así pueda familiarizarse más con los cursos y tener un desempeño óptimo.

Poder mostrar de forma más seguidas técnicas o guías de apoyo a los estudiantes, que sirvan para entender las integrales definidas en cada una de sus aplicaciones. Apoyarse de herramientas tecnológicas será un reto que todos los docentes deben de tener al momento de enseñar y adaptarse a los cambios tecnológicos de la actualidad.

## **CAPÍTULO VI. PROPUESTA**

### **6.1 Título de la propuesta**

Guía didáctica: Aplicación de las integrales definidas

### **6.2 Justificación de la propuesta**

En el área de la ciencia, existen muchas definiciones, teoremas y propiedades que son difíciles de recordar por parte de los estudiantes, por eso es de suma importancia brindar a los estudiantes herramientas y recursos que puedan facilitar la comprensión de los distintos temas matemáticos. Bajo este punto, se deben de usar software que puedan facilitar en el aprendizaje de los estudiantes, siendo GeoGebra la herramienta más versátil debido a su interfaz fácil de comprender y la diversidad de ejercicio que se pueden resolver dentro del software principalmente en la aplicación de las integrales definidas.

En lo expuesto durante la investigación realizada se encontró que la mayoría de los estudiantes mencionan que es importante una guía didáctica que le ayude en esta temática, y proponen que los ejercicios son más fáciles de desarrollar y comprender cuando se usa el software GeoGebra. Uno de los principales hallazgos del estudio es que los estudiantes mencionan que dominan toda la teoría de las integrales definidas, no obstante, tienen una dificultad muy alta al momento de poder desenvolver esos conocimientos en los ejercicios y sienten que sería de suma ayuda repasar la teoría para desarrollar los ejercicios. La creación de la guía brindará una mayor comprensión en el tema y puedan desarrollar los ejercicios con mayor facilidad.

### **6.3 Fines de la guía**

El propósito de la creación de la guía permitirá que los estudiantes puedan desenvolverse de mejor manera en los temas de la aplicación de las integrales definidas y fortalecer la práctica de los estudiantes, esto será una contribución de suma importancia para que los estudiantes puedan generar su autoaprendizaje, además se potenciará el uso de herramientas tecnológicas y en este caso se usara la herramienta GeoGebra.

### **6.4 Objetivo de la propuesta**

#### **6.4.1 Objetivo general de la propuesta**

Enriquece el aprendizaje y entendimiento de la aplicación de las integrales definidas mediante GeoGebra en los estudiantes de la carrera de matemáticas y física, UNACH.

#### **6.4.2 Objetivos específicos de la propuesta**

- Identificar los principales conceptos en las integrales definidas.
- Usar la herramienta de GeoGebra para el desarrollo de ejercicio de las integrales definidas
- Proporcionar ejemplos que estén desarrolladas de manera concisa para comprender las integrales definidas.

## 6.5 Enfoque teórico y contenido de la guía

La guía tendrá como principal aporte en que los estudiantes tengan una mayor comprensión en la aplicación de las integrales definidas y se apoyará en la herramienta GeoGebra para el desarrollo de ejercicios. Estos serán los aspectos relevantes en la guía didáctica:

- La guía tendrá desarrollo en la teoría de las integrales definidas de manera concisa
- Se proporcionará ejemplos prácticos desarrollados para su comprensión, además de tener ejercicios resueltos en la herramienta GeoGebra.
- Se dejará ejercicios para practicar que van a desarrollar los estudiantes para que puedan practicar.
- Se dejará ejercicios prácticos en videos para que puedan tener una guía audiovisual y puedan tener una mayor comprensión.

## 6.6 Recursos utilizados

### *Recursos humanos*

- Autor/ Editor: Persona que elaborará la guía didáctica.
- Docente experto: Persona que revise la redacción y edición del material

### *Recursos tecnológicos*

- Computadora: Laptop con acceso a internet y software de edición de texto
- Software GeoGebra: Acceso al programa de escritorio para crear los recursos
- Plataforma en línea: Sitio web donde se alojará el/los recursos creados

### *Otros recursos*

- Financiamiento: Rubro necesario para cubrir los costos de impresión
- Tiempo: Compromiso de tiempo y esfuerzo para desarrollar la guía

Finalmente, la guía completa de aplicaciones de las integrales definidas se presenta al final del trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

- Agraso, L., & Suelves, D. (2019). Las visiones del alumnado sobre los Materiales Didáticos Digitales en España. *Educare*, 79-94.
- Alex, M. p. (2021, 16 marzo). Área bajo la curva | Ejemplo 1 . [Video]. *YouTube*, <https://www.youtube.com/watch?v=s1BMqFdtZfM>.
- Alex, M. p. (2021, abril 3). Área entre curvas | Ejemplo 1. [Video]. *YouTube*, <https://www.youtube.com/watch?v=hZ1n4-Cpn74>.
- Baque, G., & Portilla, G. (2021). El aprendizaje significativo como estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje. *Polo del Conocimiento*, 75-86. doi:10.23857/pc.v6i5.2632.
- Bolaños, C., & Ruiz, J. F. (2018). Bolaños Florido, C., & Ruiz Hidalgo, J. F. (2018). Demostrando con Goegebra. *Numeros*, 1(9), 153-171. *Revista Resiamuc*, 45-56.
- Borja, A. G. (2019, 16 junio). Volumen de revolución con respecto al Eje Y con GeoGebra. [Video]. *YouTube*, <https://www.youtube.com/watch?v=CiaXbcWRAKQ>.
- Bravo, A., Arenas, J., & Pineda, E. (2019). El aprendizaje de la geometría con GeoGebra, un enfoque de aprendizaje por problemas. *Revista Docencia Universitaria*, 55-67.
- Calculisto. (s.f.). Trabajo de una fuerza. *Calculisto*, <https://www.calculisto.com/topics/aplicaciones-de-las-integrales/448>.
- Cruces, E., & Provoste, V. (2022). El uso del material y /o recurso didáctico proporcionados por el Ministerio de Educación en la enseñanza de las matemáticas en primer ciclo de enseñanza básica. *Concepcion: Universidad de Concepcion*.
- DalpMaths. (2019, 14 octubre). Cálculo Integral: Centroide de una región plana. [Video]. *YouTube*, [https://www.youtube.com/watch?v=-\\_\\_gxr8EmGQ](https://www.youtube.com/watch?v=-__gxr8EmGQ).
- Gallo, G., Suarez, A., & Campi, J. (2021). Aplicaciones de las TIC en la educación. *Revista Resiamuc*, 45-56.
- García, D., & Martín, R. (2023). Competencia matemática y digital del futuro docente mediante el uso de GeoGebra. *Alteridad*, 18(1), 85-98. doi:<https://doi.org/10.17163/alt.v18n1.2023.07>.
- Matamoros, A., Salmeron, A., & Mercado, S. (2021). Medios, recursos y materiales didácticos, utilizados por la docente de la asignatura de Ciencias Naturales en 4to grado de colegio 14 de septiembre del municipio de Managua, distrito V, durante el segundo semestre del año 2020. *Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua*.
- MateFacil. (2024, 16 abril). Centro de Masa (Centroide) usando integrales, Ejemplo PASO A PASO (2 Métodos). [Video]. *YouTube*, [https://www.youtube.com/watch?v=m25dbmu\\_Eiw](https://www.youtube.com/watch?v=m25dbmu_Eiw).
- Puebla, P. P. (2020, 16 diciembre). LONGITUD de ARCO con INTEGRALES| FACILÍSIMO| CÁLCULO INTEGRAL. [Video]. *YouTube*, <https://www.youtube.com/watch?v=-pvD-Ile0Go>.
- Puebla, P. P. (2021, junio 22). VOLUMEN con INTEGRALES |Super FÁCIL| Cálculo Integral. [Video]. *YouTube*, <https://www.youtube.com/watch?v=94vepPBCIjA>.
- Ramos, M., & Moreno, M. (2020). La influencia de los recursos audiovisuales para el aprendizaje autónomo en el aula. *Disertaciones*, 97-117.
- Rodríguez, J. (2020). Inclusión del Software GeoGebra en las clases de Matemática. *Bahí Blanca*.
- Sánchez, R. C., Mañoso, L., Novillo, M., & Periacho, F. (2019). Orígenes del conectivismo como nuevo paradigma del aprendizaje en la era digital. *Educación y Humanismo*, 21(36), 121-136.

- Sánchez, R., & Borja, A. (2022). Geogebra en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas. *Dominio Científico*, 33-52.
- Soledispa, Y., & García, G. (2022). GeoGebra y el rendimiento académico de los estudiantes en Matemáticas: Un Análisis sistemático de la Literatura. *Yachasun*, 6(11), 159-175. doi:<https://doi.org/10.46296/yc.v6i11edespag.0209>.
- Strang, G., & Herman, E. (2022). Cálculo volumen 1. *OpenStax*, <https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1/pages/1-introduccion>.
- Studocu. (s.f.). Área entre curvas ejemplos resueltos - Área entre curvas. *Studocu*, <https://www.studocu.com/es-mx/document/universidad-nacional-autonoma-de-mexico/anatomia/area-entre-curvas-ejemplos-resueltos/7183464>.
- Studocu. (s.f.). Centros de MASA Ejercicios Resueltos - 4 Cálculo de momentos, centros de masa y trabajo. *Studocu*, <https://www.studocu.com/es-ar/document/universidad-nacional-de-san-luis/fisica-1/centros-de-masa-ejercicios-resueltos/5695360>.
- Studocu. (s.f.). Ejercicios resueltos parte 1 - CENTRO DE GRAVEDAD, CENTRO DE MASA Y CENTROIDE. *Studocu*, <https://www.studocu.com/pe/document/universidad-catolica-santo-toribio-de-mogrovejo/estatica/4-ejercicios-resueltos-parte-1/8380561>.
- Studocu. (s.f.). Trabajo calculo (Longitud de arco en una curva). *Studocu*, <https://www.studocu.com/co/document/universidad-del-atlantico/calculo-integral/trabajo-calculo-longitud-de-arco-en-una-curva/8013713>.
- Studocu. (s.f.). Varios Ejercicios de Diferencial del área bajo una curva. *Studocu*, <https://www.studocu.com/ec/document/facultad-latinoamericana-de-ciencias-sociales-ecuador/media-training/211-varios-ejercicios-de-diferencial-del-area-bajo-una-curva/26887857>.
- Superprof. (2024, 1 junio). Ejercicios de volumen de una función. *Material Didáctico - Superprof*, <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/volumen-de-una-funcion.html>.
- uDocz. (2024). Ejercicios resueltos de volumen sólido de revolución. *uDocz*, <https://www.udocz.com/apuntes/90821/ejercicios-resueltos-de-volumen-solido-de-revolucion-1>.
- Univesidad Autónoma de Madrid. (2019). Integrales definidas. *Revista unam*, 2-55. <https://www.uam.es/Economicas/documento/1242657264964/tema6.pdf?blobheader=application/pdf>.
- Vega, N., Flores, I., Hurtado, B., & Rodríguez, S. (2019). Teorías del aprendizaje. *Xikua*, 51-53.
- Vera, J., & Posligua, M. (2020). Los recursos didácticos en el proceso de la lectoescritura. *Guayaquil: Universidad de Guayaquil*.

# ANEXOS

## Anexo 1

### Instrumento: Prueba objetiva

#### Universidad Nacional de Chimborazo

Semestre:

#### Escimados: estudiantes,

Esta prueba tiene como objetivo evaluar el conocimiento su conocimiento sobre la aplicación de la integral definida en diversos contextos, específicamente en los temas relacionados con el cálculo de áreas, longitudes, volúmenes y trabajo. Además, se busca analizar cómo la herramienta GeoGebra puede facilitar su comprensión y aprendizaje en estos conceptos matemáticos.

A continuación, se presentarán una serie de preguntas con opciones de respuesta. Lea cada enunciado cuidadosamente y elija la opción correcta. ¡Buena suerte!

#### Instrucciones:

Seleccione la respuesta que considere.

Evite dejar preguntas sin responder.

No se permite el uso de material de consulta ni la comunicación con otros estudiantes durante la prueba.

1. **¿Cuál de los siguientes métodos se basa en la suma de áreas de rectángulos para aproximar el área bajo una curva?**
  - a) Regla del trapecio.
  - b) Fórmula de Simpson.
  - c) Regla del punto medio.
  - d) Método de Euler.
2. **Para aproximar el área bajo una curva utilizando trapecios, ¿qué debe hacerse?**
  - a) Tomar el promedio de las alturas de dos puntos consecutivos.
  - b) Calcular el área de un rectángulo que contenga toda la curva.
  - c) Sumar las áreas de los trapecios formados por la curva y el eje x.
  - d) Utilizar la fórmula del área de un triángulo.
3. **¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la regla de Simpson es correcta?**
  - a) Es un método numérico que solo se aplica a funciones lineales.
  - b) Requiere dividir el intervalo de integración en segmentos de igual longitud.
  - c) Proporciona una estimación exacta del área bajo la curva para cualquier función.
  - d) Es más preciso cuando se utilizan menos segmentos en el intervalo de integración.
4. **Relacione la fórmula de la integral definida con su respectiva aplicación.**

Formula	Aplicación
1) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$	A) Área bajo la curva
2) $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$	B) Área entre curvas
3) $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$	C) Longitud de arco
4) $\int_a^b f(x) dx$	D) Centro de masa
5) $\int_a^b F(x) dx$	E) Centroide de una región plana

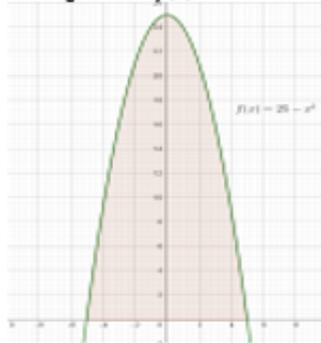
6) $\frac{1}{n} \int_a^b x[\rho(x)] dx$	F) Volumen de un sólido en revolución en el eje x
7) $\pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$	G) Volumen de un sólido en revolución en el eje y
8) $\int_a^b \frac{f(x)-g(x)}{A} dx$ $\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx$	H) Trabajo

- a) 1B, 2C, 3F, 4D, 5A, 6E, 7H, 8G  
b) 1A, 2C, 3D, 4H, 5G, 6B, 7E, 8F  
c) 1B, 2C, 3F, 4A, 5H, 6D, 7G, 8E  
d) 1A, 2C, 3D, 4F, 5H, 6B, 7G, 8E

5. ¿Cuál es la integral definida que calcula el área bajo la curva  $f(x) = \frac{x^2+24}{2}$  en el intervalo de  $-4$  a  $4$  en el eje x?

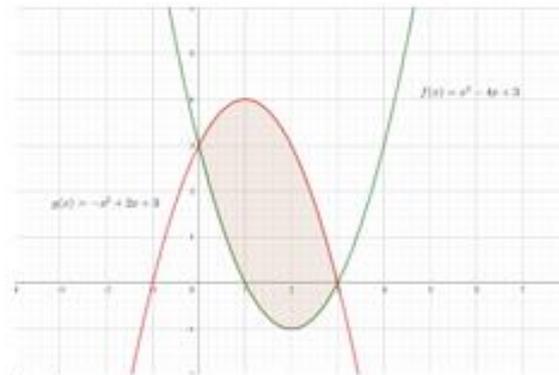
- a)  $\int \frac{x^2+24}{2} dx$   
b)  $\int_{-4}^4 \frac{x^2+24}{2} dx$   
c)  $\int_4^{-4} \frac{x^2+24}{2} dx$   
d)  $\int_{-4}^4 \frac{x^2+24}{2} dx$

6. Determinar el área de la región dada:  $f(x) = 25 - x^2$



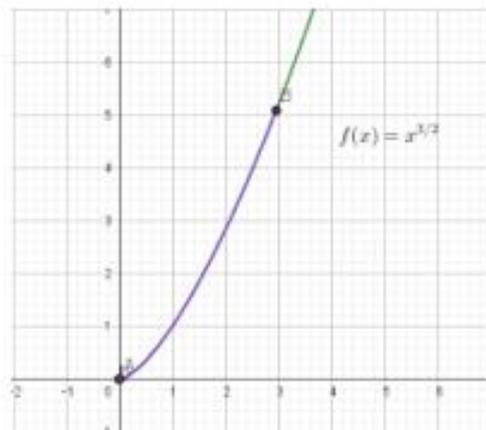
- a)  $A = 166,6 u^2$   
b)  $A = 116,4 u^2$   
c)  $A = 151,9 u^2$   
d)  $A = 160,6 u^2$

7. Calcula el área entre las curvas  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  y  $g(x) = -x^2 + 2x + 3$  de la región dada.



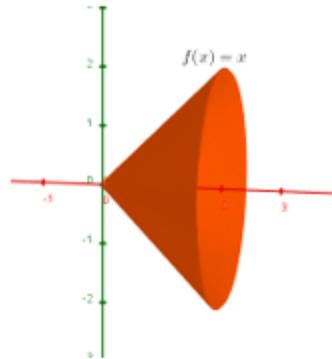
- a)  $A = 11 u^2$
- b)  $A = 10 u^2$
- c)  $A = 7 u^2$
- d)  $A = 9 u^2$

8. Calcular la longitud de arco de la función  $f(x) = x^{3/2}$ , en el intervalo  $[0, 3]$ .

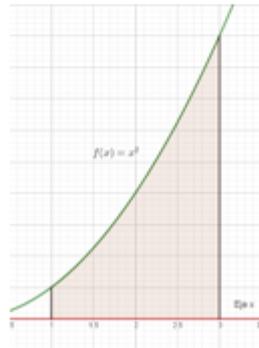


- a)  $L = 6.1$
- b)  $L = 4.1$
- c)  $L = 5.1$
- d)  $L = 7.1$

9. Considere la función  $f(x) = x$  en el intervalo  $[0, 2]$ . Cuál es el volumen del sólido generado al girar la región plana por el eje  $x$ .



- a)  $V = \frac{2\pi}{3}$   
 b)  $V = \frac{6\pi}{5}$   
 c)  $V = \frac{16\pi}{5}$   
 d)  $V = \frac{7\pi}{5}$
10. Supongamos que tenemos una región plana limitada por la curva  $f(x) = x^2$  y el eje  $x$  en el intervalo  $[1, 3]$ . Encontrar las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  del centroide de esta región.



Acti

- c)  $\bar{x} = 2.31$  ;  $\bar{y} = 2.46$   
 d)  $\bar{x} = 2.51$  ;  $\bar{y} = 2.79$
11. Una barra delgada de longitud  $l = 6$  m está ubicada en el eje  $x$ . La densidad de la barra en cualquier punto  $x$  está dada por la función  $\rho(x) = 2x + 1$  kg/m. Encontrar la posición  $\bar{x}$  del centro de masa de la barra en el eje  $x$ .
- a)  $\bar{x} = 3.75$   
 b)  $\bar{x} = 3.85$   
 c)  $\bar{x} = 4.55$   
 d)  $\bar{x} = 4.05$
12. Un objeto de 22 kg se mueve a lo largo de una línea recta desde  $x = 0$  hasta  $x = 6$  metros bajo la influencia de una fuerza  $F(x) = 5x + x^2$  N, donde  $x$  es la distancia medida en metros desde el punto inicial. Calcular el trabajo realizado para mover el objeto.
- a)  $T = 150$  J  
 b)  $T = 158$  J  
 c)  $T = 168$  J  
 d)  $T = 162$  J

## Anexo 2

### *Instrumento: encuesta*

#### Encuesta

Semestre:

#### Estimado Estudiante:

El presente estudio se enfoca en investigar sobre el software GeoGebra en el aprendizaje de la aplicación de integral definida por parte de los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física en la Universidad Nacional de Chimborazo (UNACH), con el objetivo de recolectar información precisa y detallada sobre la percepción y experiencia de los estudiantes al utilizar GeoGebra como apoyo en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida.

#### Instrucciones:

1. Lea cada pregunta cuidadosamente y selecciona la opción que mejor describa tu experiencia u opinión.
2. Responda todas las preguntas de manera sincera y reflexiva.
3. Por favor, indica su nivel de acuerdo con las siguientes afirmaciones utilizando una escala de Likert de 5 puntos:

#### Sección 1: Experiencia con GeoGebra en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida

1. GeoGebra mejora la comprensión de los conceptos relacionados con la aplicación de la integral definida.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
2. El uso de GeoGebra facilita la capacidad para resolver problemas relacionados con la aplicación de la integral definida.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
3. GeoGebra contribuye al desarrollo de habilidades prácticas en el manejo de herramientas tecnológicas para el estudio de las matemáticas.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo

4. La visualización gráfica de GeoGebra es útil para comprender mejor los conceptos de la aplicación de la integral definida.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
5. Las manipulaciones interactivas en GeoGebra facilitan la comprensión de la aplicación de la integral definida.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
6. Los recursos complementarios, como videos o enlaces a material adicional, proporcionados en GeoGebra enriquecen la comprensión de la aplicación de la integral definida.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
7. Experimentó dificultades técnicas o problemas al utilizar GeoGebra en el aprendizaje de la aplicación de la integral definida.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
8. La retroalimentación proporcionada por GeoGebra sobre respuestas y pasos para resolver problemas ha sido clara y útil.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
9. Es recomendable proponer el uso de GeoGebra a los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física para el aprendizaje de la aplicación de la integral definida.

Sección 2: Percepciones sobre el uso de una guía didáctica.

10. Es importante contar con una guía didáctica con GeoGebra para el aprendizaje de la aplicación de la integral definida.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
11. La introducción clara y motivadora es esencial en una guía didáctica.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
12. La presencia de objetivos de aprendizaje específicos es importante en una guía didáctica.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
13. La inclusión de ejemplos prácticos facilita la comprensión en una guía didáctica.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
14. Las actividades interactivas para aplicar conceptos en una guía son satisfactorias.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
15. La presencia de recursos multimedia (videos, imágenes, enlaces) enriquece la guía didáctica.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
16. La inclusión de referencias bibliográficas es relevante para profundizar en los
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
17. La presencia de resúmenes al final de cada sección es útil en una guía didáctica.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
18. La inclusión de ejercicios prácticos con respuestas o soluciones es relevante en una guía.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo
19. Una sección de preguntas frecuentes para aclarar dudas es importante en una guía didáctica.
  - 1: Totalmente en desacuerdo
  - 2: En desacuerdo
  - 3: Neutro
  - 4: De acuerdo
  - 5: Totalmente de acuerdo

**Anexo 3**  
*Guía didáctica*

Link:

[https://drive.google.com/file/d/1KMMtgDGZJQVwZBE9ZDgTDNwNPUJo\\_EEk/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1KMMtgDGZJQVwZBE9ZDgTDNwNPUJo_EEk/view?usp=sharing)

QR:

