UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

SECCIONES CÓNICAS

PEÑA GONZÁLEZ SANTIAGO EFRAÍN

PHD. ZÚÑIGA GARCÍA XIMENA JEANNETH

GUÍA DE RECURSOS DIDÁCTICOS DE SECCIONES CÓNICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

Autor:

Santiago Efraín Peña González

Coautora:

PhD. Ximena Jeanneth Zúñiga García

Riobamba – Ecuador

2024

INDICE GENERAL

ICONOS REFERENCIALES

En el siguiente apartado encontrarás iconos que te guiarán y darán una mejor experiencia al explorar por las diferentes secciones que conforman la presente guía.

INTRODUCCIÓN

OBJETIVOS

CONTENIDOS TEÓRICOS

RECURSOS DIDÁCTICOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

APLICACIONES

INTRODUCCIÓN

Al revisar nuestro alrededor observaremos, edificios, estatuas, marcos, curvas, calles y demás, pero si analizamos detenidamente, podemos identificar que estos objetos están compuestos por ángulos, curvas, ejes, secciones, espirales, que pueden ser medidos y calculados mediante fórmulas geométricas que aprenderemos a continuación.

Bienvenidos a este fascinante mundo de las secciones cónicas, en el cual aprenderemos cada una de ellas, así como sus características, fórmulas y aplicaciones en la vida real, realizando distintas actividades con materiales concretos, modelado o construcción mediante software que servirán de apoyo al docente, así como tareas complementarias que apoyarán el desarrollo del aprendizaje potenciando habilidades que serán de gran ayuda en estudios posteriores.

Sin más que agregar comencemos este emocionante viaje a través del estudio de las secciones cónicas mediante la aplicación de recursos didácticos conformado por materiales concretos, así como softwares o plataformas de fácil acceso y manejo que podemos utilizar gratuitamente.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Utilizar diferentes recursos didácticos para la enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas.

Objetivo Específico

- Conceptualizar cada una de las secciones cónicas, así como las fórmulas utilizadas en los cálculos.
- Desarrollar habilidades en el manejo de softwares educativos tanto en docentes como estudiantes.
- Incentivar el uso de recursos didácticos para la enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas motivando a los estudiantes.
- Mejorar la actitud al aprendizaje, así como el entorno en el que se desarrollan las clases mediante el uso de materiales didácticos.

UNIDAD I
NOCIÓN DE CÓNICAS

En el siguiente apartado, iniciaremos el recorrido por el mundo de las cónicas mediante la manipulación de material concreto al moldear un cono de plastilina y realizando cortes transversales visualizando cada una de las cónicas y creando las primeras nociones de esta temática.

1.1 Actividad 1

Para realizar esta actividad necesitaremos algunos materiales como son:

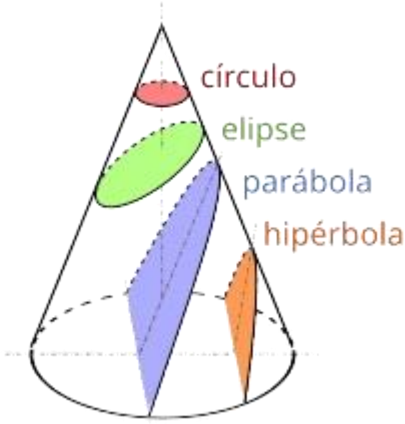
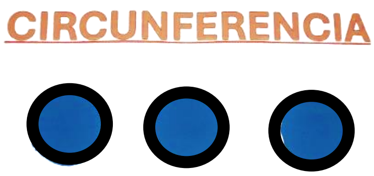
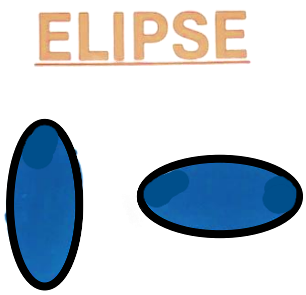
- Caja de plastilina
- 5 cartulinas de diferente color
- Pintura liquida
- Marcadores de colores
- Estilete o cutter

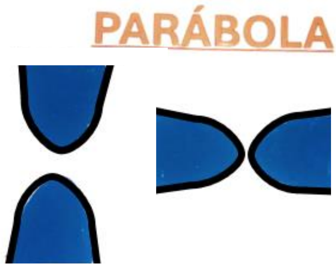
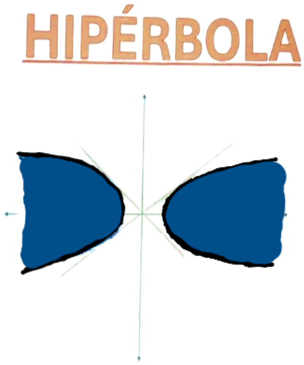
1.1.1 Instrucciones

Tabla 1

Secciones Cónicas a partir de cortes transversales

Pasos	Descripción	Imagen referencial
1	Amasar y moldear la plastilina hasta darle forma de un cono y dejar reposar 5 minutos.	
2	En cada cartulina imprimir o escribir el nombre de cada cónica	

3	Mediante el siguiente esquema realizaremos los respectivos cortes.	
4	Para obtener la circunferencia, realizaremos un corte paralelo a la base del cono o la parte superior del cono como lo muestra el paso anterior.	
5	Aplicar pintura del color de su preferencia y presionar sobre el papel con su respectivo nombre, dejar secar y delinear el borde(opcional).	
6	Para obtener la elipse seccionamos con una leve inclinación, desde la parte superior del cono hacia abajo.	
7	Repetimos el paso 5 sobre su respectiva hoja.	

8	Para obtener la parábola seccionamos con un mayor ángulo de inclinación hacia el centro de la base del cono.	
9	Repetimos el paso 5 sobre su respectiva hoja.	
10	Para obtener la hipérbola podemos utilizar la misma sección de la parábola ya que necesitamos que la curva sea simétrica.	
11	Finalmente repetimos el paso número 5, pero presionamos dos veces sobre el papel de tal manera que las imágenes sean paralelas entre sí y podemos graficar un plano y las asíntotas para mayor precisión.	

UNIDAD II
CIRCUNFERENCIA

3.1 Orígenes

La circunferencia es una de las figuras más comunes existentes en el entorno, sus orígenes se remontan a las primeras civilizaciones, quienes mediante la observación de la naturaleza comenzaron con su estudio para luego formalizarse y profundizarse en la antigua Grecia siendo objeto de estudio de grandes personajes como Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides, Arquímedes entre otros.

3.2 Cónica

Una cónica o sección cónica es una curva resultante de seccionar o cortar un cono con un plano en diferentes ángulos, dependiendo de la inclinación del corte obtendremos diferentes figuras como: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola que estudiaremos posteriormente realizando diferentes actividades y sus aplicaciones en la vida real.

3.3 Lugar Geométrico

Antes de definir correctamente una circunferencia es necesario agregar una terminología extra para posteriormente tener una mejor comprensión de la circunferencia, en este sentido definiremos al lugar geométrico como un conjunto o grupo de puntos que cumplen una propiedad específica; podemos leer diferentes textos de varios autores y todos dirán lo mismo aumentando, reduciendo o utilizando sinónimos en diferentes idiomas.

Sin embargo, es necesario aclarar esa propiedad específica mencionada en el concepto; si analizamos una circunferencia y marcamos puntos en toda su longitud podemos medir la distancia de ese punto al centro o radio y siempre será la misma longitud, pero si obtenemos una medida diferente dicho punto no pertenece al conjunto de puntos que conforman esa circunferencia.

Finalmente, ya tenemos una noción de lugar geométrico pues dicha propiedad específica hace referencia a la condición que cumplen el conjunto de puntos para que se forme una circunferencia; entonces cada figura, curva, recta o cónica es un lugar geométrico, solo sí el conjunto de puntos que lo conforma sigue la condición o propiedad específica para tener esa forma característica.

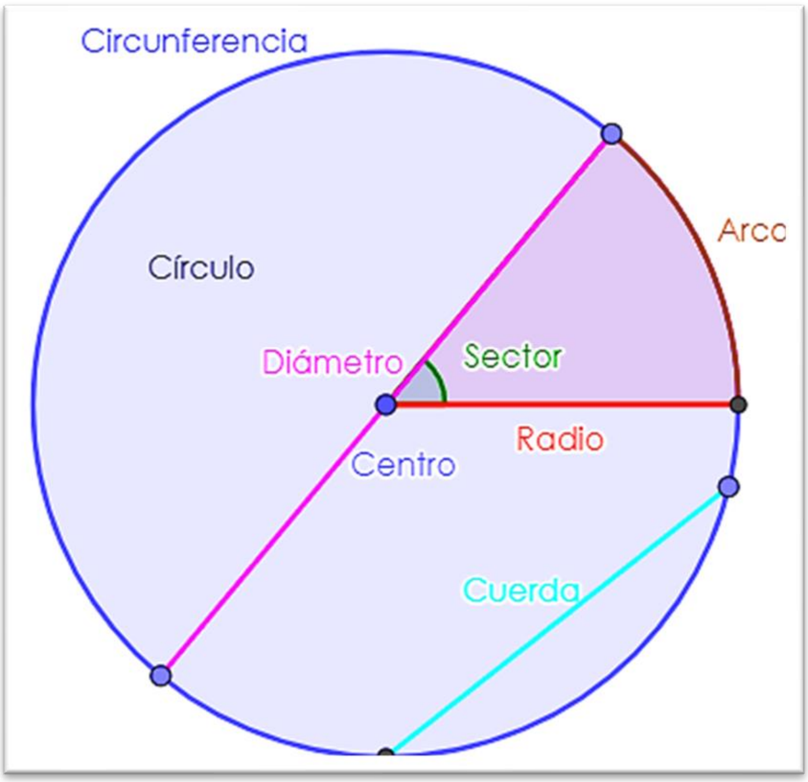
3.4 Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia de un punto cualquiera de la circunferencia al centro se llama radio (Raichman, 2023). Esta se forma al seccionar un cono de forma horizontal, paralelamente a su base o vértice como se realizó en la primera unidad.

Antes de profundizar más en esta temática es necesario plantear la diferencia entre circunferencia y círculo ya que existe mucha confusión al momento de utilizar estas conceptualizaciones por una parte se debe entender por circunferencia a la línea que rodea o encierra un espacio teniendo como resultado una magnitud de longitud; por otra parte, círculo es el espacio encerrado por la circunferencia logrando medirse en unidades cuadradas.

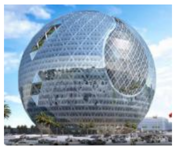
En este sentido es importante mencionar las siguientes definiciones que podrían usarse regularmente al hablar de circunferencias:

- Centro: punto equidistante a cualquier punto de la circunferencia del círculo.
- Radio: distancia o magnitud medida desde el centro a cualquier punto de la circunferencia.
- Diámetro: segmento de recta que atraviesa el centro del círculo, uniendo dos puntos de la circunferencia.
- Área: superficie o sección que ocupa el circulo de la circunferencia.
- Cuerda: segmento de recta que conecta dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro.
- Arco: sección o parte de la circunferencia.
- Sector: espacio o ángulo formado por dos radios trazados en distintos puntos del círculo.



3.5 Aplicaciones

La circunferencia es una de las figuras más comunes que podemos encontrar en nuestro entorno, tiene una gran cantidad de aplicaciones en diferentes áreas de estudio, tecnología, arquitectura entre otras; un ejemplo claro de ello son los balones de futbol que todos conocemos, poseen forma circular, si analizamos objetos como el calendario maya, una de las piezas arqueológicas más importantes de la humanidad también posee forma circular, en este mismo sentido, existen estructuras arquitectónicas modernas como el edificio llamado "Tecnoesfera" uno de los proyectos más importantes ecológicos y sostenibles ubicado en Dubái.



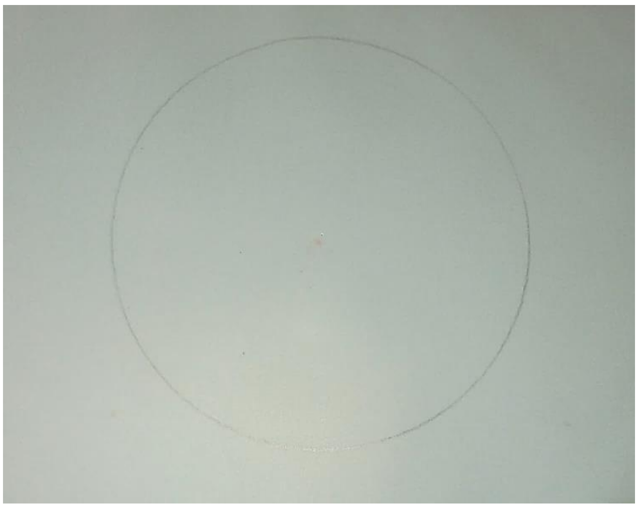
3.6 Actividad 2: Papiroflexia

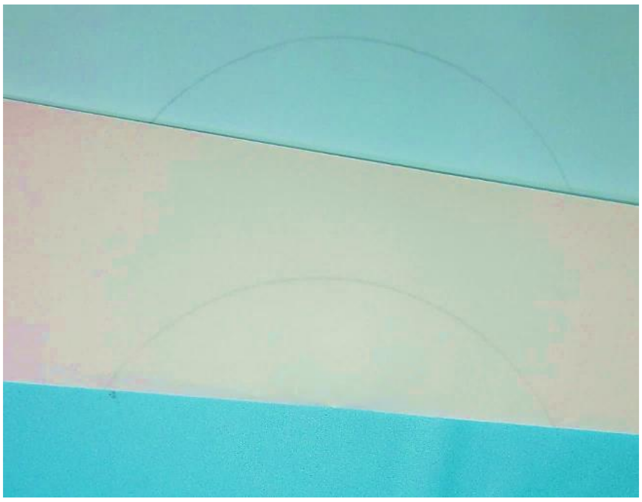
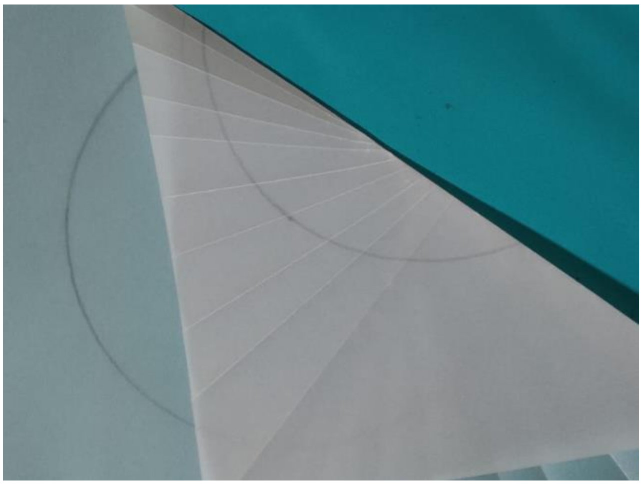
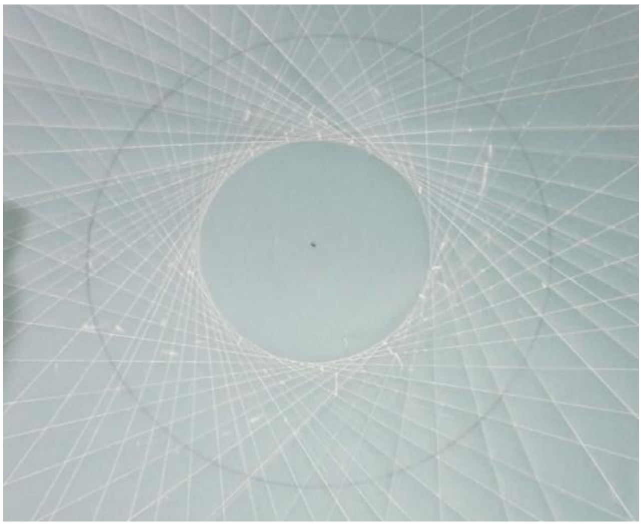
En este apartado realizaremos la construcción de la circunferencia a partir del arte de la papiroflexia, realizando dobleces en el papel calco o pergamino de tal manera que se marquen líneas tangenciales en cada una de las curvas.

2.1.1 Materiales

Para realizar esta actividad necesitaremos algunos materiales como son:

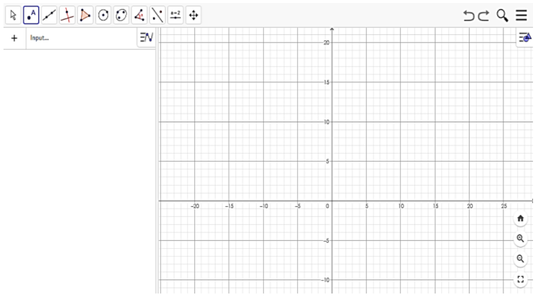
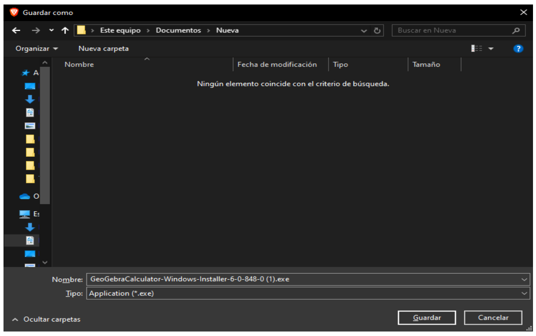
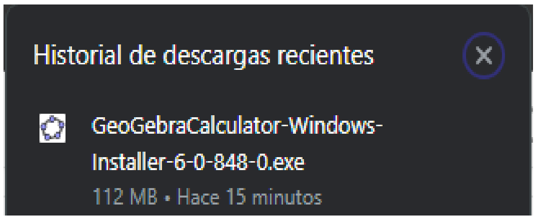
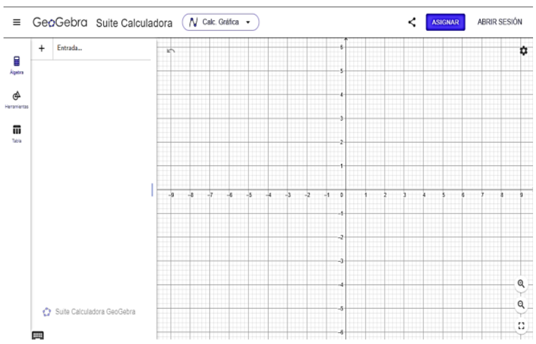
- 1 hoja de papel pergamino
- Compas
- Regla

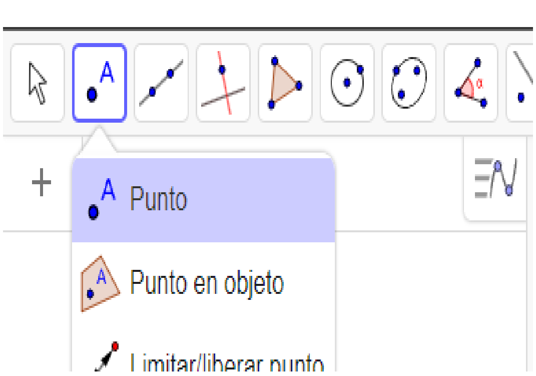
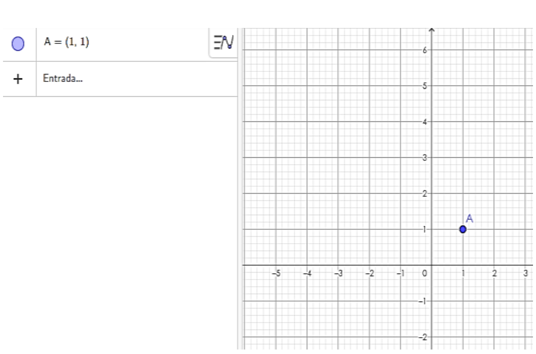
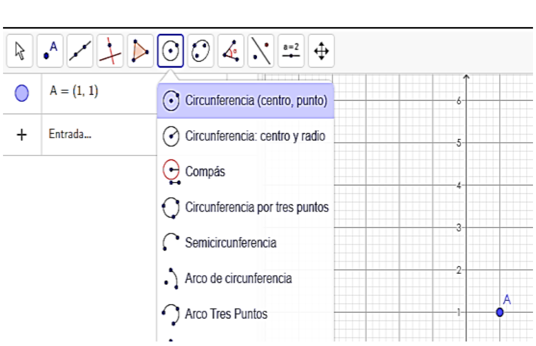
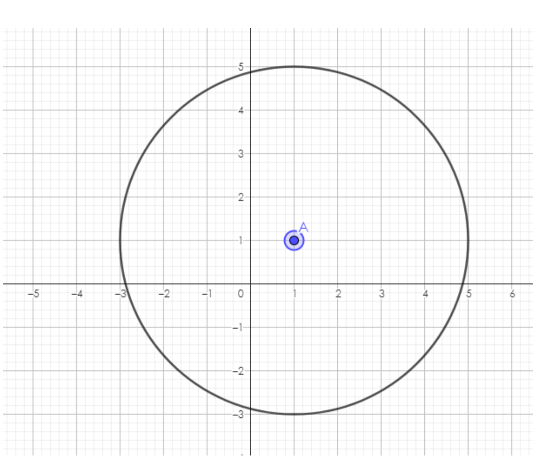
N.º	DESCRIPCIÓN	IMAGEN REFERENCIAL
1	Para iniciar, trazaremos una circunferencia de aproximadamente 20cm en el papel pergamino con ayuda del compás	

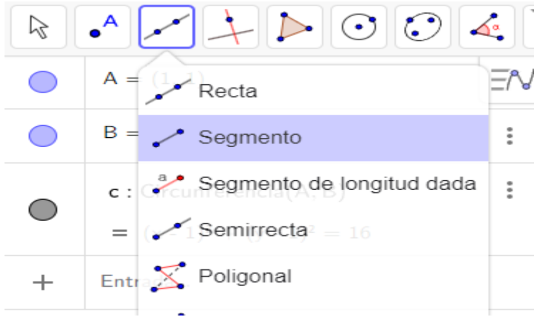
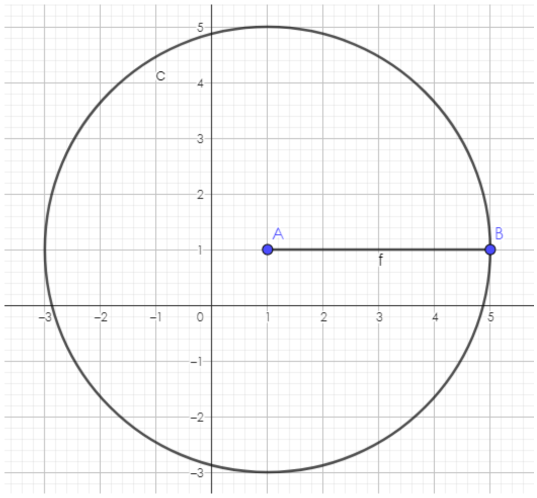
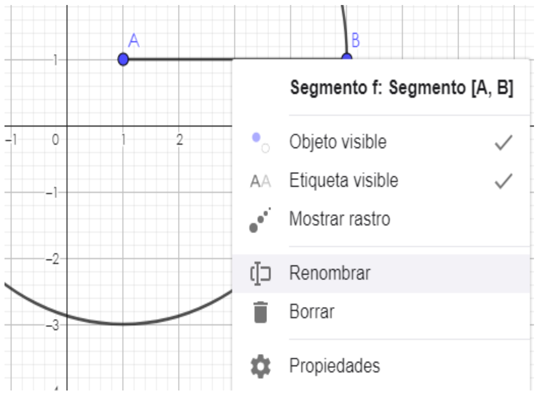
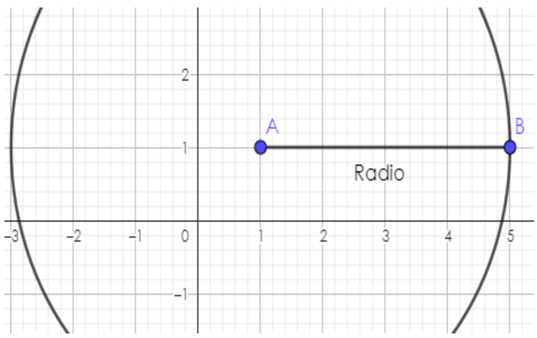
2	Luego doblaremos y haremos coincidir el borde de la circunferencia trazada con el centro de esta y asentaremos el doble para que se marque en el papel.	
3	Seguiremos realizando dobleces hasta dar una vuelta completa a la circunferencia, mientras más líneas tracemos al doblar, mejor se visualizará la circunferencia.	
4	Finalmente obtendremos este resultado.	

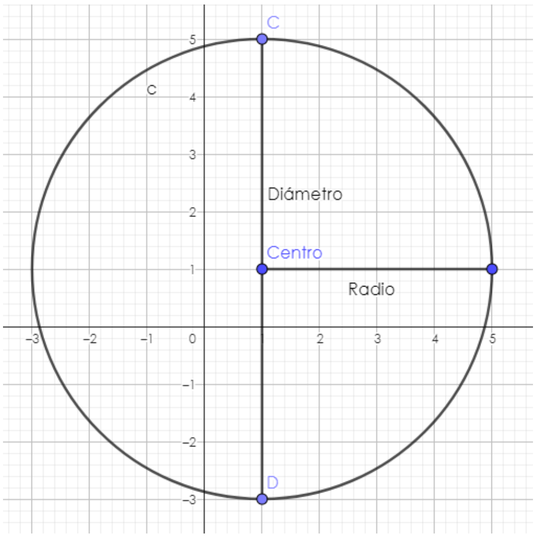
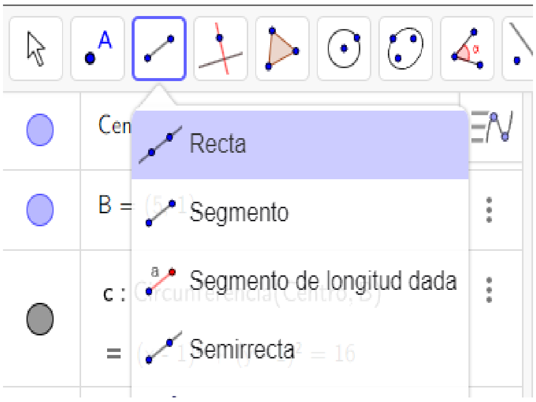
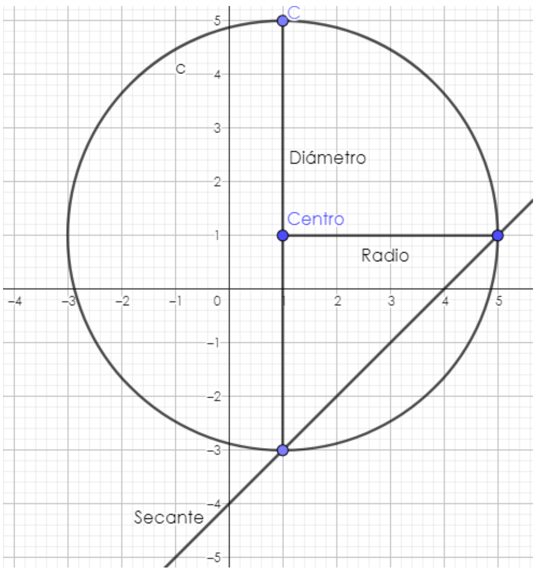
3.7 Actividad 3: GeoGebra

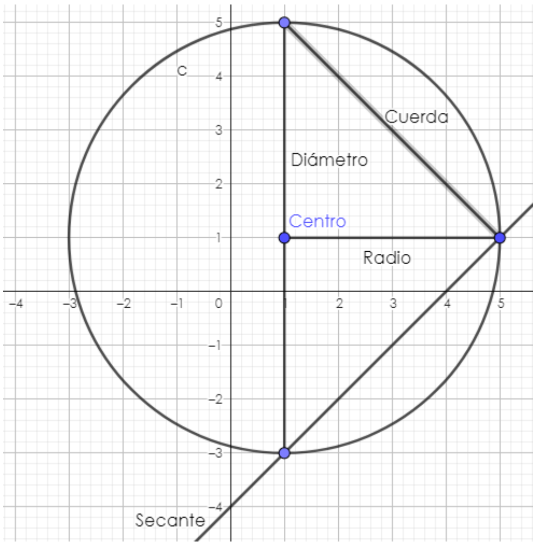
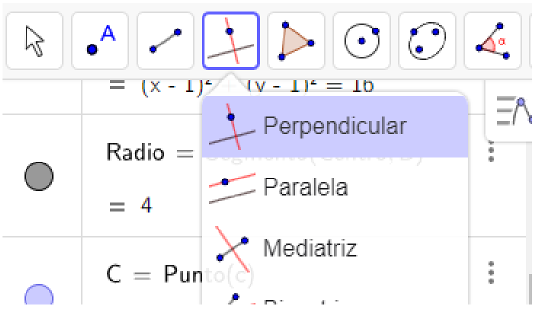
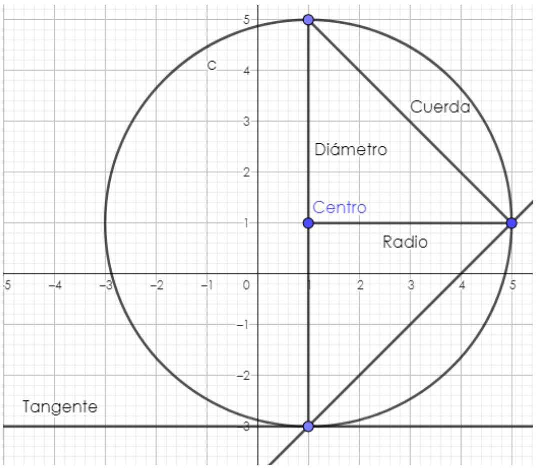
En el siguiente apartado encontraremos los pasos para la construcción de la circunferencia, así como la identificación de cada uno de sus elementos mediante el uso del software GeoGebra.

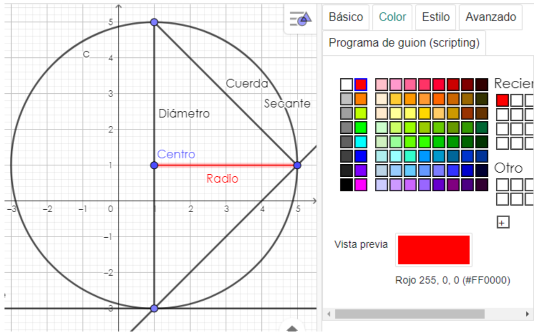
Paso	DESCRIPCIÓN	IMAGEN REFERENCIAL
1	Procedemos a ingresar a GeoGebra mediante el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/classic?lang=es	
2	Si desea instalar en su ordenador ingrese al siguiente enlace, sino continue al paso 3: https://download.geogebra.org/package/win-suite	
2.1	Una vez seleccionado el enlace se procederá a descargar el archivo y seleccione "Guardar".	
2.2	Cuando termine la descarga, seleccione el archivo y de doble clic y se instalará automáticamente creando un acceso en el escritorio.	

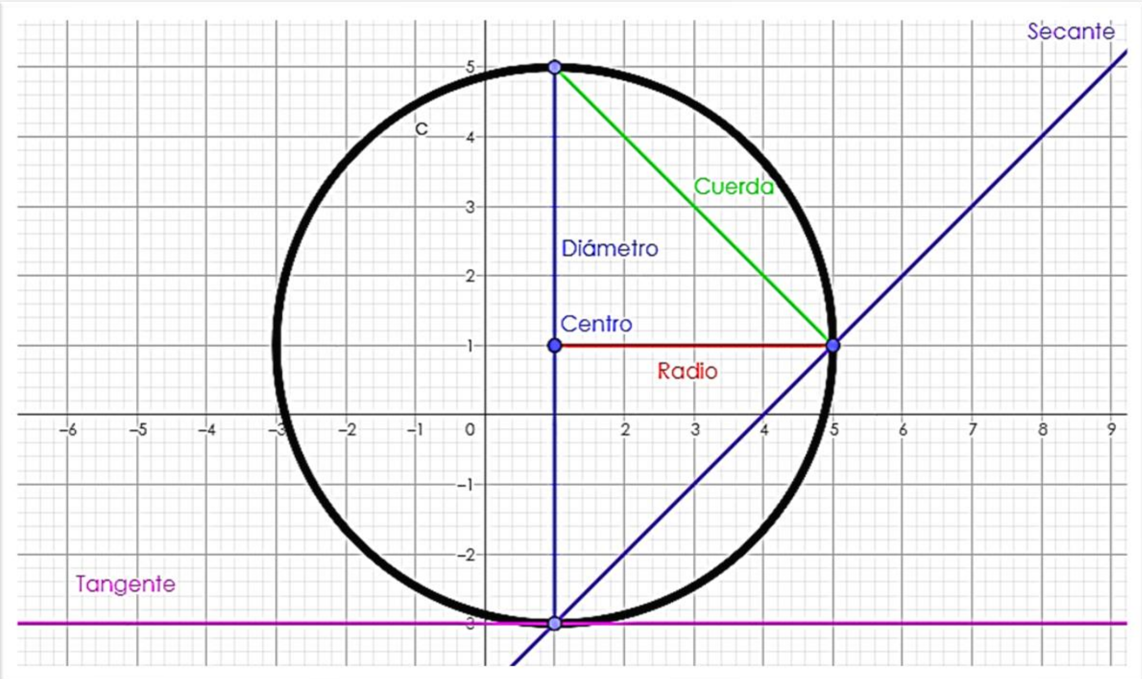
3	Empezaremos creando el centro de la circunferencia, seleccionado la segunda herramienta sobre el cuadro de entrada dando clic en la opción “Punto”.	
6	Después de haber seleccionado la opción punto, daremos clic en cualquier lugar de plano.	
7	Luego seleccionaremos la sexta opción de la barra de herramientas y daremos clic en la opción circunferencia (centro punto).	
8	Una vez seleccionado la opción daremos clic sobre el punto y moveremos el cursor hasta obtener una circunferencia del tamaño requerido y daremos clic nuevamente.	

ELEMENTOS		
9	Para graficar el radio de la circunferencia, debemos seleccionar la tercera herramienta y dar clic cobre la opción “Segmento”	
10	Luego daremos clic sobre el punto del centro y moveremos el curso hasta el borde dando clic nuevamente.	
11	Como parte opcional podemos identificar con el respectivo nombre, dando clic derecho sobre el nuevo segmento creado y luego en la opción “Renombrar”	
12	Cambiaremos el nombre del segmento por “Radio”, y podemos realizar con cada uno de los nuevos elementos, además para evitar muchos elementos podemos dar clic derecho sobre los puntos y clic izquierdo en la opción etiqueta para ocultarlas.	

13	Para graficar el diámetro seleccionaremos nuevamente la opción segmento y daremos clic izquierdo sobre el borde de la circunferencia y moveremos el curso a cualquier otro punto del borde pasando por el centro.	
14	Para graficar la secante seleccionaremos la segunda herramienta y daremos clic en la opción "Recta".	
15	Luego daremos clic en la en dos puntos de la circunferencia, recordando que no debe pasar por el centro.	

16	Para ubicar la cuerda seleccionaremos la opción segmento y daremos clic en dos puntos de la circunferencia.	
17	Para obtener una recta tangencial, seleccionaremos la cuarta herramienta y daremos clic en la opción perpendicular.	
18	Luego daremos clic izquierdo en el segmento del radio o diámetro, seguidamente en cualquiera de los puntos al borde de la circunferencia.	
19	Para crear mejorar el diseño en el cuadro de entradas podemos dar clic derecho a los elementos creado y seleccionar la opción "Propiedades"	

20	Inmediatamente del lado derecho se abrirá un cuadro, donde seleccionaremos la opción color y mejoraremos el diseño.	

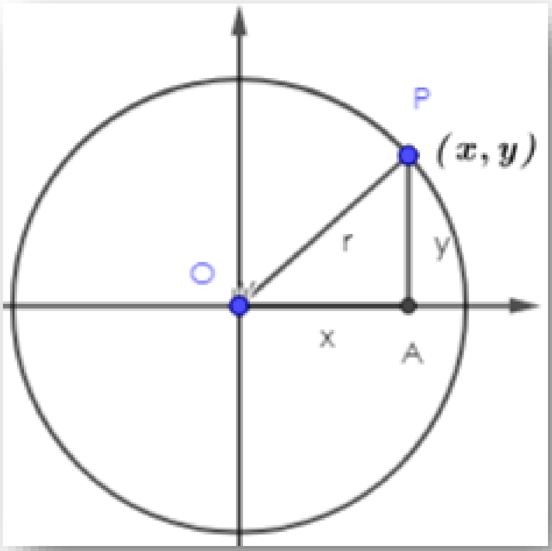


3.8 Demostraciones y ecuaciones de la circunferencia

2.1.2 Ecuación canónica de la circunferencia

Para una circunferencia de radio r con centro en el origen partiremos con la ecuación de distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Reemplazaremos las variables de la ecuación original para coincidir con las de la figura, teniendo en cuenta que d es la distancia del segmento $\overline{OP}$, el origen tiene coordenadas $(0{,}0)$ y el punto $P(x, y)$.

$$\overline{OP} = \sqrt{(0 - x)^2 + (0 - y)^2}$$

Ahora recordemos que el segmento $\overline{OP}$ es igual a r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Finalmente, elevaremos al cuadrado ambos miembros para eliminar la raíz

$$\boxed{\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}}$$

2.1.3 Ecuación reducida u ordinaria de la circunferencia

Para una circunferencia de radio r con centro de coordenadas (h, k) utilizaremos la ecuación de la distancia para medir la longitud del segmento $\overline{CP}$.

Reemplazaremos los nombres de las variables para coincidir con las de la figura, teniendo en cuenta las coordenadas de cada punto.

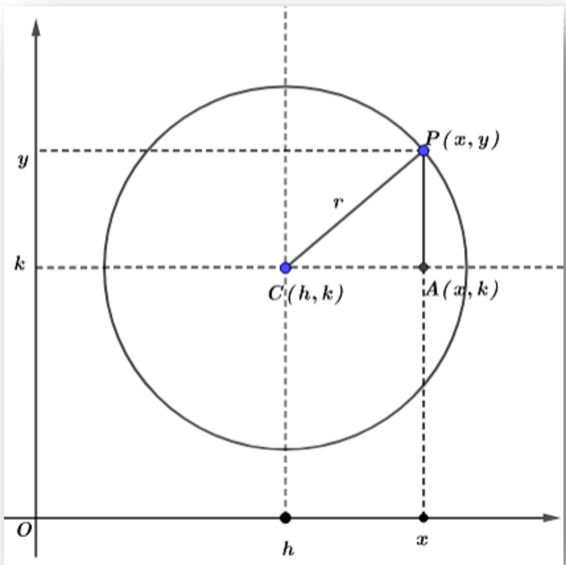
$$\overline{CP} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Ahora recordemos que el segmento $\overline{CP}$ es igual a r.

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Finalmente, elevaremos al cuadrado ambos miembros para eliminar la raíz

$$\boxed{\boldsymbol{r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2}}$$



2.1.4 Ecuación general de la circunferencia

Para esta demostración partiremos de la ecuación ordinaria de la circunferencia:

$$\boldsymbol{r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Desarrollando los binomios e igualando a cero toda la expresión obtendremos:

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$$

Reordenando y utilizando las siguientes igualdades obtendremos la ecuación general de la circunferencia

$$D = -2h; E = -2k; F = h^2 + k^2 - r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}}$$

3.9 Formulario de Ecuaciones de la circunferencia

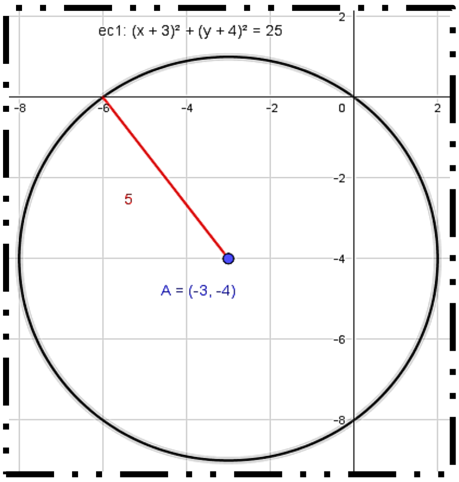
Nombre	Fórmula	Características
Forma Canónica	$x^2 + y^2 = r^2$	Centro en el origen
Forma Ordinaria	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	(h, k) son coordenadas del centro
Ecuación General	$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$	Forma General
Centro	$h = -\frac{D}{2}\ ;\ k = -\frac{E}{2}$	Coordenadas del centro
Radio	$r = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$	Longitud del radio
Longitud de la circunferencia	$L = 2\pi r$	Perímetro de la circunferencia
Área	$A = \pi r^2$	Área del círculo

3.10 Actividad 4: Ejercicios y Problemas

En este apartado encontraremos ejercicios, problemas y actividades relacionadas con el estudio de la circunferencia, que complementarán los conocimientos adquiridos con diferentes niveles de dificultad denotados por una estrella (★) que potenciarán el aprendizaje, además estos pueden ser revisados y comprobados con el software GeoGebra fácilmente.

★Escribir la ecuación de la circunferencia de centro

$C\ (-3,-4)$ y radio $r\ =\ 5$



Respuesta:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x+3)^2+(y+4)^2=5^2$

$\boldsymbol{(x+3)^2+(y+4)^2=25}$

★★Para diseñar una pista circular cuyo centro se encuentra sobre el eje x en $C\ (7{,}0)$ y que pasa por los puntos $A\ (1{,}3)$ y $B\ (4{,}6)$, halla la ecuación que describe su forma.

Respuesta:

$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

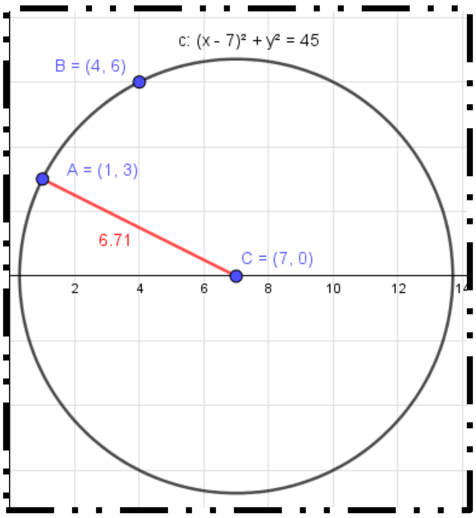
$r^2\ =(1-7)^2+(3-0)^2$

$r^2=36+9=45$

Reemplazamos en la ecuación:

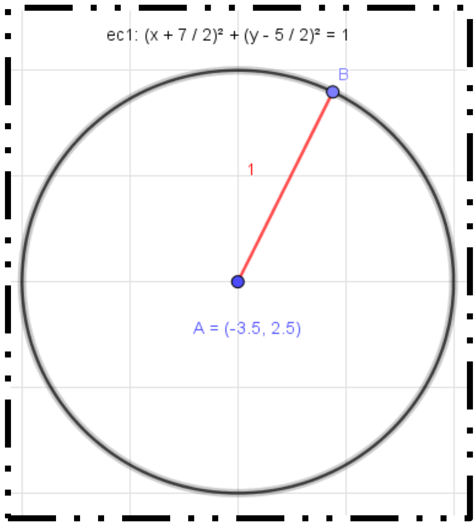
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$\boldsymbol{(x-7)^2+y^2=45}$



★ ★ ★ Determinar las coordenadas del centro de la circunferencia que tiene la siguiente ecuación general

$2x^2 + 2y^2 + 14x - 10y + 35 = 0$



<u>Respuesta:</u>

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$Dividimos\ la\ expresion\ entre\ 2$

$$\frac{2}{2}x^2 + \frac{2}{2}y^2 + \frac{14}{2}x - \frac{10}{2}y = -\frac{35}{2}$$

$Simplificamos$:

$$x^2 + y^2 + 7x - 5y = -\frac{35}{2}$$

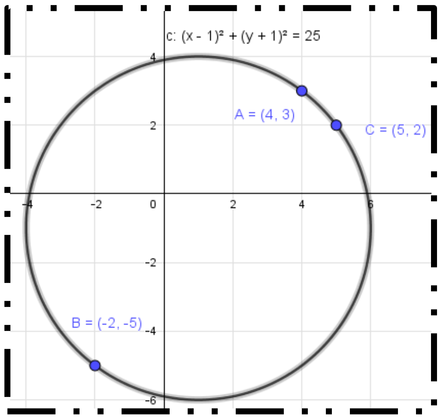
$Completamos\ trinomios\ y\ agrupamos$

$$\left(x^2 + 7x + \frac{49}{4}\right) + \left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = -\frac{35}{2} + \frac{49}{4} + \frac{25}{4} \to \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{-70 + 49 + 25}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 1 \to \boldsymbol{Coordenadas}\ \left(-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right);\ \boldsymbol{r = 1}$$

★★★ Determinar la ecuación general de la circunferencia que pasa por tres puntos $A\ (4,3)$, $B\ (-2,-5)$, $C\ (5,2)$

<u>Respuesta:</u>



$Remplazo\ puntos\ en\ Ec. General$

$A \to\ (4)^2\ + (3)^2\ + D(4) + E(3)\ +\ F\ =\ 0$

$A \to 4D +\ 3E\ +\ F\ =\ -25\ \to Ec1$

$B \to\ (-2)^2\ + (-5)^2\ + (-2)D + (-5)E\ +\ F\ =\ 0$

$B \to -2D - 5E\ +\ F\ =\ -29\ \ \to Ec2$

$C \to (5)^2\ + (2)^2\ + (5)D + (2)E\ +\ F\ =\ 0$

$C \to 5D + 2E\ +\ F\ =\ -29 \to Ec3$

$Sistema\ de\ ecuaciones$

$$\begin{cases} 4D + 3E + F = -25 \\ -2D - 5E + F = -29 \\ 5D + 2E + F = -29 \end{cases}$$

$Ecuacion\ General$:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0}$$

$$D = -2; E = 2; F = -23$$

Ejercicios para desarrollar

1) ★ Encuentra la ecuación de una pista circular con el centro en el origen y un radio de 5 unidades.
2) ★ Escribe la ecuación de una circunferencia con el centro en $C\ (2{,}2)$ y un radio de 4 unidades.
3) ★ Para trazar el contorno de una mesa circular, cuyo centro está en $C\ (-7{,}2)$ y tiene un radio de $r\ = \frac{9}{4}$, escribe la ecuación que describe la forma.
4) ★★ Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre el eje x $C\ (-2{,}0)$ y que pasa por los puntos $A\ (4{,}0)$ y $B\ \left(\frac{56}{25}, \frac{106}{25}\right)$.
5) ★★ Para definir una pista circular con el centro en el origen, que pasa por los puntos $A\ (-3, -2)$ y $B\ (-3{,}2)$, halla la ecuación que representa su trayectoria.
6) ★★E n la planificación de una plaza circular, cuyo centro está en $C\ (-2{,}3)$ y que pasa por los puntos $A\ (-2, -2)$ y $B\ (2{,}0)$, determina la ecuación que describe la forma de la plaza.
7) ★★★ Determinar las coordenadas del centro de la circunferencia que tiene la siguiente ecuación general $2x^2 + y^2 - 4x - 4y - 28 = 0$
8) ★★★ En la construcción de una pista de ciclismo, encuentra las coordenadas del centro de la circunferencia con la ecuación general $3x^2 + 3y^2 + 84x + 48y + 672 = 0$
9) ★★★ Determinar la ecuación general de la circunferencia que pasa por tres puntos $A\ (10{,}0)$, $B\ (8, -12)$, $C\ (20, -6)$

UNIDAD III
PARÁBOLA

3.11 Orígenes

Esta forma geométrica tiene sus orígenes siendo objeto de estudio de Menaechmus, importante matemático, filósofo y geómetra griego; fue el primero en centrar su estudio al cortar un cono con un plano que posteriormente formalizó el estudio de las cónicas en general en su obra "Conics" influyendo significativamente en la geometría, teniendo un amplio campo de aplicaciones actualmente como: óptica, telecomunicaciones, ingeniería y arquitectura.

3.12 Cónica

Una cónica o sección cónica es una curva resultante de seccionar o cortar un cono con un plano en diferentes ángulos, dependiendo de la inclinación del corte obtendremos diferentes figuras como: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola que estudiaremos posteriormente realizando diferentes actividades y sus aplicaciones en la vida real.

3.13 Lugar Geométrico

Resumiendo, conceptualizaremos el lugar geométrico como conjunto o grupo de puntos que cumplen una propiedad específica, para este caso en particular, el lugar geométrico de la parábola son todos los puntos que cumplen la condición para formar dicha cónica.

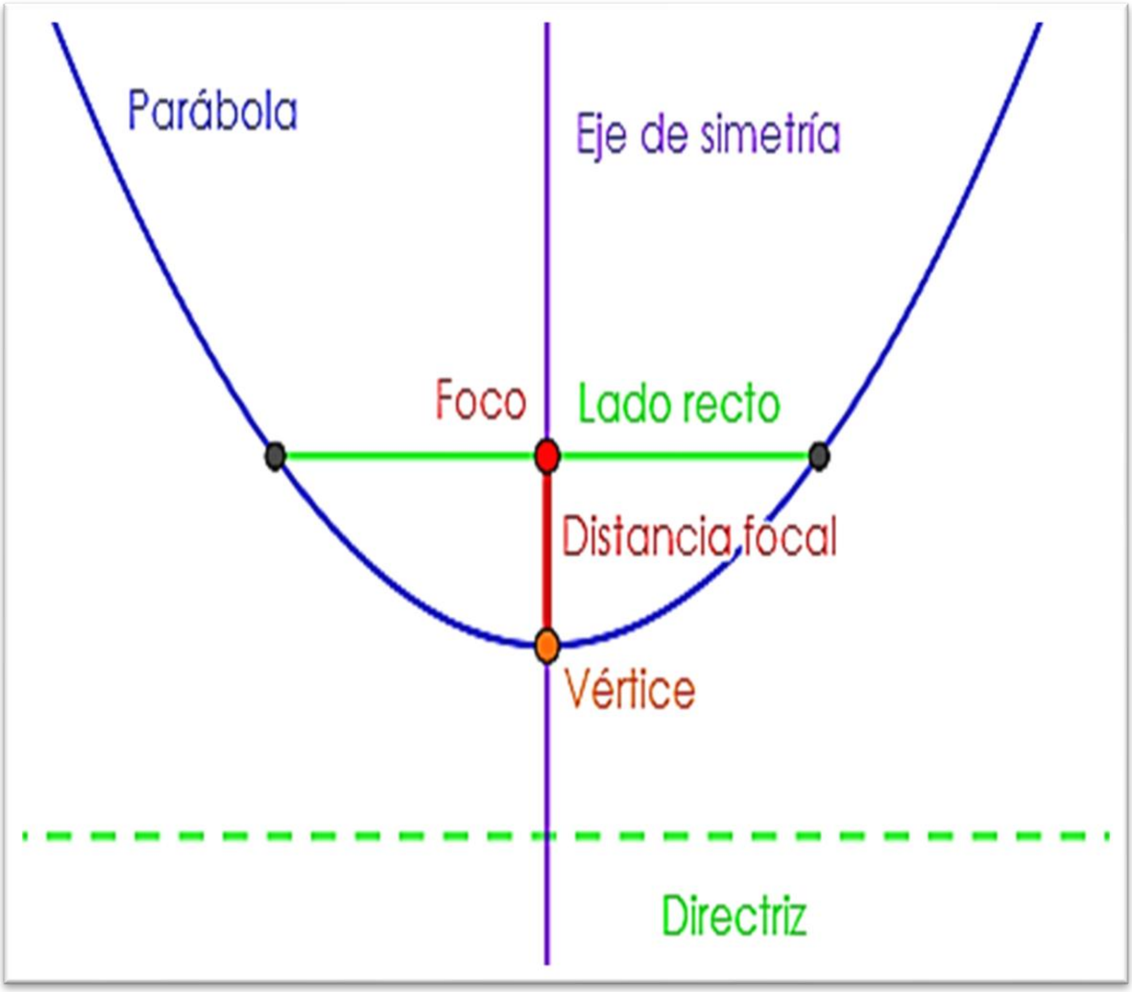
3.14 Parábola

La parábola es una curva simétrica, resultante de seccionar un cono de manera vertical, puede tener forma de ("U") o invertida ("∩") dependiendo el signo de la ecuación. Geométricamente la parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo llamado foco, es igual a la distancia a una recta fija llamada directriz que no pasa por el foco (Raichman, 2023).

En este sentido es importante mencionar las siguientes definiciones que podrían usarse regularmente al hablar de parábolas:

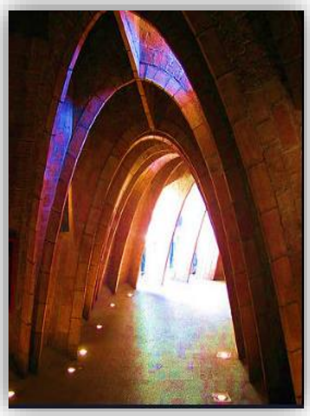
- Directriz: línea o recta externa a la curva, la distancia entre la directriz y el vértice es igual a la distancia entre el foco y el vértice.
- Distancia Focal: distancia entre el vértice y el foco.
- Eje de simetría: línea o recta que divide la parábola en dos partes iguales o simétricas.
- Foco: punto fijo ubicado internamente a la parábola.
- Lado recto: recta paralela a la directriz que atraviesa el foco, tiene una distancia 4 veces la longitud de la distancia focal.

- Vértice: punto ubicado en el extremo de la parábola, dependiendo del signo de la ecuación puede ser el punto más alto cuando es negativo y más bajo cuando es positivo.



3.15 Aplicaciones

La parábola es una figura que podemos encontrar fácilmente en nuestro entorno, tiene una gran cantidad de aplicaciones en diferentes áreas de estudio como: la óptica, acústica, ingeniería, arquitectura, balística, telecomunicaciones entre otros; un ejemplo claro de ello son elementos estructurales como las bases de la Torre Eiffel, en algunas entradas antiguas e incluso algunos logos famosos de comidas rápidas como la cadena McDonald's.



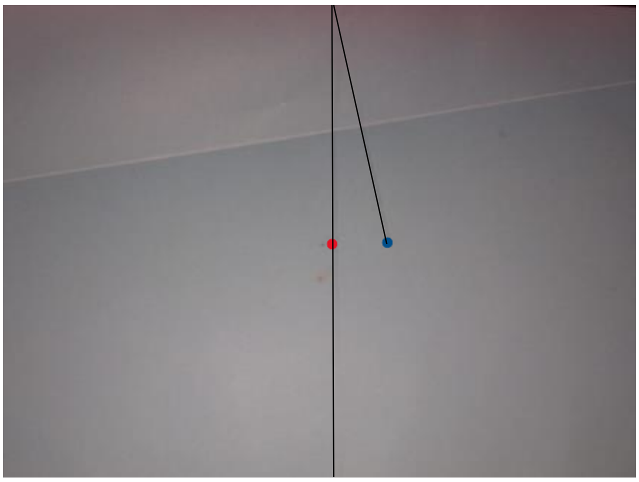
3.16 Actividad 5: Papiroflexia

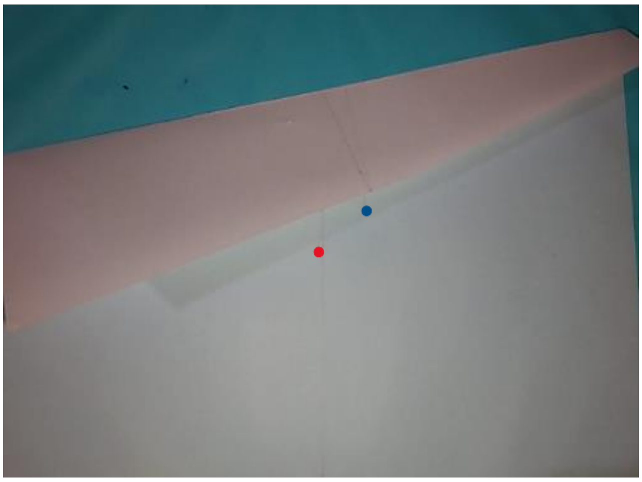
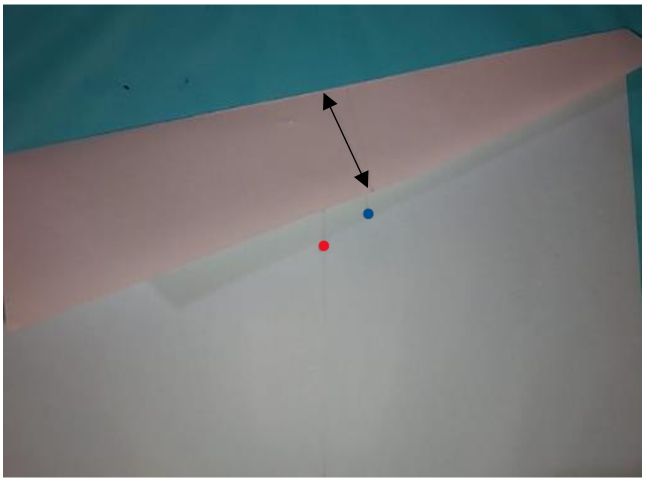
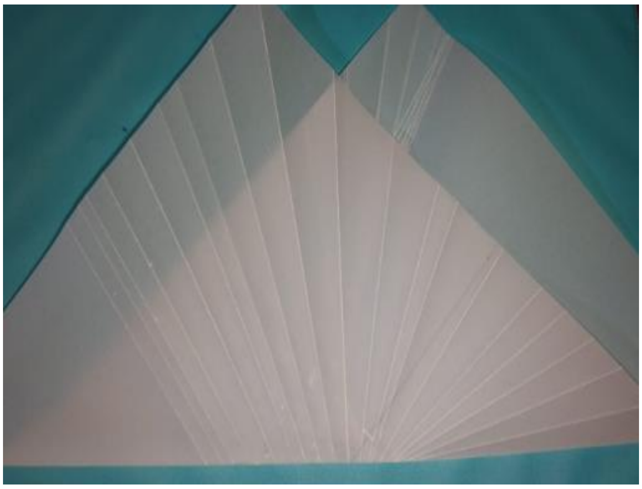
En este apartado realizaremos la construcción de la parábola a partir del arte de la papiroflexia, realizando dobleces en el papel calco o pergamino de tal manera que se marquen líneas tangenciales en cada una de las curvas.

3.16.1 Materiales

Para realizar esta actividad necesitaremos algunos materiales como son:

- 1 hoja de papel pergamino
- Compas
- Regla

PARÁBOLA		
N.º	**DESCRIPCIÓN**	**IMAGEN REFERENCIAL**
1	Para iniciar realizaremos un punto en el centro de la hoja y trazaremos una línea sobre ese punto (rojo), luego a dos centímetros marcaremos otro punto (azul), trazaremos una línea al borde de la hoja.	

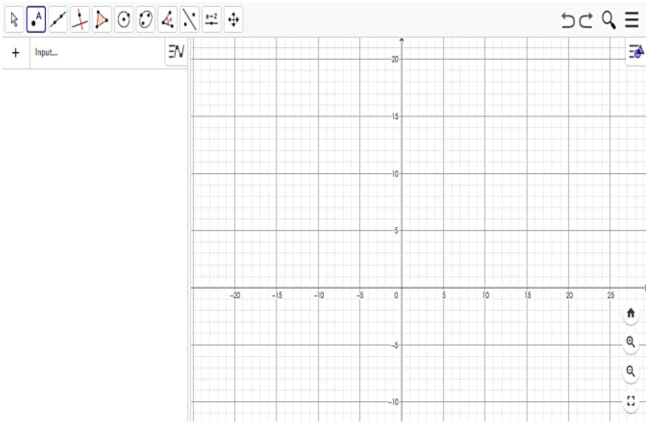
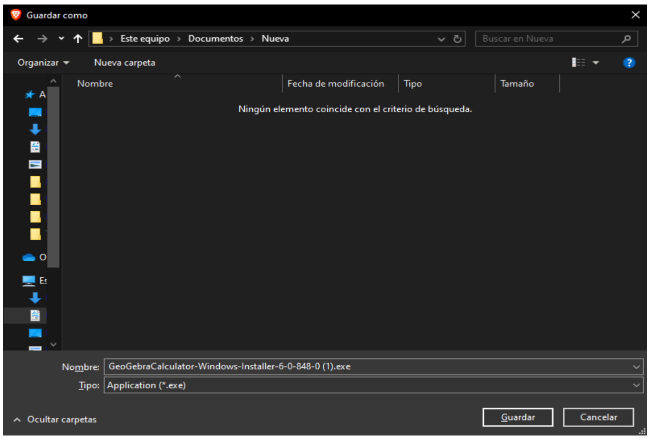
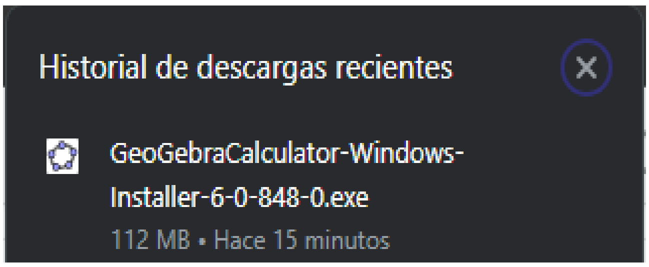
2	Doblaremos haciendo coincidir la intersección de la línea con el punto azul.	
3	Seguiremos realizando los dobleces recorriendo toda la línea marcada y esta a su vez es la línea que trazamos en primer lugar.	
4	Mientras sigamos avanzando se verá de esta manera.	

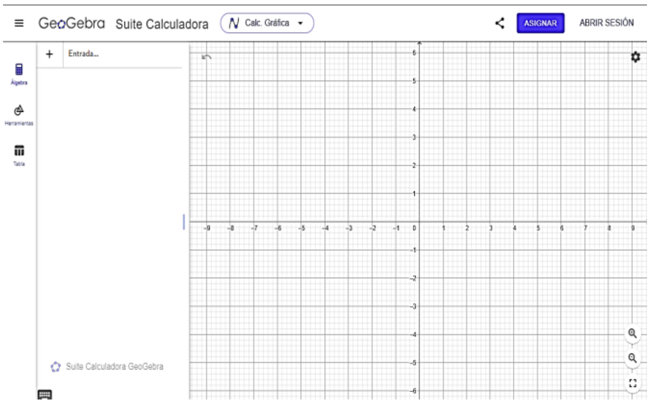
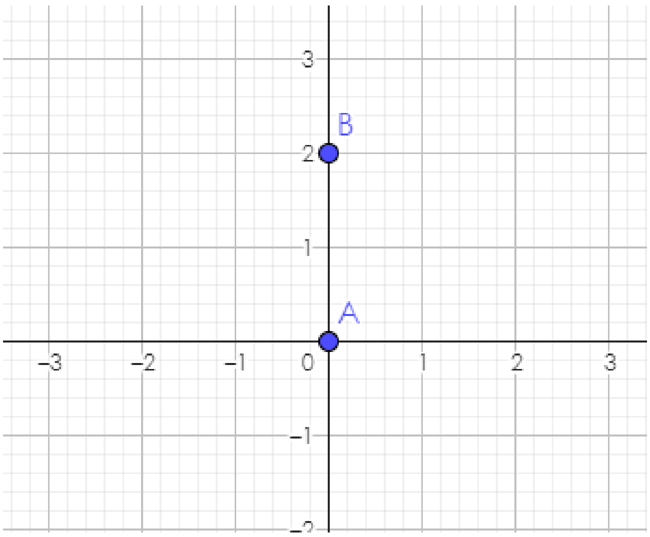
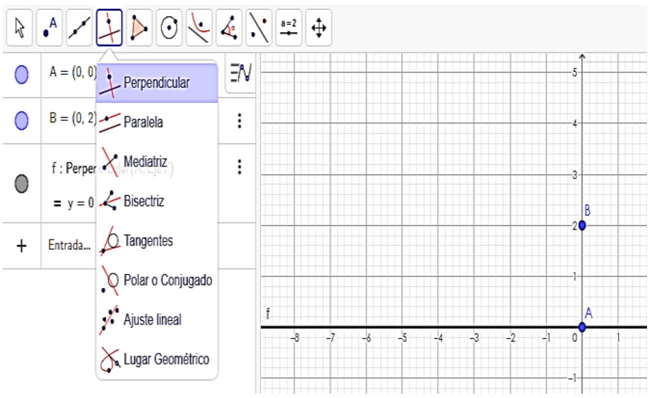
5	Finalmente, obtendremos el siguiente resultado.	

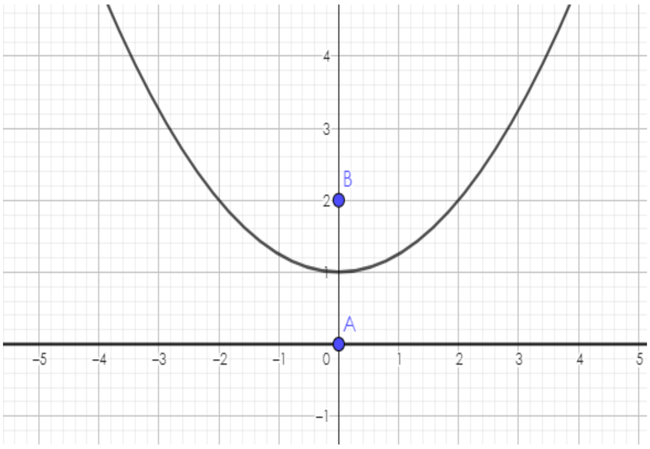
3.17

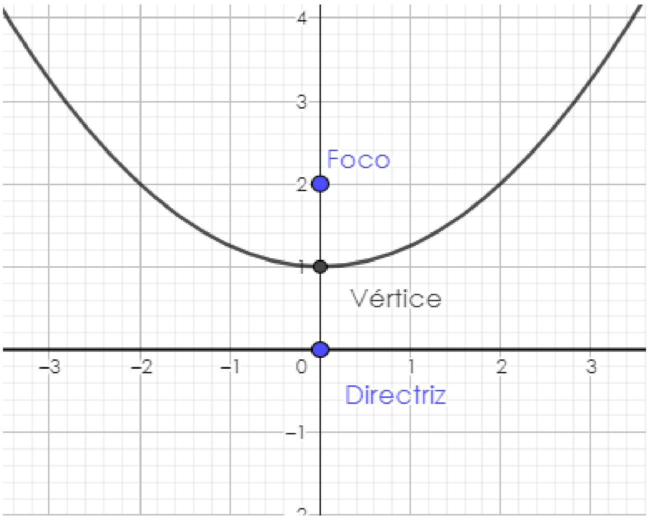
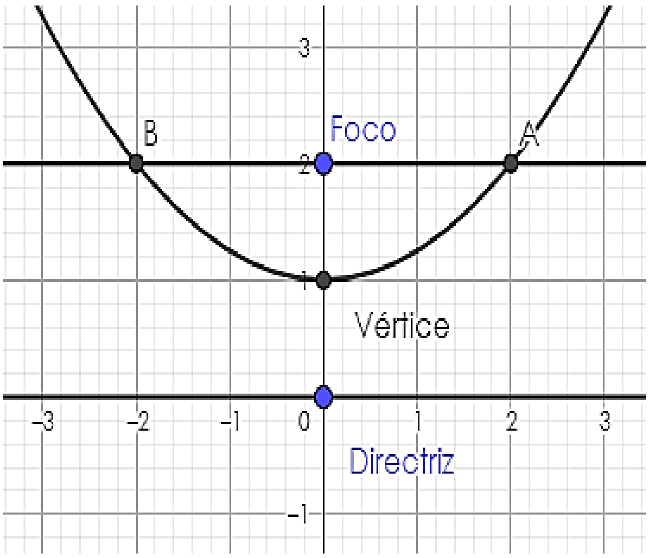
3.18 Actividad 6: GeoGebra

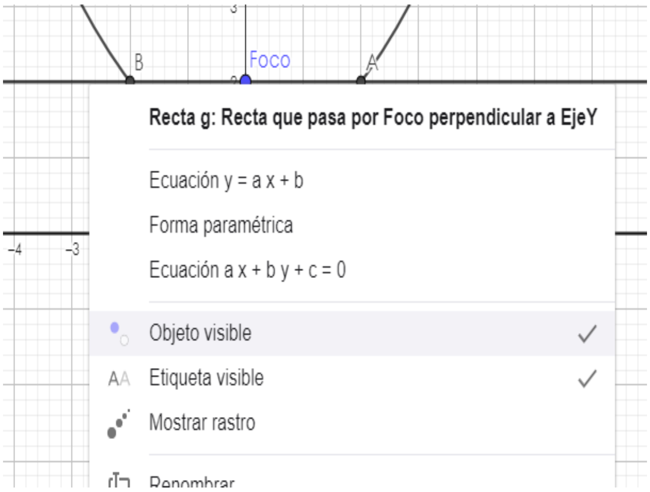
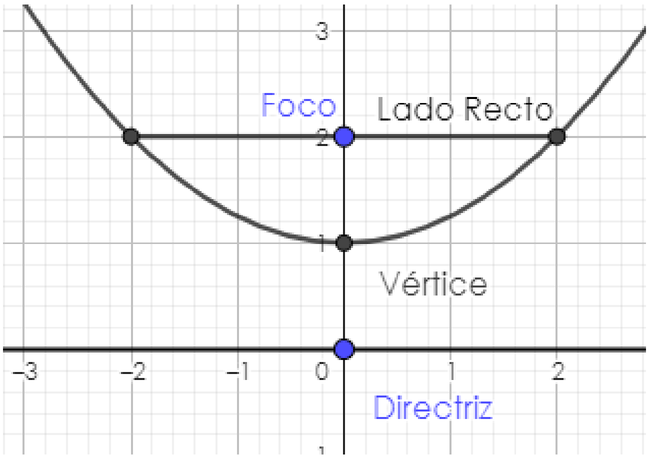
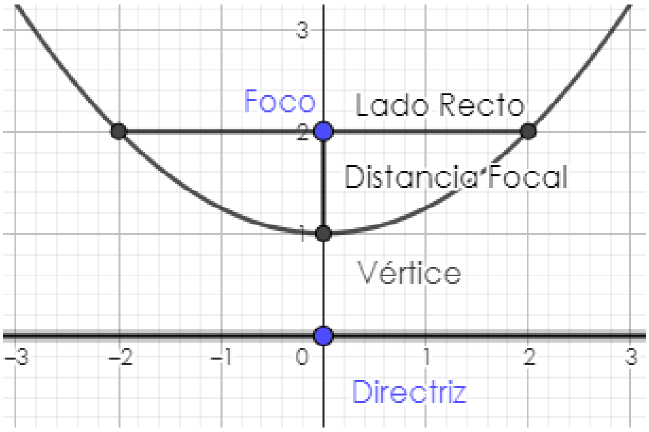
En el siguiente apartado se encuentran los pasos para la construcción de la parábola, así como identificación de cada uno de sus elementos mediante el uso del software GeoGebra.

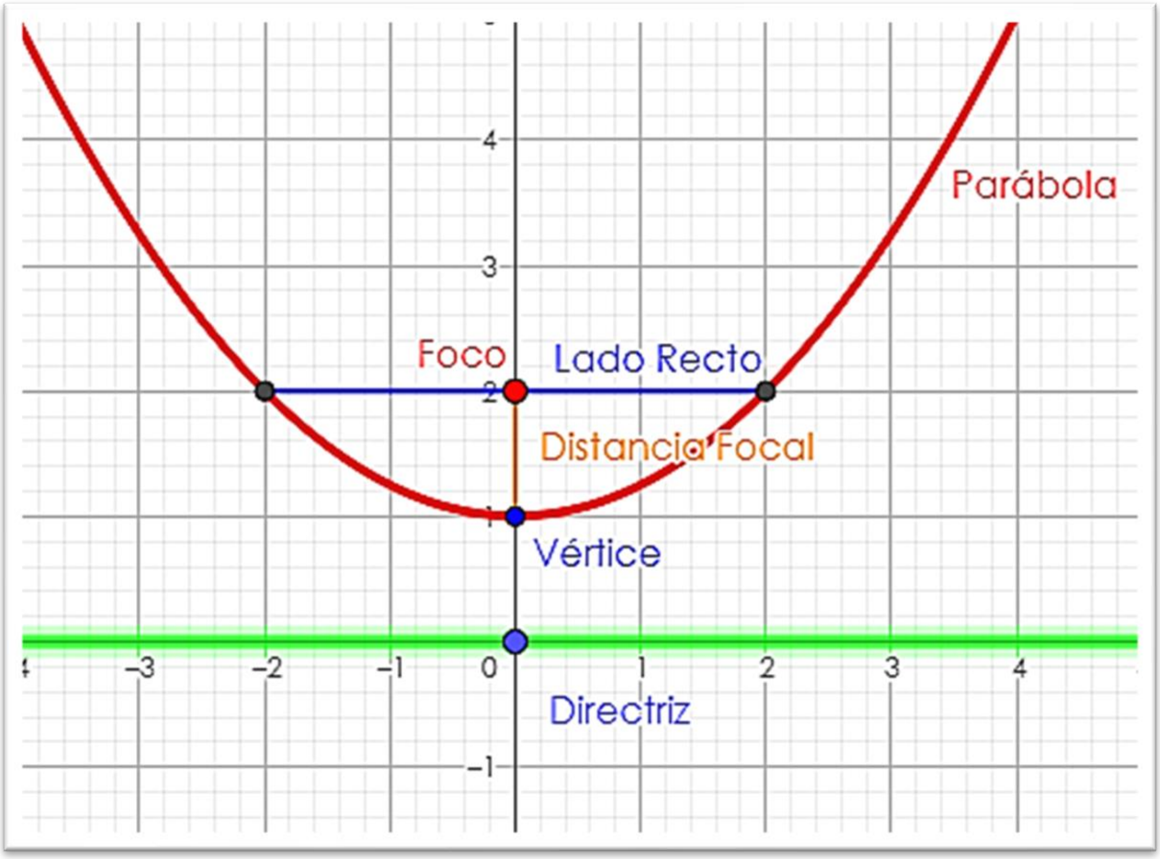
<table>
<tr><th colspan="3">PARÁBOLA</th></tr>
<tr><th>Paso</th><th>DESCRIPCIÓN</th><th>IMAGEN REFERENCIAL</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Procedemos a ingresar a GeoGebra mediante el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/classic?lang=es</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Si desea instalar en su ordenador ingrese al siguiente enlace, sino continue al paso 3: https://download.geogebra.org/package/win-suite</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>Una vez seleccionado el enlace se procederá a descargar el archivo y seleccione “Guardar”.</td><td>
</td></tr>
</table>

2.2	Cuando termine la descarga, seleccione el archivo y de doble clic y se instalará automáticamente creando un acceso en el escritorio.	
3	Empezaremos utilizando la opción “Punto” usada en casos anteriores o ingresando las coordenadas de dos puntos, serán por donde atraviesa la directriz y el foco.	
4	Ahora trazaremos una perpendicular, ubicada en la cuarta herramienta, y daremos clic en el eje “Y” y luego clic en el origen o cero	
5	Después seleccionaremos la séptima herramienta y elegiremos la opción “PARÁBOLA”.	

6	Daremos clic en el punto “B” y luego en el punto “A” y se formará la parábola. En el caso de contar con una ecuación cuadrática, puede agregarla en el cuadro de entrada.	

	ELEMENTOS	
7	Para encontrar el vértice de la parábola utilizaremos la opción intersección ubicada en la segunda herramienta y daremos clic en el eje “Y” y luego en la parábola	
8	Para trazar el lado recto, utilizaremos nuevamente la opción “PERPENDICULAR”, seleccionando el eje “Y”, luego dar clic en el foco y seguido usaremos la opción “INTERSECCIÓN”, para encontrar los puntos de corte.	

9	Una vez encontrado los puntos de corte daremos clic derecho en la perpendicular trazada y luego clic izquierdo en la opción “OBJETO VISIBLE”	
10	Luego usaremos la opción “SEGMENTO”, utilizada en pasos anteriores para unir los nuevos puntos de intersección y obtendremos el lado recto.	
11	Finalmente, con la misma opción utilizada anteriormente podemos trazar la distancia focal y dar y mejor diseño a nuestra gráfica.	

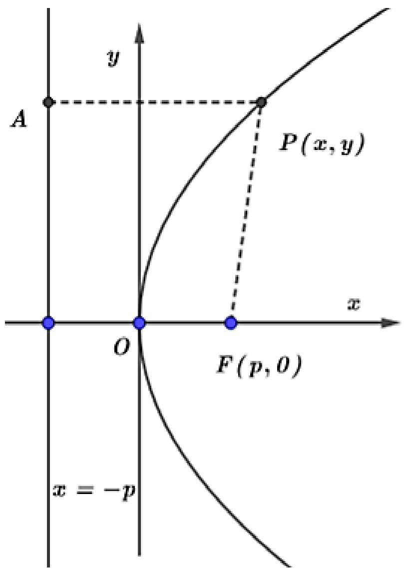


3.19 Demostración de ecuaciones de la parábola

3.19.1 Primera ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen y eje focal sobre el eje x

Analizando el gráfico plantearemos que el punto F está ubicado p unidades del vértice ubicado en el origen o punto O, entonces el foco tiene coordenadas $F(p, 0)$ y consecuentemente la directriz tendrá una abscisa $x = -p$.

Dado un punto P de coordenadas (x, y), se traza un segmento a un punto A perpendicular a la directriz, este debe cumplir la definición de parábola tal que $|\overline{FP}| = |\overline{FA}|$; utilizando la ecuación de distancia entre dos puntos obtenemos:



$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

Ahora obtendremos la distancia del segmento $|\overline{FA}|$, mediante la ecuación de distancia entre dos puntos de una recta:

$$|\overline{FA}| = |x + p|$$

Aplicando la condición geométrica de la parábola obtenemos la siguiente igualdad:

$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}|$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

Debemos despejar y mediante procesos matemáticos

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 = (|x+p|)^2$$

$$(x-p)^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

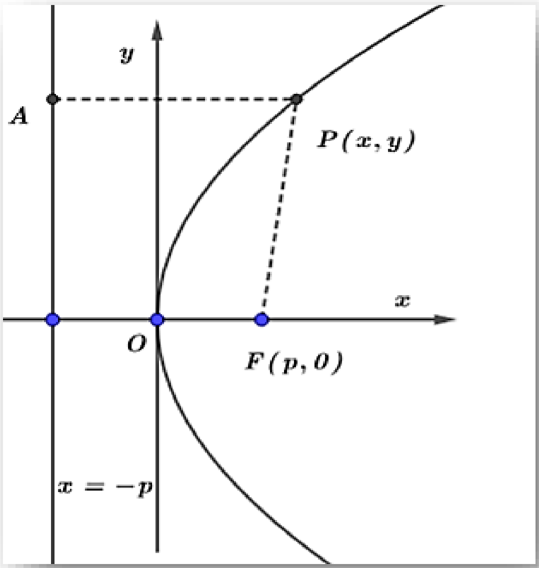
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$$y^2 = \cancel{x^2} + 2xp + \cancel{p^2} - \cancel{x^2} + 2px - \cancel{p^2}$$

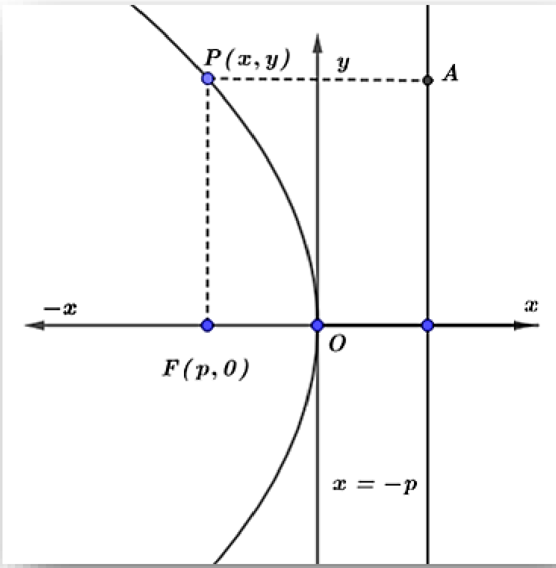
$$\boxed{\boldsymbol{y^2 = 4px}}$$

Una vez obtenida la ecuación ordinaria de la parábola es necesario mencionar que su abertura depende del valor de p.

$\boldsymbol{p > 0}$



$\boldsymbol{p < 0}$



Recordemos que el lado recto de una parábola es el segmento que interseca con el foco perpendicularmente al eje simétrico y tiene una longitud correspondiente a $|4p|$; considerando la ecuación $y^2 = 8x$, el coeficiente que acompaña a x sería el valor de 4p:

$$y^2 = 8x \rightarrow 8 = |4p|$$

Entonces la longitud del lado recto mide 8 unidades.

Ahora consideremos una parábola con vértice en el origen y eje simétrico paralelo a eje y; para este caso debemos considerar que el foco se encuentra sobre el eje y por lo tanto tiene coordenadas $F\ (0,p)$ y por consecuencia la ecuación de la directriz sería $y = -p$. Entonces si analizamos al igual que el caso anterior un punto P de coordenadas (x,y) y trazamos un segmento perpendicular a un punto A sobre la directriz la longitud del foco hacia P y de P hacia A será igual, es decir

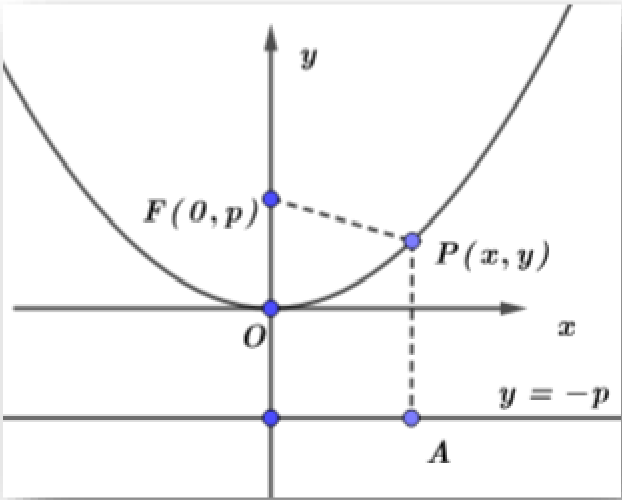
$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}|:$$

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$$

$$|\overline{FP}| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

Ahora obtendremos la distancia del segmento $|\overline{PA}|$, mediante la ecuación de distancia entre dos puntos de una recta:

$$|\overline{PA}| = |y + p|$$



Aplicando la condición geométrica de la parábola obtenemos la siguiente igualdad:

$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}|$$

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p|$$

Debemos despejar x mediante procesos matemáticos

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-p)^2}\right)^2 = (|y+p|)^2$$

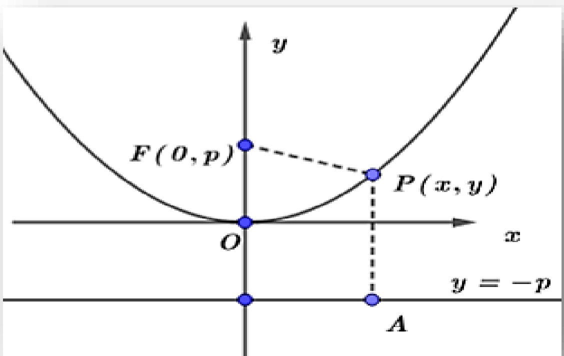
$$x^2 + (y-p)^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

$$x^2 = \cancel{y^2} + 2yp + \cancel{p^2} + 2py - \cancel{p^2} - \cancel{y^2}$$

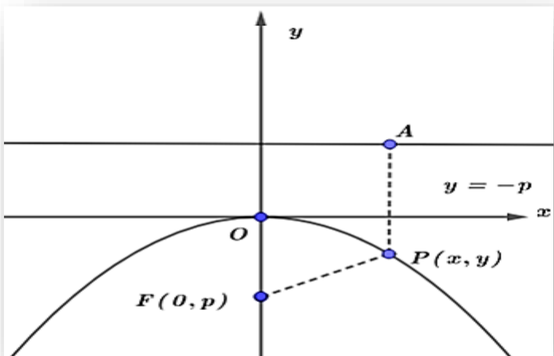
$$\boxed{\boldsymbol{x^2 = 4py}}$$

Al obtener la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría paralelo al eje y es necesario mencionar que su abertura depende del valor de p.

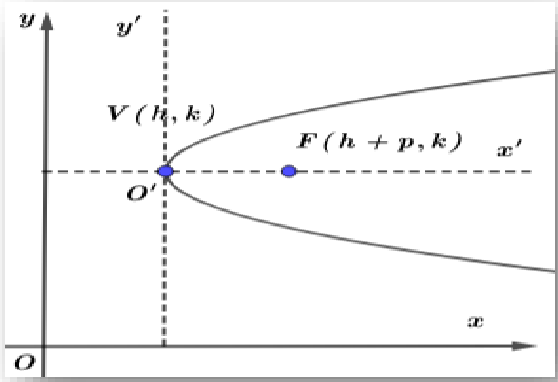
$\boldsymbol{p > 0}$



$\boldsymbol{p < 0}$



3.19.2 Segunda ecuación de la parábola con vértice fuera del origen y eje de simetría paralelo a uno de los ejes



Después de haber definido la primera ecuación de la parábola con vértice en el origen para este caso es necesario transportar los ejes a los nuevos puntos es decir que $O = O'$, por lo tanto, los nuevos ejes de referencia serán $x' e\ y'$, obteniendo una ecuación adaptada a estos casos:

$$y'^2 = 4px'$$

Al realizar estos cambios el centro u origen de coordenadas $O'(h, k)$ y un punto arbitrario P de coordenadas (x, y) serán $P\ (x', y')$, en este sentido es necesario tener en cuenta el desplazamiento obteniendo $(x = x' + h)$ y $(y = y' + k)$ y despejando las nuevas variables de ejes coordenados se obtiene:

$$\boldsymbol{x'} = x - h \quad \boldsymbol{y'} = y - k$$

Sustituyendo en la ecuación adaptada anteriormente obtenemos la segunda ecuación ordinaria:

$$y'^2 = 4px'$$

$$\boxed{\boldsymbol{(y - k)^2 = 4p(x - h)}}$$

Dado que los puntos y elementos se desplazaron, también es necesario definir las coordenadas del foco para una parábola con vértice fuera del origen y con eje simétrico paralelo al eje x

$$\boldsymbol{F\ (h + p, k)}$$

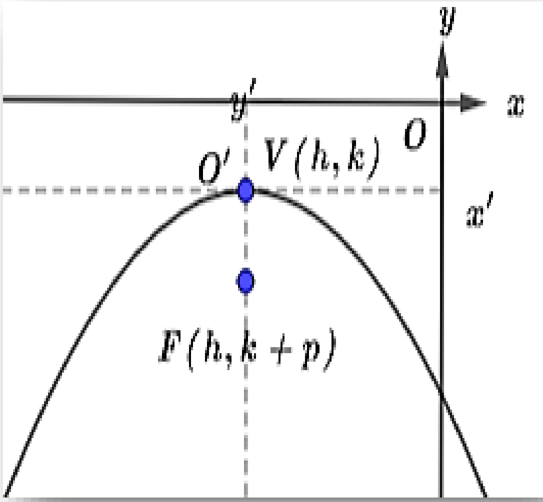
Por lo tanto, la ecuación de la directriz para este caso es:

$$\boldsymbol{x = h - p}$$

Al igual que en el primer caso es necesario establecer que el valor de p determina la abertura de la parábola, por lo tanto, $p > 0$ abre hacia la derecha y si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda, mientras que al tratarse de una parábola con eje simétrico paralelo al eje y, $p > 0$ indica una abertura hacia arriba y $p < 0$ una abertura hacia abajo. Para esta grafica es necesario realizar el mismo proceso de deducción transportando los ejes al nuevo origen y sustituyendo x' e y'obteniendo:

$$x'^2 = 4py'$$

$$\boxed{\boldsymbol{(x-h)^2 = 4p(y-k)}}$$



Mientras que la ecuación del foco y directriz para este caso son:

$$\boldsymbol{F(h, k+p)}$$

$$\boldsymbol{y = k - p}$$

3.19.3 Forma general de la ecuación de la parábola

Para definir la ecuación general de una parábola con vértice $V(h,k)$es necesario partir de la segunda ecuación ordinaria:

Forma horizontal	Forma vertical
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$	$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk$
$\boldsymbol{y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0}$	$\boldsymbol{x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk = 0}$

Una vez definidas es necesario presentarlas como una ecuación cuadrática general $(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0)$, realizando los siguientes cambios:

Forma horizontal: $A = 0, B = 0, C = 1, D = -4p, E = -2k, F = k^2 + 4ph$

Forma Vertical: $A = 1, B = 0, C = 0, D = -2h, E = -4p, F = h^2 + 4pk$

Al realizar los cambios obtenemos las ecuaciones generales de la parábola:

Parábola horizontal $\boldsymbol{Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$

Parábola vertical $\boldsymbol{Ax^2 + Dx + Ey + F = 0}$

3.20 Formulario de ecuaciones de la Parábola

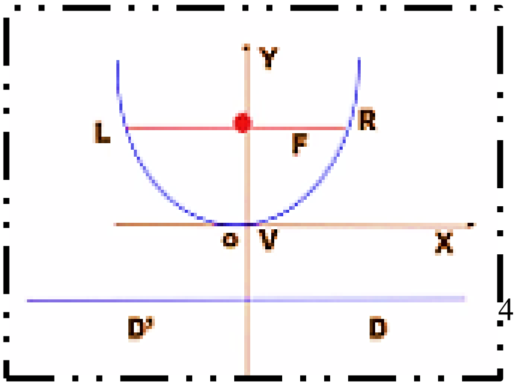
Nombre	Fórmula	Característica
Ecuación Ordinaria	$y^2 = 4px$	Parábola horizontal centro en el origen
Ecuación Ordinaria	$x^2 = 4py$	Parábola vertical centro en el origen
Ecuación ordinaria parábola horizontal	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	Vértice (h,k) Foco$(h+p,k)$ Directriz $x = h-p$
Ecuación ordinaria parábola vertical	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	Vértice (h,k) ; Foco$(h,k+p)$ Directriz y= $k-p$
Ecuación General	$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	Forma Horizontal
Ecuación General	$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$	Forma Vertical
Lado Recto	$LR = \|4p\|$	

3.21 Actividad 7: Ejercicios y Problemas

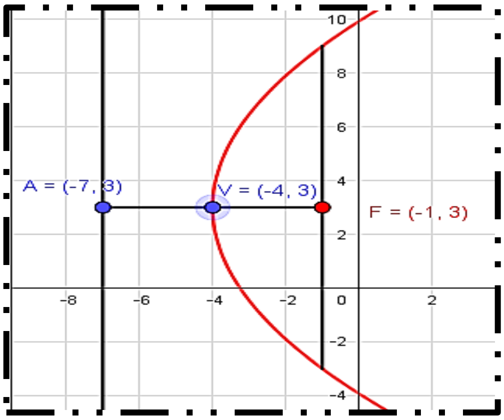
En este apartado encontraremos ejercicios, problemas y actividades relacionadas con el estudio de la parábola que complementarán los conocimientos adquiridos con diferentes niveles de dificultad denotados por una estrella (★) que potenciarán el aprendizaje, además estos pueden ser revisados y comprobados con el software GeoGebra fácilmente.

★Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de la parábola que se encuentra en el origen y tiene la siguiente ecuación $x^2 - 12y = 0$

Respuesta:
$x^2 = 12y \rightarrow se\ parece\ a\ x^2 = 4py$
$12 = 4p \rightarrow p = 3$
$Vértice\ (0,0)$
$Foco \rightarrow F(0,p) = (0,3)$
$Directriz\ = -p \rightarrow y = -3$
$Lado\ Recto\ LR = |4p| \rightarrow |4x3| = 12$



★Mediante la siguiente gráfica determine la ecuación ordinaria de la parábola



Respuesta:

$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{2}=\boldsymbol{4p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})$

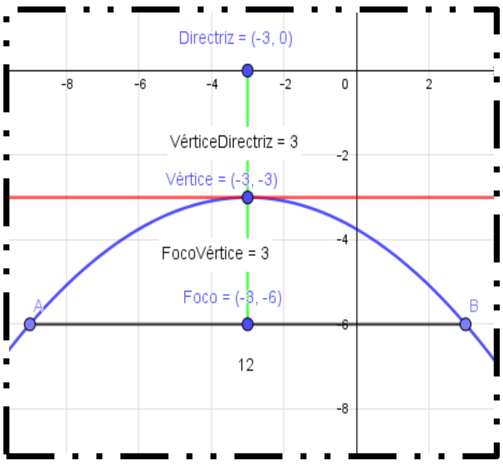
$(y-3)^{2}=4(3)(x-(-4))$

$(y-3)^{2}=12(x+4)$

$y^{2}-6y+9=12x+48$

$y^{2}-6y-12x-39=0$

★★Hallar las coordenadas del vértice, el parámetro, la longitud del lado recto de la parábola, el foco, la ecuación de la directriz. Use la Ec. Ordinaria de la parábola vertical. $(x-h)^{2}=4p(y-k)$



Respuesta:

$(x+3)^{2}=-12(y+3)$

$Vértice \rightarrow\ V=(-3,-3)$

$Parámetro\ \ 4p\ =-12\ =-3$

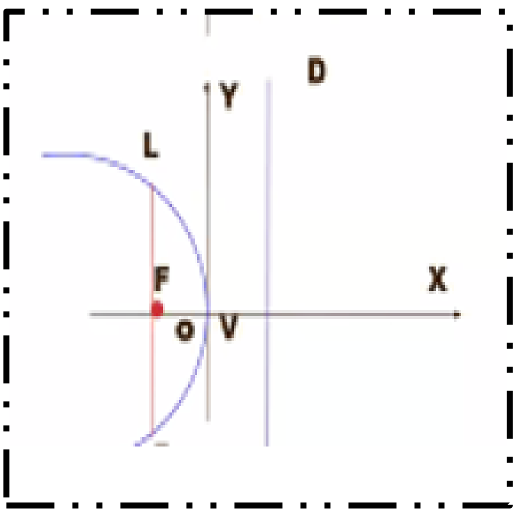
$Foco \rightarrow F(h,k+p) \rightarrow F(-3,-3-3)$

$F(-3,-6)$

$Lado\ Recto=|4p|=|4(-3)|\ =\ 12$

$Ec. Directriz\ \ y\ =\ k\ -\ p\ \ y\ =\ -3-(-3)\ \ \boldsymbol{y}\ =\ \mathbf{0}$

★★Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de la parábola con vértice en el origen y que pasa por el punto $P\ (-3,6)$



Respuesta:

$Vértice\ (0,0)$

$y^{2}=\ -4px \rightarrow (6)^{2}\ =\ 4\mathrm{p}(-3)$

$p=-3$

$Directriz\ =\ -p \rightarrow x=-(-3)$

$x=3$

$Lado\ Recto\ LR=|4p|$

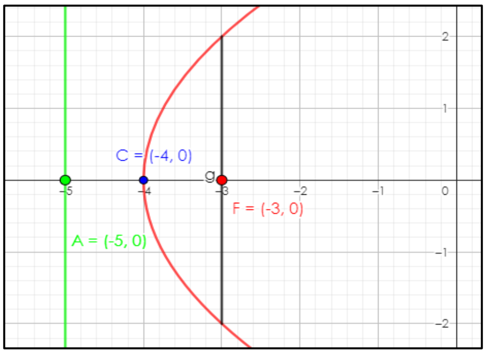
$|4x(-3)|=12$

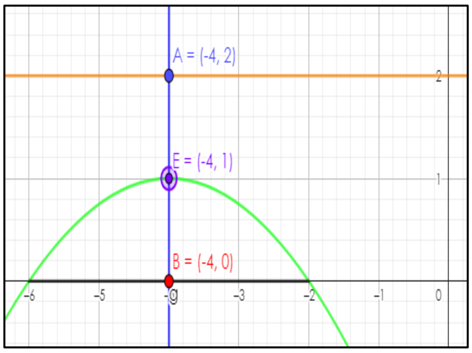
$Foco \rightarrow F(p,0)$

$F\ =(-3{,}0)$

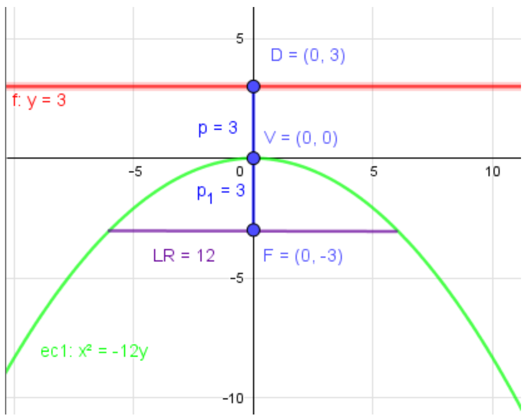
Ejercicios para desarrollar

1) ★Para diseñar un reflector parabólico, cuya parábola se encuentra en el origen y está dada por la ecuación $x^2 - 16y = 0$, halla las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para ajustar el diseño correctamente.
2) ★Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de la parábola que se encuentra en el origen y tiene la siguiente ecuación $x^2 + 24y = 0$
3) ★Mediante la siguiente gráfica determine la ecuación de la parábola





4) ★★Hallar las coordenadas del vértice, el parámetro, la longitud del lado recto de la parábola, el foco, la ecuación de la directriz. De la siguiente ecuación $(x+5)^2 = 4(y+3)$
5) ★★Para diseñar la trayectoria de una fuente de agua en un parque, cuya parábola está dada por la ecuación $(x-8)^2 = 2(y+5)$, determina las coordenadas del vértice, el parámetro, la longitud del lado recto, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz para ajustar el ángulo de salida del agua.
6) ★★La siguiente expresión corresponde a la ecuación de una parábola $x^2 + 12y = 0$, identifique y compruebe las coordenadas que contienen la gráfica.



UNIDAD IV

ELIPSE

4.1 Orígenes

El estudio de la elipse se remonta a la antigua Grecia, matemáticos, filósofos y geómetras dedicaron su vida al estudio de las cónicas y su aplicabilidad; personajes importantes como Menaechmus en el siglo IV a.C. y Apolonio de Perga en el siglo III a.C., formalizaron su estudio en sus obras “Secciones Cónicas” y “Conics”, descubriendo sus características y propiedades que aún hoy en día se aplican en la arquitectura, tecnología, ingeniería y óptica.

4.2 Cónica

Una cónica o sección cónica es una curva resultante de seccionar o cortar un cono con un plano en diferentes ángulos, dependiendo de la inclinación del corte obtendremos diferentes figuras como: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola que estudiaremos posteriormente realizando diferentes actividades y sus aplicaciones en la vida real.

4.3 Lugar geométrico

Resumiendo, conceptualizaremos el lugar geométrico como conjunto o grupo de puntos que cumplen una propiedad específica, para este caso en particular, el lugar geométrico de la elipse son todos los puntos que cumplen la condición para formar dicha cónica.

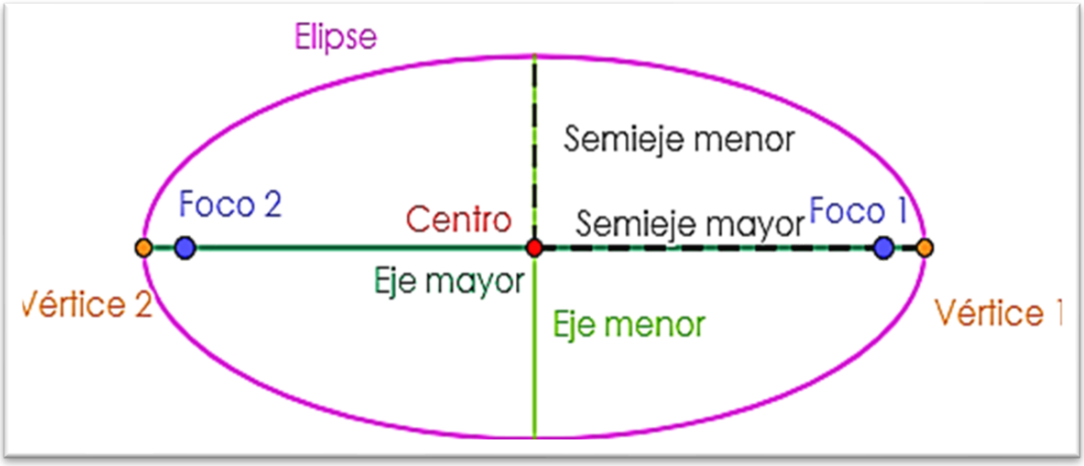
4.4 Elipse

Curva con forma de ovalo, resultando de seccionar un cono de forma diagonal con leve inclinación respecto a la horizontal. La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, es una constante igual a $2a$ y esa constante es mayor que la distancia entre los focos llamada $2c$ (Raichman, 2023).

En este sentido es importante mencionar las siguientes definiciones que podrían usarse regularmente al hablar de elipses:

- Eje mayor: segmento de recta que atraviesa los focos uniendo dos puntos de la elipse.
- Eje menor: segmento de recta que atraviesa verticalmente el centro uniendo dos puntos de la elipse.
- Centro: punto medio entre ambos focos y punto de intersección de los ejes mayor y menor
- Focos: puntos fijos internos de la elipse.
- Semieje: mitad del eje mayor o menor.
- Distancia focal: longitud desde el centro de la elipse a cualquiera de los focos.

- Vértices: puntos extremos de intersección del eje mayor con la elipse.
- Excentricidad: valor entre 0 y 1 que determina si es una circunferencia o una elipse.



4.5 Aplicaciones

Esta cónica es muy importante, nuestra vida sigue una forma elíptica, los planetas y demás astros siguen una trayectoria con forma de elipse alrededor del sol mientras avanza la vida; el futbol americano usa un balón con esta forma e incluso edificios como el "New Logic III" tiene una fachada lateral con forma de elipse

4.6 Actividad 8: Papiroflexia

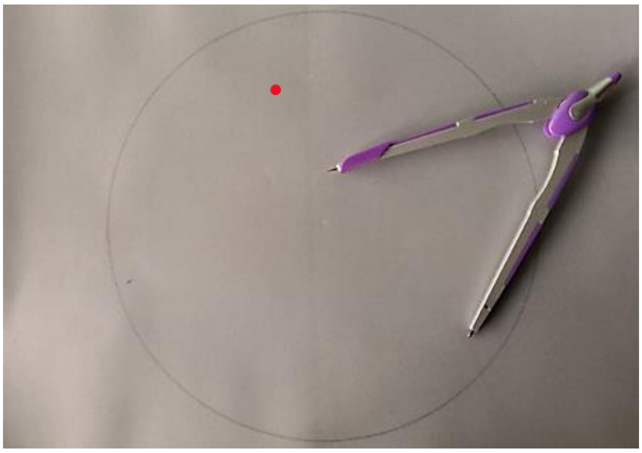
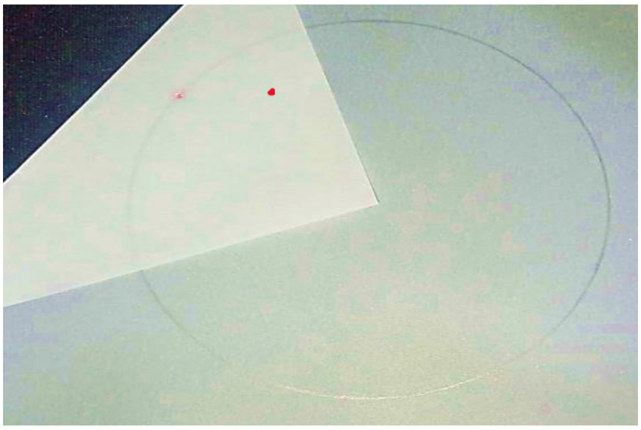
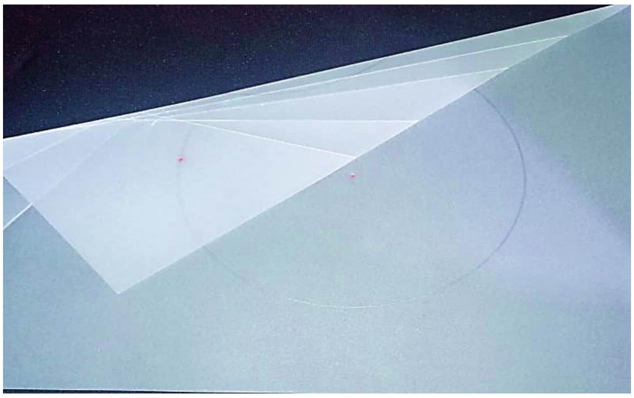
En este apartado realizaremos la construcción de la elipse a partir del arte de la papiroflexia, realizando dobleces en el papel calco o pergamino de tal manera que se marquen líneas tangenciales en cada una de las curvas.

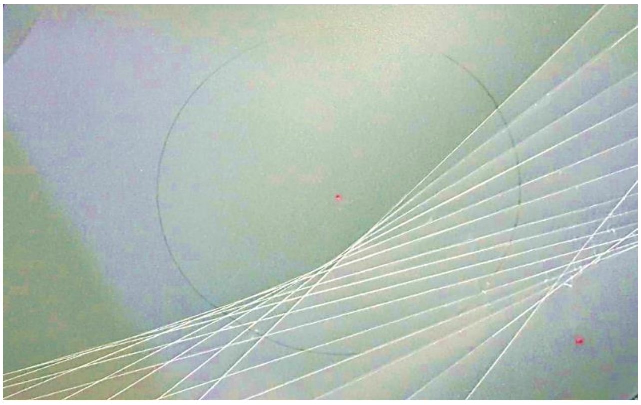
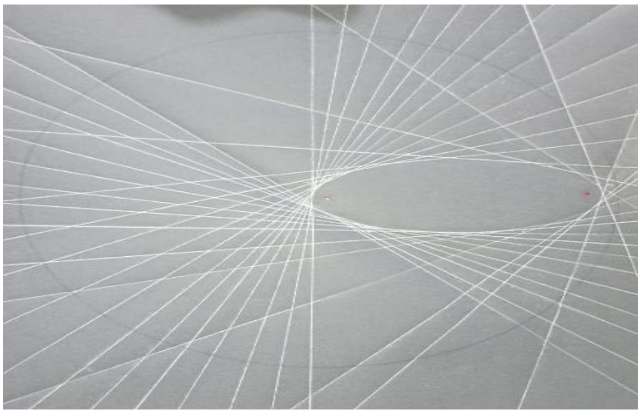
4.6.1 Materiales

Para realizar esta ejecución necesitaremos algunos materiales como son:

- 1 hoja de papel pergamino
- Compas

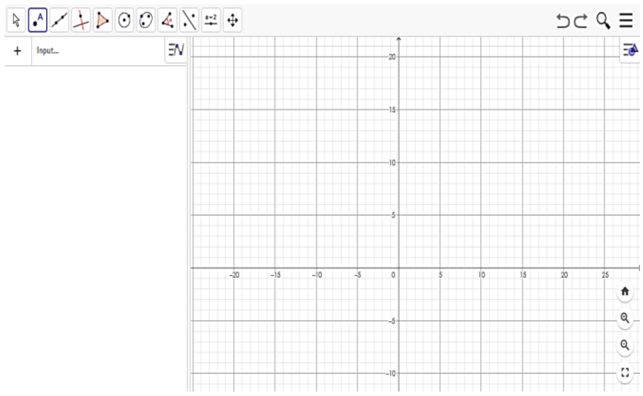
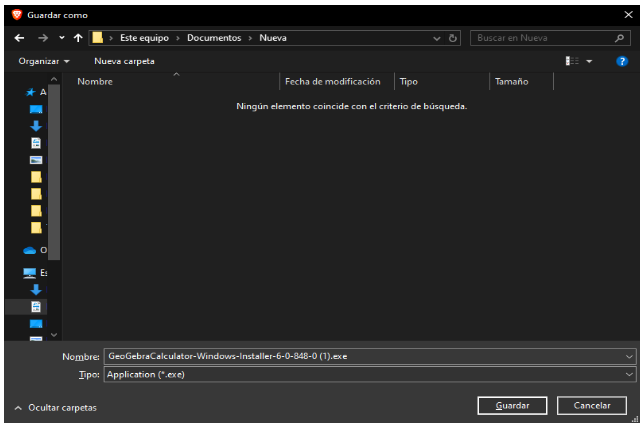
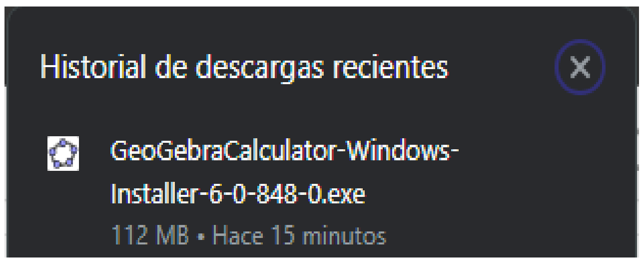
- Regla

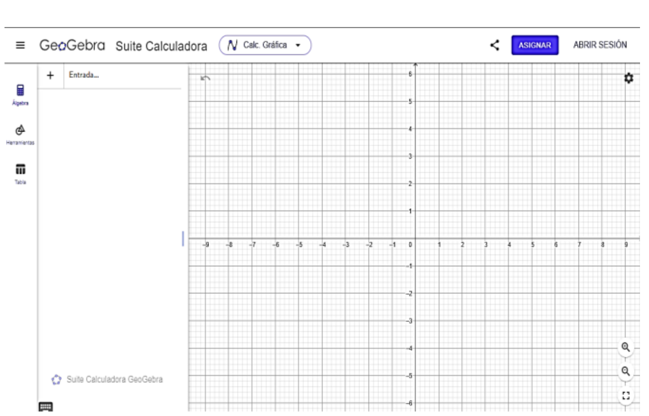
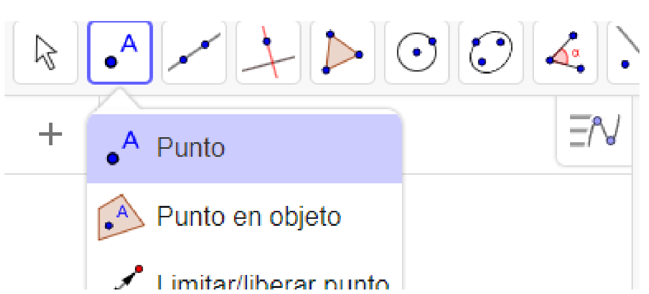
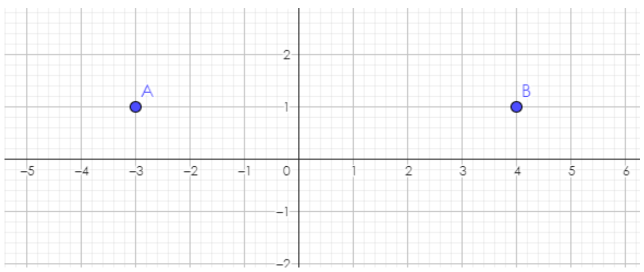
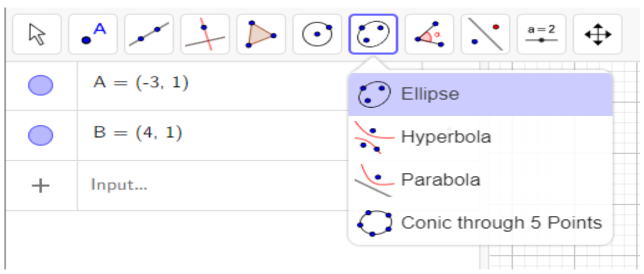
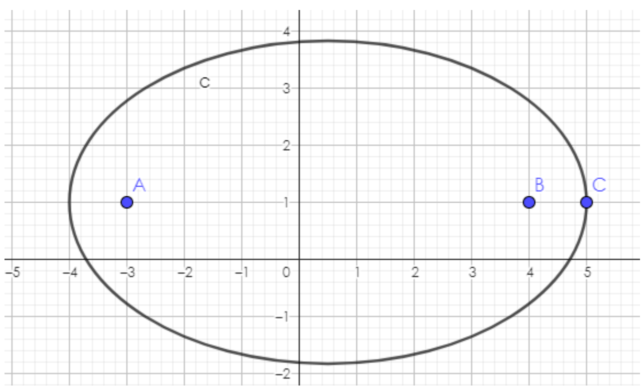
ELIPSE		
N.º	**DESCRIPCIÓN**	**IMAGEN REFERENCIAL**
1	Para iniciar realizamos una circunferencia con el compás, casi del tamaño total de la hoja y marcaremos un punto cerca del borde de la circunferencia.	
2	Luego doblaremos la hoja y haremos coincidir el punto rojo con el borde de la circunferencia, para visualizar de mejor manera marcaremos el punto a ambos lados.	
3	Seguiremos realizando los dobleces recorriendo toda la circunferencia	

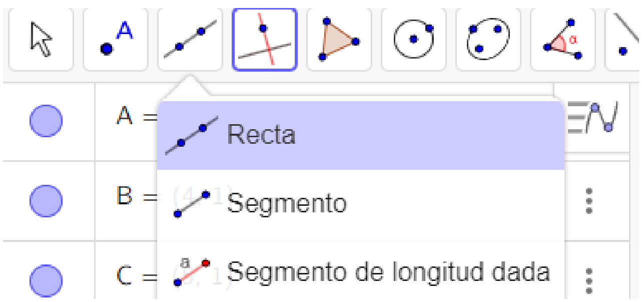
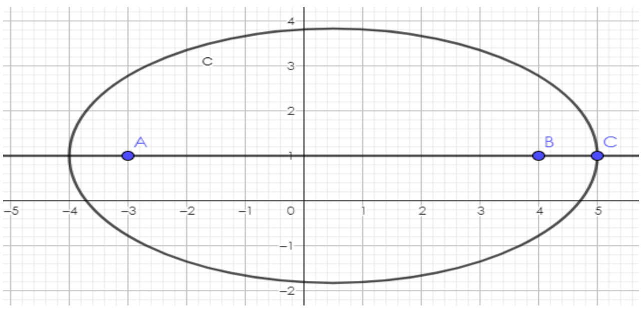
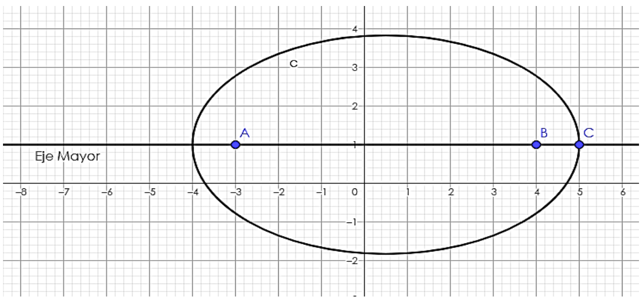
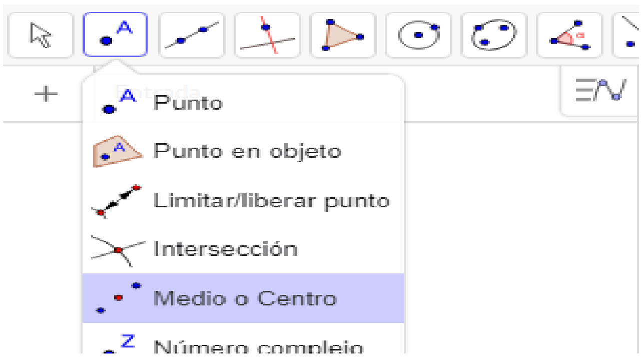
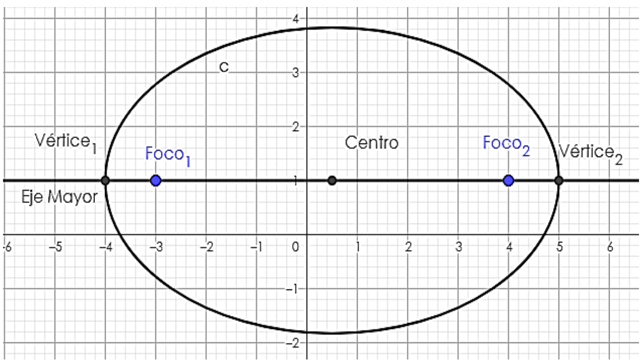
4	Mientras sigamos avanzando se verá de esta manera.	
5	Es importante que mientras más líneas tracemos se visualizará de mejor manera, sin embargo, esto debilitará el papel y puede llegar a romperse.	
6	Finalmente, luego de haber recorrido con el punto toda la circunferencia obtendremos la forma de la elipse y el punto que marcamos será un foco y el centro de la circunferencia donde asentamos el compás será el segundo foco.	

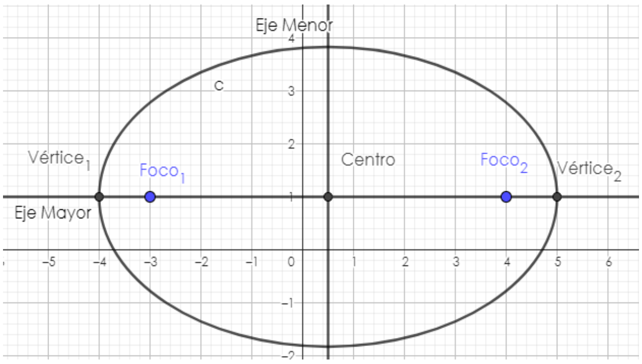
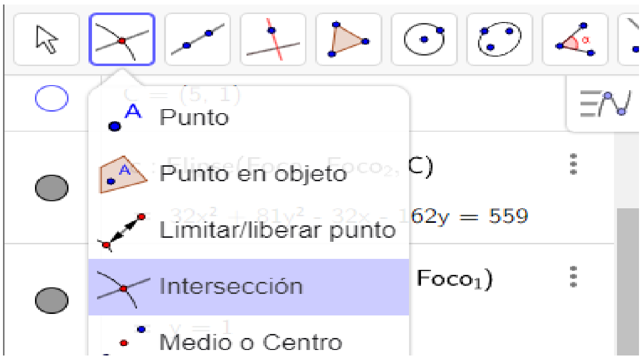
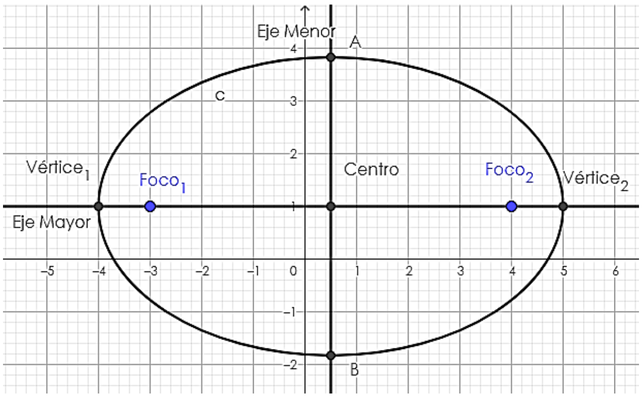
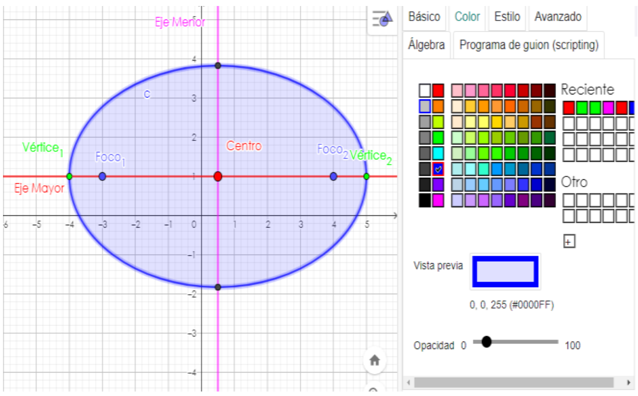
4.7 Actividad 9: GeoGebra

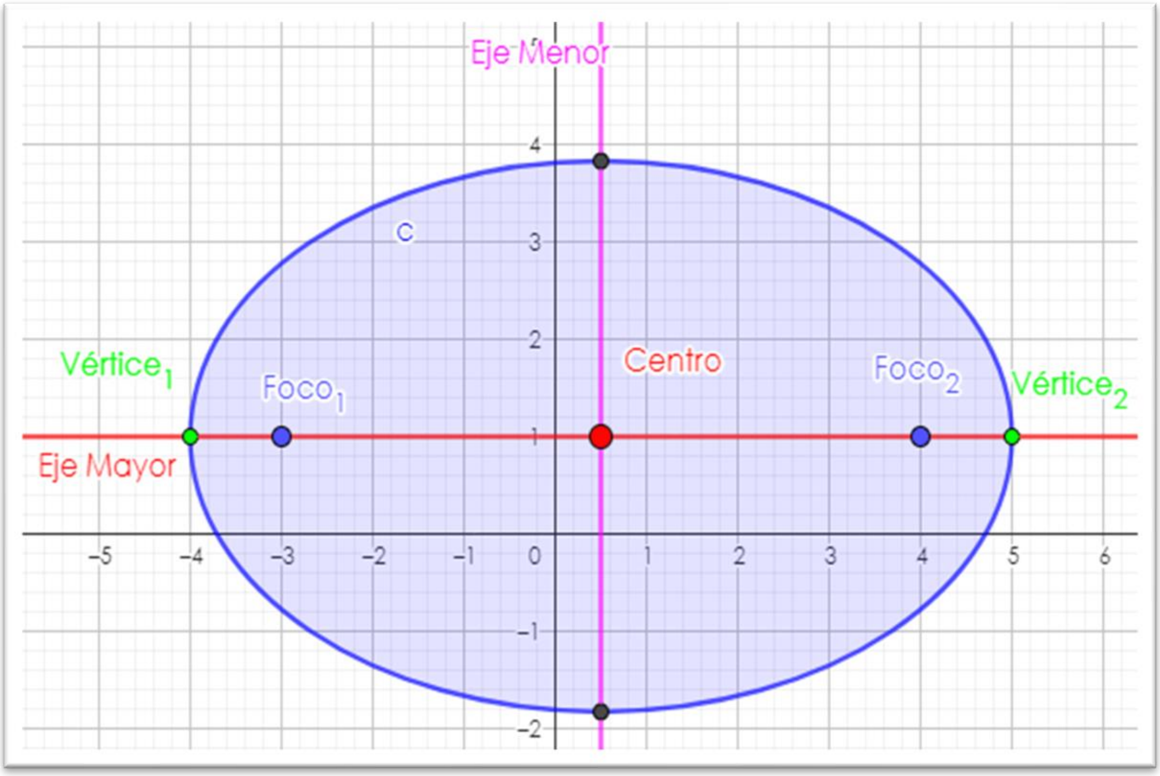
En el siguiente apartado se encuentran los pasos para la construcción de la elipse, así como identificación de cada uno de sus elementos mediante el uso del software GeoGebra.

ELIPSE		
Pasos	**DESCRIPCIÓN**	**IMAGEN REFERENCIAL**
1	Procedemos a ingresar a GeoGebra mediante el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/classic?lang=es	
2	Si desea instalar en su ordenador ingrese al siguiente enlace, sino continue al paso 3: https://download.geogebra.org/package/win-suite	
2.1	Una vez seleccionado el enlace se procederá a descargar el archivo y seleccione “Guardar”.	

2.2	Cuando termine la descarga, seleccione el archivo y de doble clic y se instalará automáticamente creando un acceso en el escritorio.	
3	Empezaremos creando los focos de la elipse, seleccionado la segunda herramienta sobre el cuadro de entrada dando clic en la opción “Punto”.	
4	Después de haber seleccionado la opción punto, realizaremos clic en dos lugares diferentes del plano.	
5	Luego seleccionaremos la séptima opción de la barra de herramientas y daremos clic en la opción elipse.	
6	Una vez seleccionado la opción daremos clic sobre el primer y segundo punto, luego desplazaremos el curso hasta obtener una elipse del tamaño requerido y daremos clic nuevamente. En el caso de contar con la ecuación de la elipse, puede agregarla en el cuadro de entrada.	

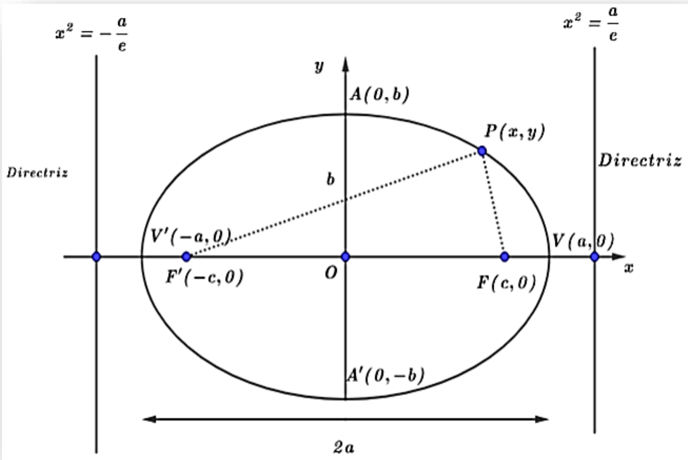
<table>
<tr><th colspan="3">ELEMENTOS</th></tr>
<tr><td>7</td><td>Para graficar el eje mayor, debemos seleccionar la tercera herramienta y dar clic cobre la opción “RECTA”</td><td>
</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Luego daremos clic sobre los dos focos de la elipse.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Como parte opcional podemos identificar con el respectivo nombre, dando clic derecho sobre el nuevo segmento creado y luego en la opción “Renombrar”</td><td>
</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Para encontrar el centro de la elipse seleccionaremos la segunda herramienta y daremos clic en la opción “Medio o Centro”</td><td>
</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Luego daremos clic en los dos focos y obtendremos el centro.</td><td>
</td></tr>
</table>

12	Para graficar el eje menor, seleccionaremos nuevamente la opción “PERPENDICULAR” en la cuarta herramienta, luego seleccionaremos el eje mayor y daremos clic en el centro.	
13	Para encontrar las intersecciones de las líneas con la elipse, seleccionaremos la segunda herramienta y daremos clic en la opción “INTERSECCIÓN”	
14	Luego seleccionaremos la elipse y el eje menor.	
15	Finalmente podemos mejorar el diseño en la opción propiedades, seleccionando cada elemento y la opción color.	



4.8 Demostraciones y ecuaciones de la Elipse

4.8.1 Ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal sobre eje x o forma canónica



Para este caso analizaremos una elipse con centro en el origen entonces el punto O es el punto medio del segmento $|\overline{FF'}|$ entonces sus coordenadas serían $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ respectivamente. Para satisfacer la definición geométrica de elipse analizaremos un punto $P(x, y)$ sobre la cónica donde la suma de la distancia de los segmentos $|\overline{FP}|$y $|\overline{F'P}|$ debe ser $2a$, siendo a mayor que c y equivalente al semieje mayor de la elipse.

Empezaremos utilizando la ecuación de distancia entre puntos para los segmentos $|\overline{FP}|$y $|\overline{F'P}|$.

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left|\overline{F'P}\right| = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Entonces cumpliendo la condición $|\overline{FP}| + \left|\overline{F'P}\right| = 2a$.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Realizaremos procedimientos algebraicos obtenemos la siguiente expresión:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} \cancel{- x^2} - 2cx - \cancel{c^2} - \cancel{y^2} - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Seguiremos operando hasta tener una expresión más simplificada

$$-cx - a^2 = -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(cx + a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2[(x+c)^2 + y^2]$$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 \cancel{+ 2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 \cancel{+ 2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Previamente se estableció que $a > c$, entonces al realizar la sustracción del paréntesis $a^2 - c^2$, obtendremos un valor positivo denominado b^2

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Sustituyendo esta igualdad en la expresión y simplificando algunas variables obtenemos la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen:

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}}$$

Analizando la gráfica presentada anteriormente podemos deducir que los vértices que intersecan al eje x tienen coordenadas, $V(a,0)$ y $V'(-a,0)$ y las intersecciones con el eje y o eje mejor serían $A(0,b)$ y $A'(0,-b)$ teniendo como longitud $2b$. Otro factor es la excentricidad, se define como la razón de la semidistancia focal (c) al semieje mayor (a), es representado por e y su ecuación es $e = \frac{c}{a}$ partiendo de la definición de b.

$$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

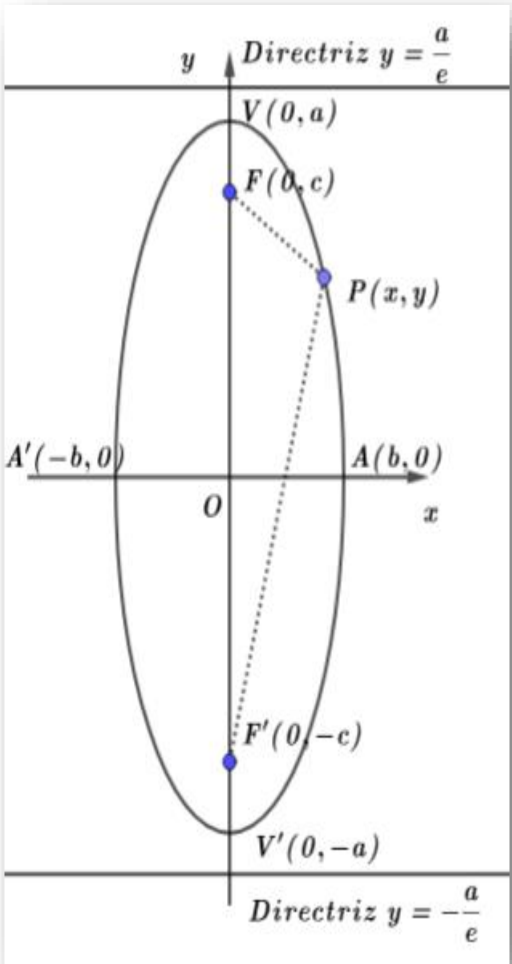
$$\boldsymbol{e}\sqrt{a^2 + b^2}\,\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}}{\boldsymbol{a}}$$

Dado que $c < a$ la excentricidad de la elipse tiene valores menores que la unidad y para este caso donde el eje focal esta sobre el eje x las ecuaciones de la directriz son:

$$x = \frac{a}{e}\ ;\ x = -\frac{a}{e}$$

Para el siguiente caso consideraremos una elipse con eje mayor sobre el eje y y centro en el origen, al igual que el caso anterior tomaremos un punto P de coordenadas (x,y) donde demostraremos que la suma de los segmentos $|\overline{FP}|\ y\ |\overline{F'P}|$es igual a $2a$ y al aplicar el mismo procedimiento anterior obtenemos la siguiente ecuación para una parábola con centro en el origen y eje mayor o focal ubicado sobre el eje y

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{b^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{a^2}} = \mathbf{1}}$$



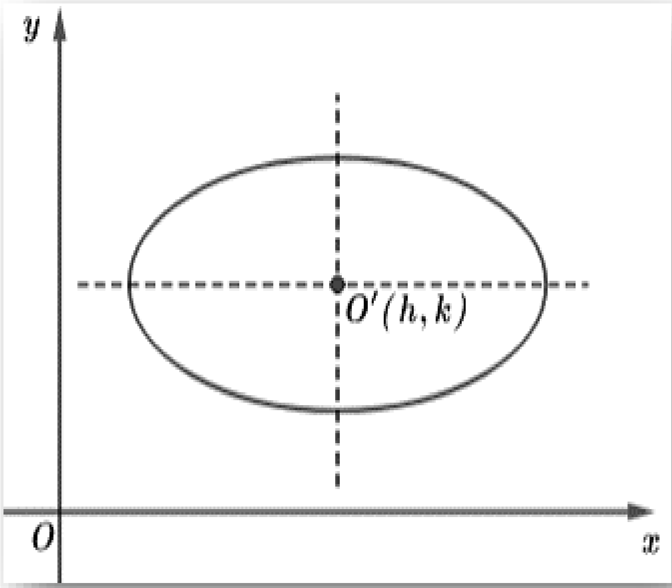
Sus vértices V y V' tienen coordenadas $(0,a)$ y $(0,-a)$ respectivamente y como el caso anterior el eje mayor tiene longitud $2a$, las intersecciones con el eje x con los puntos A y A' tienen coordenadas $(b,0)$ y $(-b,0)$ respectivamente y la excentricidad se define como:

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{a^2 - b^2}}}{\boldsymbol{a}}$$

4.8.2 Ecuación de la elipse con centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje x o segunda ecuación ordinaria

Para este caso debemos determinar la ecuación de una elipse con centro fuera del origen de coordenadas (h, k), con un eje focal paralelo al eje de las abscisas e igual al caso anterior el eje mayor tiene longitud $2a$ y el menor $2b$, por lo tanto, debemos transportar los ejes del sistema coordenado para que el origen O coincida con O' y de la misma manera transportaremos un punto P de coordenada (x, y) a (x', y'), además debemos realizar el respectivo cambio de variables en la ecuación canónica:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$



Por lo tanto, el nuevo sistema de coordenadas será:

$$x = x' + h \rightarrow \boldsymbol{x' = x - h}$$

$$y = y' + k \rightarrow \boldsymbol{y' = y - k}$$

Estas transformaciones debemos reemplazarlas en la forma canónica presentada anteriormente obteniendo la segunda ecuación ordinaria de la elipse:

$$\boldsymbol{\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1}$$

De igual manera transportamos los focos de la elipse a nuevas coordenadas obteniendo:

$$F(h + c, k)\,;F'(h - c, k)$$

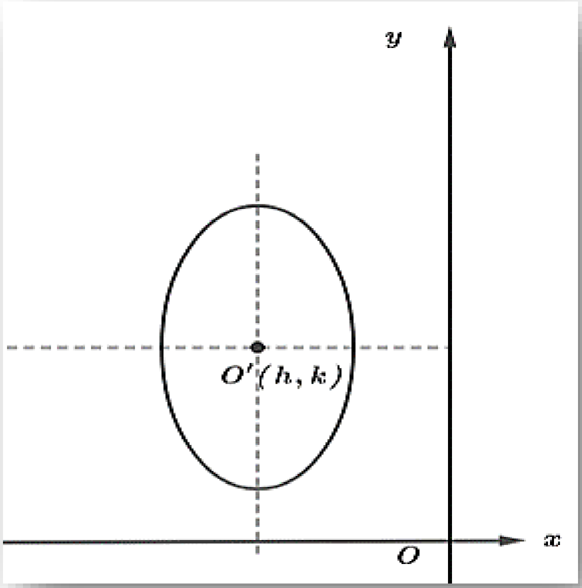
Las nuevas coordenadas de los vértices serán: $V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$ y finalmente los extremos del eje menor tendrán los puntos $A(h, k + b)$ y $A'(h, k - b)$.

Analizando la siguiente elipse con centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje y, igual que el caso anterior transportaremos los ejes coordenados haciendo coincidir el origen O con O', para establecer la nueva ecuación de este caso particular, debemos partir de la ecuación de elipses verticales y cambiar sus variables (x, y) a (x', y'):

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$$

Utilizaremos el mismo sistema de coordenadas planteado en elipses horizontales y reemplazaremos en esta ecuación:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}$$



Al tratarse de una elipse vertical concentro fuera del origen y eje focal paralelo al eje y, los nuevos focos serán:

$$F(h, k+c)\,;F'(h, k-c)$$

Por lo tanto, las coordenadas de los vértices son $V(h, k+a)$ y $V'(h, k-a)$, además los extremos tendrán puntos $A(h+b, k)$ y $A'(h-b, k)$

4.8.3 Ecuación general de la elipse

Para definir una ecuación general de la elipse debemos partir de la segunda forma ordinaria y desarrollar los binomios hasta obtener una expresión algebraica.

Forma horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2(x^2 - 2xh + h^2) + a^2(y^2 - 2yk + k^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2xh + h^2b^2 + a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Forma vertical

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{a^2(x-h)^2 + b^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$

$$a^2(x^2 - 2xh + h^2) + b^2(y^2 - 2yk + k^2) = a^2b^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xh + h^2a^2 + b^2y^2 - 2b^2yk + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Luego de haber obtenido las expresiones algebraicas es necesario reemplazar por las siguientes igualdades:

Forma horizontal $A = b^2; C = a^2; D = -2b^2h; E = -2a^2k; F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$ sustituyendo obtenemos la ecuación general de la elipse con eje focal paralelo al eje x:

$$\boxed{\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}}$$

Forma vertical $A = a^2; C = b^2; D = -2a^2h; E = -2b^2k; F = a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$ sustituyendo obtenemos la ecuación general de la elipse con eje focal paralelo al eje y:

$$\boxed{\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}}$$

4.9 Formulario de ecuaciones de la Elipse

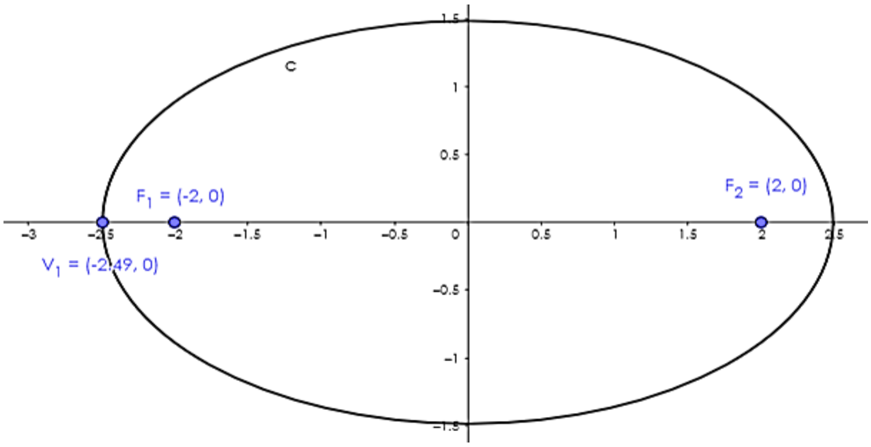
Nombre	Fórmula	Característica
Centrada en el origen	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a \rightarrow$ semieje mayor $b \rightarrow$ semieje menor
Con centro en (h, k)	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$a \rightarrow$ semieje mayor $b \rightarrow$ semieje menor
Longitud del eje mayor	$Eje\ mayor = 2a$	Horizontal o Vertical
Longitud del eje menor	$Eje\ menor = 2b$	Horizontal o vertical
Distancia focal	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	Desde el centro al foco
Excentricidad	$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \pm b^2}}{a}$	$+ \rightarrow elipse\ horizontal$ $- \rightarrow elipse\ vertical$
	Vértices con centro $(0,0)$	
Eje mayor horizontal	$V = (\pm a, 0)$	Sobre el eje “x”
Eje mayor vertical	$V = (0, \pm a)$	Sobre el eje “y”
	Vértices con centro (h, k)	
Eje mayor horizontal	$V = (h \pm a, k)$	Sobre el eje “x”
Eje mayor vertical	$V = (h, k \pm a)$	Sobre el eje “y”

	Focos con centro en el origen	
Eje mayor horizontal	$F = (\pm c, 0)$	Sobre el eje “x”
Eje mayor vertical	$F = (0, \pm c)$	Sobre el eje “y”
	Focos con centro (h, k)	
Eje mayor horizontal	$F = (h \pm c, k)$	Sobre el eje “x”
Eje mayor vertical	$F = (h, k \pm c)$	Sobre el eje “y”
	Directrices	
Eje mayor horizontal	$x = \pm \frac{a}{e}$	Sobre el eje “x”
Eje mayor vertical	$y = \pm \frac{a}{e}$	Sobre el eje “y”

4.10 Actividad 10: Ejercicios y Problemas

En este apartado encontraremos ejercicios problemas y actividades relacionado con el estudio de la elipse que complementarán los conocimientos adquiridos con diferentes niveles de dificultad denotados por una estrella (★) que potenciarán el aprendizaje, además estos pueden ser revisados y comprobados con el software GeoGebra fácilmente.

★Con la siguiente gráfica, identifique los puntos de intersección y elementos que se visualizan.



$V = (\pm 2.5, 0)$

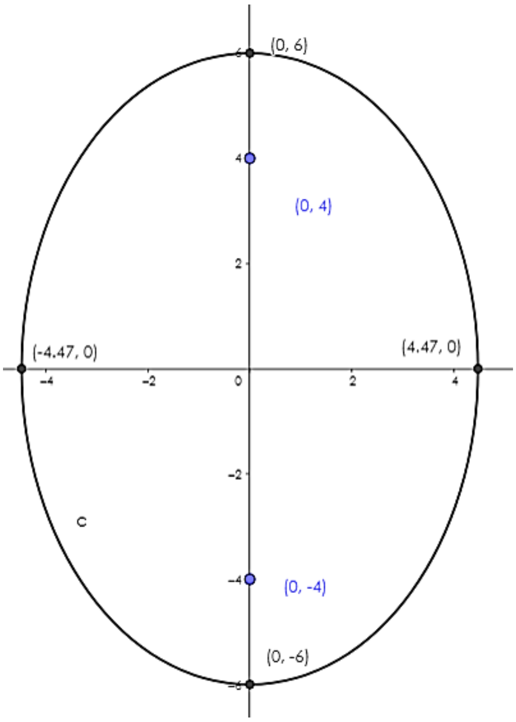
$C_v = (0, \pm 1.5)$

$C = (0,0)$

$F_1 = (-2,0)$

$F_2 = (2,0)$

★Con la siguiente gráfica, identifique los puntos de intersección y elementos que se visualizan.



$V = (0, \pm 6)$

$C_v = (\pm 4.47{,}0)$

$C = (0{,}0)$

$F_1 = (0{,}4)$

$F_2 = (0, -4)$

★★La siguiente expresión es la ecuación de la elipse con centro en el origen, identifique las coordenadas de los vértices, covértices y los focos. $16x^2 + 25y^2 = 400$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow Debemos\ llegar\ a\ esta\ expresión$

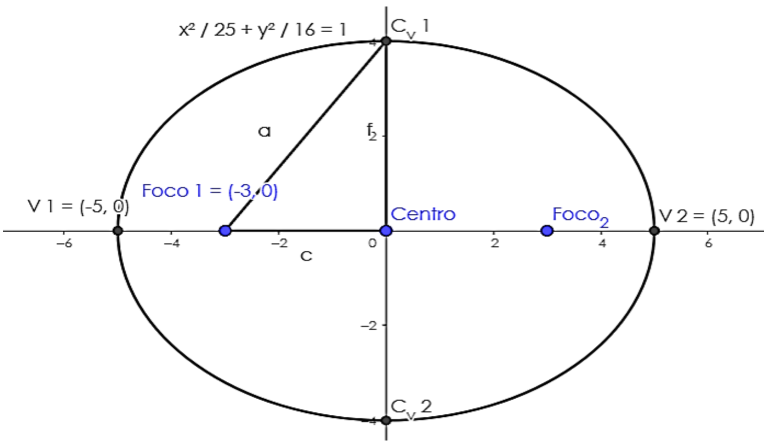
$16x^2 + 25y^2 = 400$

$\frac{16}{400}x^2 + \frac{25}{400}y^2 = \frac{400}{400}$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$Como\ está\ en\ el\ origen$

$C = (0{,}0)$



Vértices $V = (\pm a, 0) \rightarrow$
$V_1 = (-5{,}0); V_2 = (5{,}0)$

Covértices $Cv = (0, \pm b)$

$Cv_1 = (0{,}4); Cv_2 = (0, -4)$

$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} \rightarrow c = \pm 3$

$Focos = (\pm c, 0) \rightarrow F_1(-3{,}0); F(3{,}0)$

★★Para diseñar un reloj elíptico con el centro en el origen, dada la ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$, identifica las coordenadas de los vértices, covértices y focos del reloj.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow Debemos\ llegar\ a\ esta\ expresión$

$\frac{9}{36}x^2 + \frac{4}{36}y^2 = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$Como\ está\ en\ el\ origen\ y\ el\ denominador\ del\ segundo\ término\ es\ mayor, es\ una\ elipse\ vertical$

$C = (0,0)$

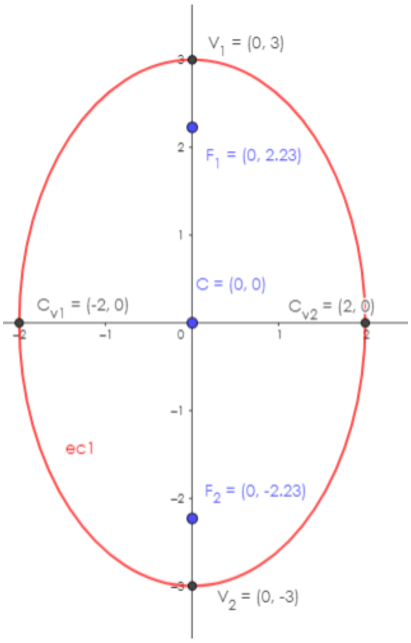
Vértices $V = (0, \pm b) \rightarrow V_1 = (0,3); V_2 = (0,-3)$

Covértices $Cv = (\pm a, 0)$

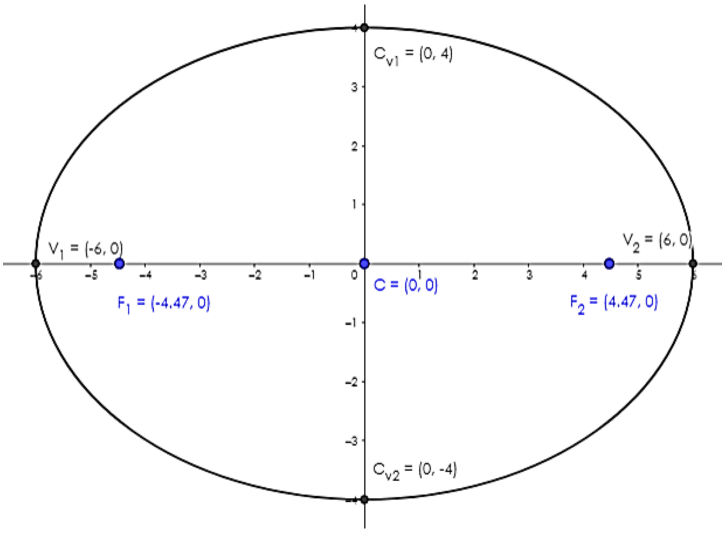
$Cv_1 = (-2,0); Cv_2 = (2,0)$

$c^2 = b^2 - a^2 \rightarrow c = \sqrt{(3)^2 - (2)^2} \rightarrow c = 2.23$

$Focos = (0, \pm c) \rightarrow F_1(0,-2.23); F(0,2.23)$



★★★Determine la ecuación de la Elipse dado los focos $F_1(-2\sqrt{5}, 0); F_2(2\sqrt{5}, 0)$ y los vértices $V_1(-6,0);\ V_2(6,0)$



$2a = 2(6) = 12$

$2c = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$

$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b = \sqrt{(6)^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 4$

$Expresión \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1}$

★★★Para diseñar una pista de carreras con forma elíptica, dados los focos $F_1(0{,}5.66)\ y\ F_2(0,-5.66)$, y los vértices $V_1(0{,}6)\ y\ V_2(0,-6)$, determina la ecuación de la elipse que describe el contorno de la pista.

$$2a = 2(6) = 12$$

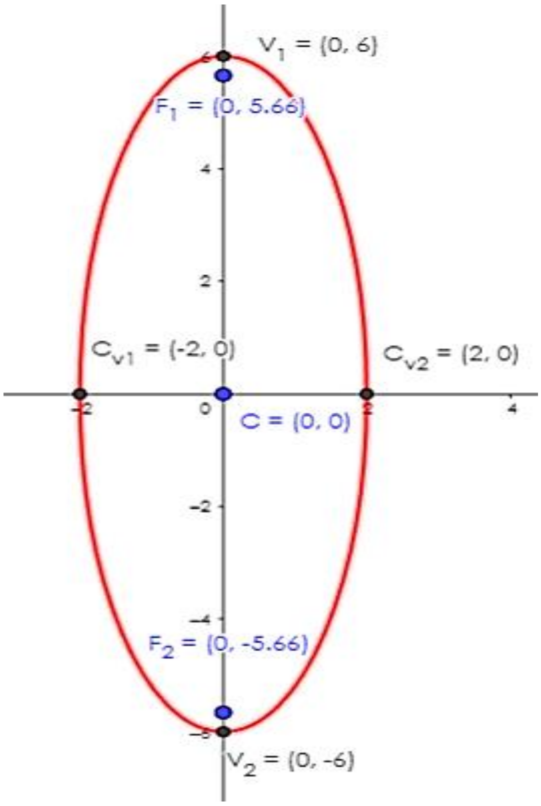
$$2c = 2(5.66) = 11.32$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$$b = \sqrt{(6)^2 - (5.66)^2} = 2$$

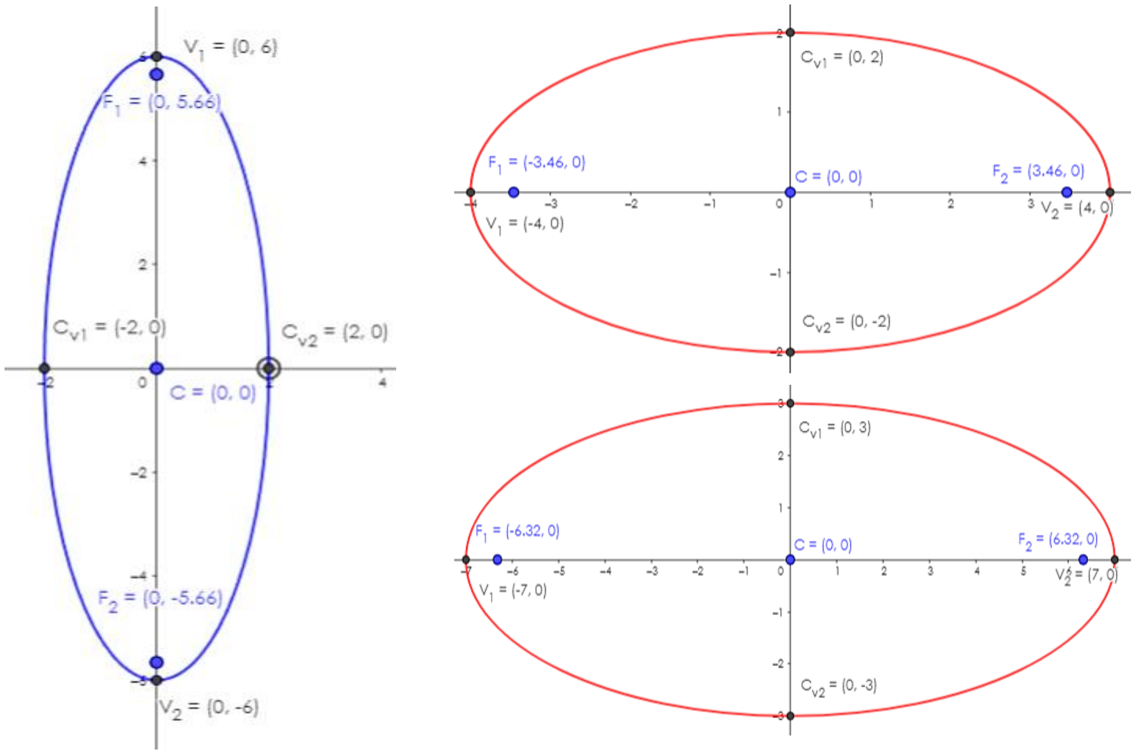
$$Expresión \rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1}$$



Ejercicios para desarrollar

1) ★Con las siguientes gráficas, identifique los puntos de intersección y elementos que se visualizan



2) ★★Para diseñar un jardín elíptico con el centro en el origen, con la ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$. Identifica las coordenadas de los vértices, covértices y focos del jardín.
3) ★★En la planificación de una pista de atletismo con forma elíptica y el centro en el origen, dada la ecuación $25x^2 + 4y^2 = 100$, determina las coordenadas de los vértices, covértices y focos de la pista.
4) ★★★Determine la ecuación de la Elipse dado los focos $F_1\left(0, -3\sqrt{3}\right); F_2(0, 3\sqrt{3})$ y los vértices $V_1(0, -7);\ V_2(0, 7)$
5) ★★★En el diseño de un telescopio con una lente elíptica, donde los focos están en $F_1(0, -4); F_2(0, 4)$, y los vértices en $V_1(0, -8);\ V_2(0, 8)$, encuentra la ecuación de la elipse para ajustar el diseño óptico.
6) ★★★Determine la ecuación de la Elipse dado los focos $F_1(-5, 0); F_2(5, 0)$ y los vértices $V_1(-8, 0);\ V_2(8, 0)$

UNIDAD V
HIPÉRBOLA

5.1 Orígenes

La hipérbola es una de las figuras principales dentro del estudio de las secciones cónicas, varios matemáticos griegos como Apolonio de Perga y posteriormente europeos como René Descartes y Pierre de Fermat la usaron como objeto de estudio aportando en significativamente en áreas como la astronomía, navegación, óptica e ingeniería.

5.2 Cónica

Una cónica o sección cónica es una curva resultante de seccionar o cortar un cono con un plano en diferentes ángulos, dependiendo de la inclinación del corte obtendremos diferentes figuras como: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola que estudiaremos posteriormente realizando diferentes actividades y sus aplicaciones en la vida real.

5.3 Lugar geométrico

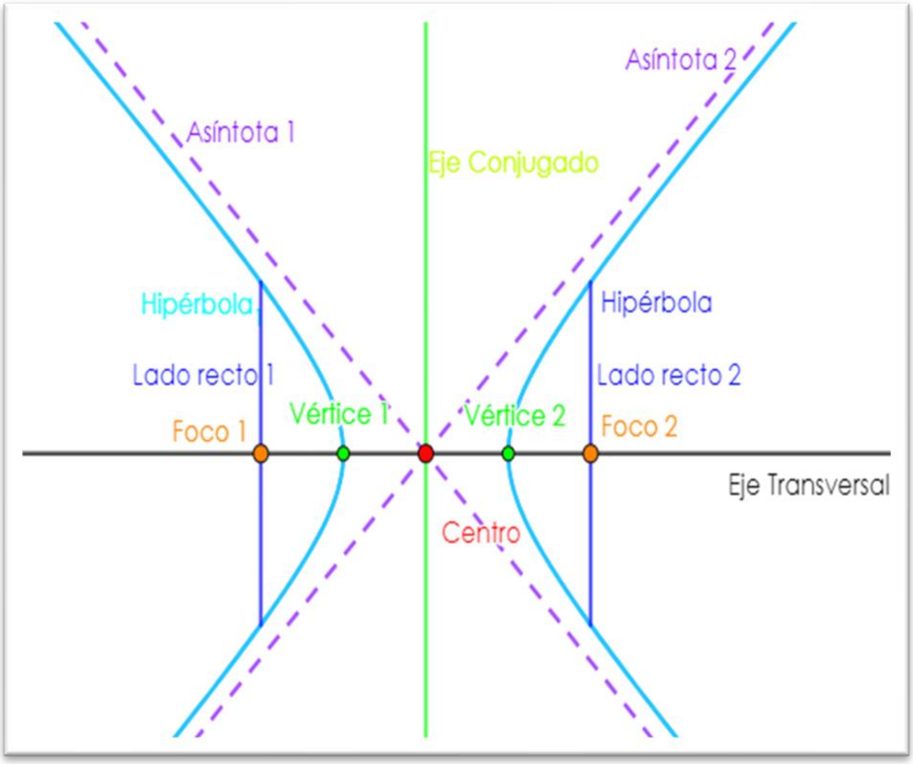
Resumiendo, conceptualizaremos el lugar geométrico como conjunto o grupo de puntos que cumplen una propiedad específica, para este caso en particular, el lugar geométrico de la hipérbola son todos los puntos que cumplen la condición para formar dicha cónica.

5.4 Hipérbola

Curva resultante de seccionar dos conos unidos por el vértice verticalmente. La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, es una constante igual a $2a$ y esa constante es menor que la distancia entre los focos llamada $2c$ (Raichman, 2023).

En este sentido es importante mencionar las siguientes definiciones que podrían usarse regularmente al hablar de elipses:

- Centro: punto medio entre dos vértices equidistantes.
- Eje Transversal: recta que atraviesa ambos vértices.
- Eje Conjugado: eje que secciona perpendicularmente al eje transversal a través del centro.
- Vértices: puntos de corte con el eje transversal.
- Focos: puntos fijos dentro de la hipérbola.
- Excentricidad: medida de apertura de la hipérbola.
- Asíntotas: rectas que se acercan a las ramas de la hipérbola, pero nunca se intersecan.
- Lado recto: segmento que une dos puntos de la hipérbola que atraviesan el foco perpendicularmente.



5.5 Aplicaciones

La hipérbola es una cónica que tiene una gran cantidad de aplicaciones en diferentes áreas de estudio como: la óptica, acústica, ingeniería, arquitectura entre otros; un ejemplo claro de ello son los relojes de arena los cuales poseen una forma tan característica de embudo, al igual que algunos diseños modernos como esta mesa, e incluso el reflejo de la luz en algunas lámparas.

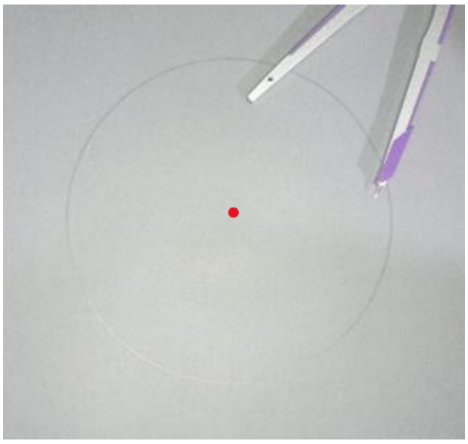
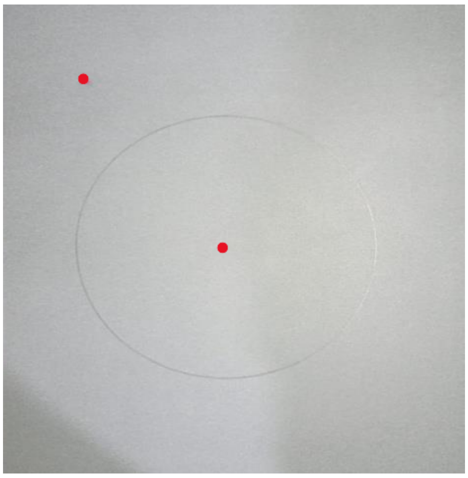
5.6 Actividad 8: Papiroflexia

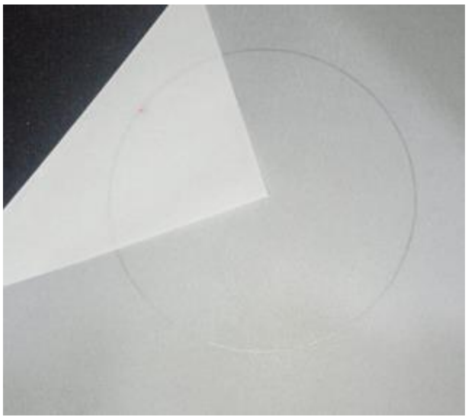
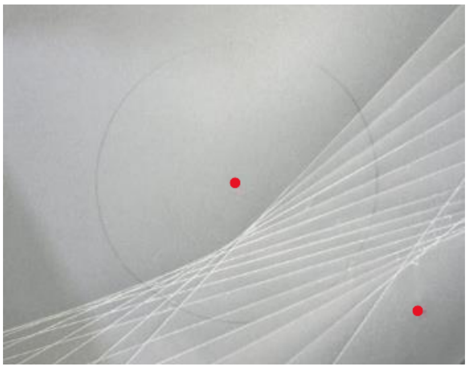
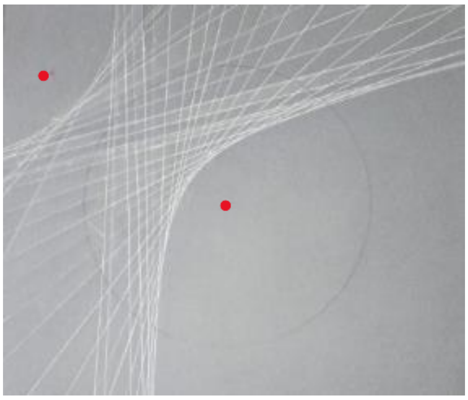
En este apartado realizaremos la construcción de la hipérbola a partir del arte de la papiroflexia, realizando dobleces en el papel calco o pergamino de tal manera que se marquen líneas tangenciales en cada una de las curvas.

5.6.1 Materiales

Para realizar esta actividad necesitaremos algunos materiales como son:

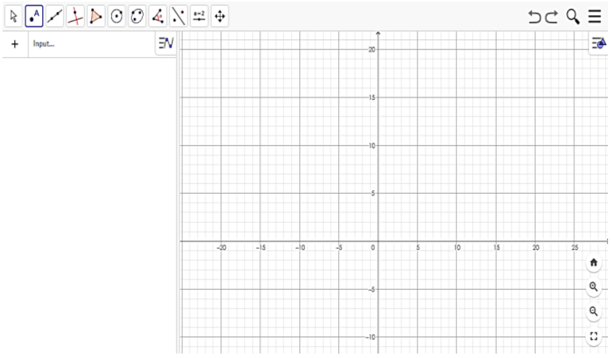
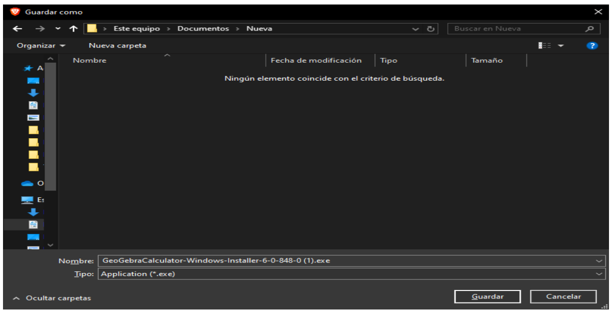
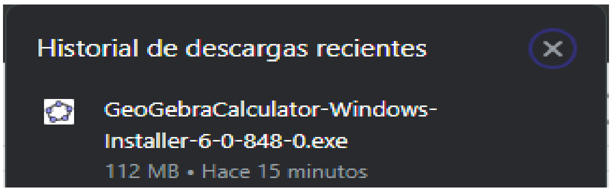
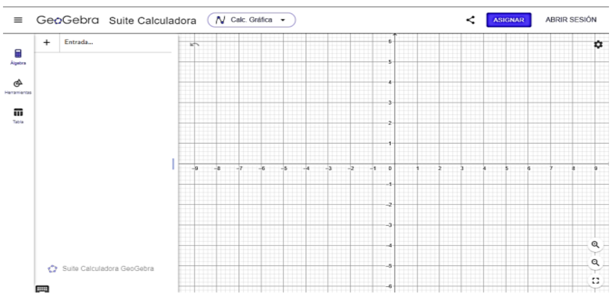
- 1 hoja de papel pergamino
- Compas
- Regla

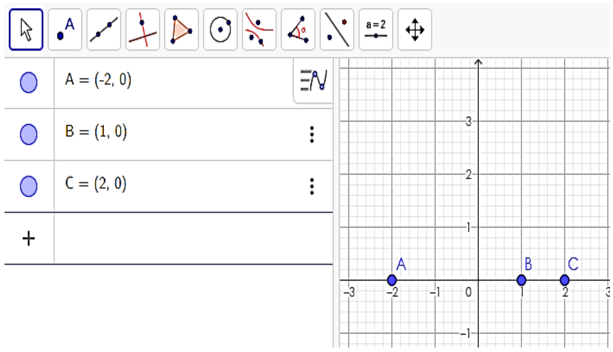
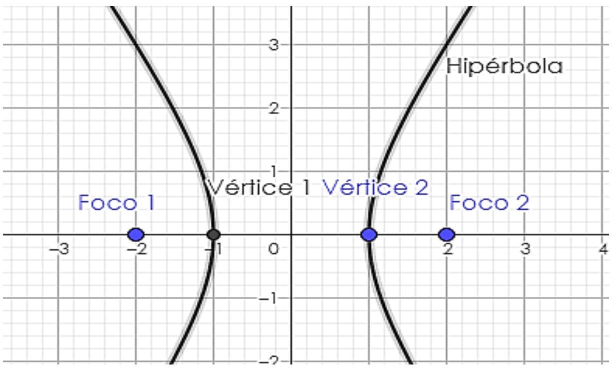
HIPÉRBOLA		
N.º	**DESCRIPCIÓN**	**IMAGEN REFERENCIAL**
1	Para iniciar realizaremos un punto una circunferencia en el centro de la hoja.	
2	Marcaremos un punto fuera de la circunferencia a cuatro centímetros en dirección a la esquina superior izquierda.	

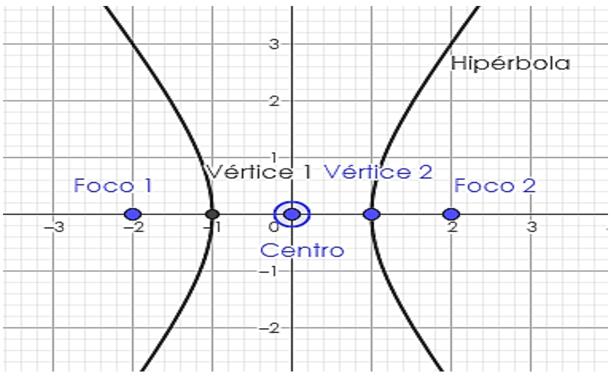
3	Doblaremos y haremos coincidir el punto rojo por toda la circunferencia.	
4	Mientras sigamos avanzando se verá de esta manera.	
5	Finalmente, obtendremos el siguiente resultado y el punto que marcamos al iniciar y el centro de la circunferencia, serán los focos de la hipérbola.	

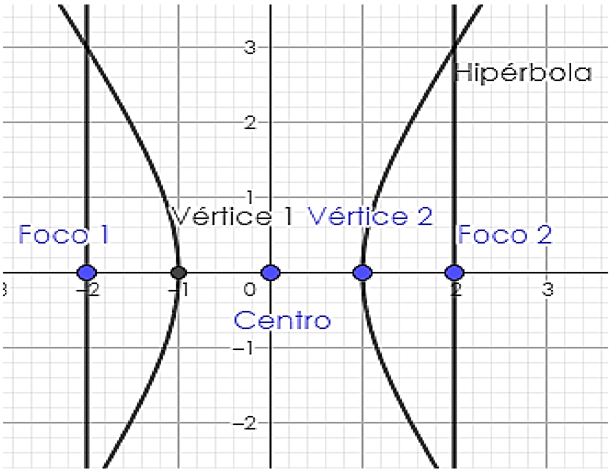
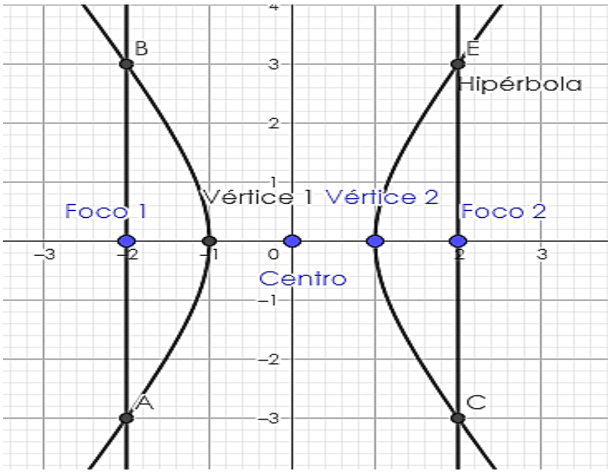
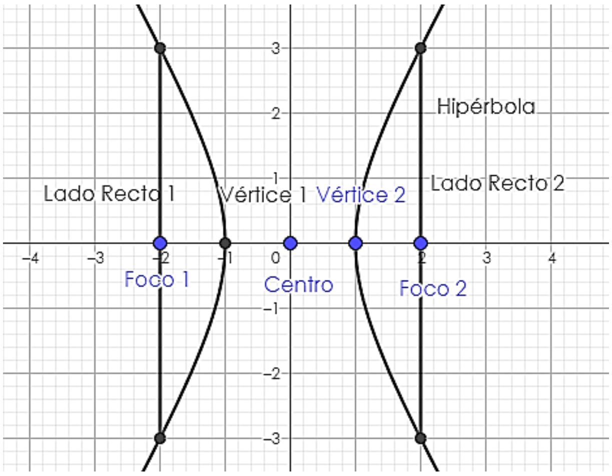
5.7 Actividad 9: GeoGebra

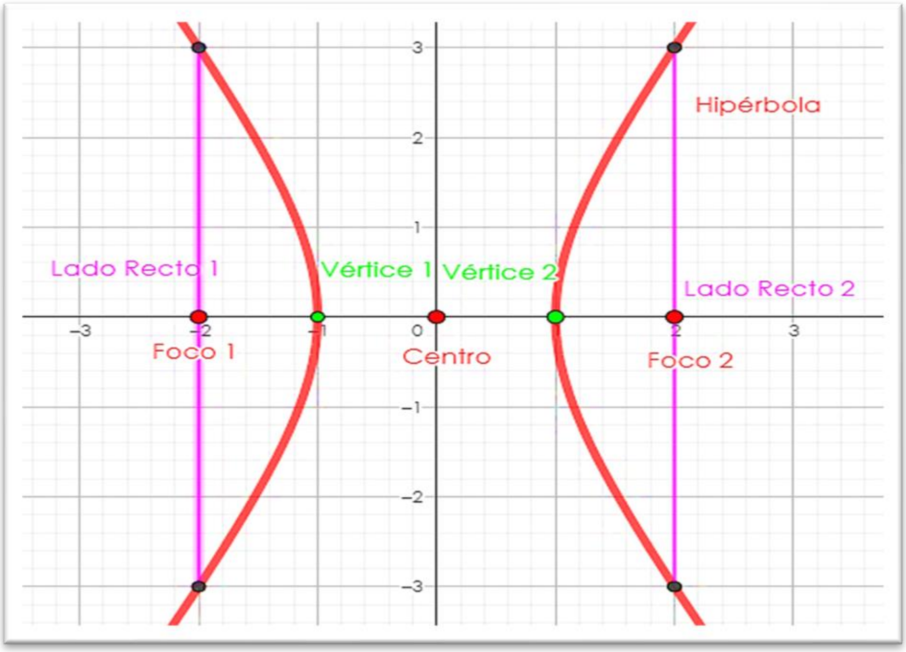
En el siguiente apartado se encuentran los pasos para la construcción de la elipse, así como identificación de cada uno de sus elementos mediante el uso del software GeoGebra

Paso	DESCRIPCIÓN	IMAGEN REFERENCIAL
1	Procedemos a ingresar a GeoGebra mediante el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/classic?lang=es	
2	Si desea instalar en su ordenador ingrese al siguiente enlace, sino continue al paso 3: https://download.geogebra.org/package/win-suite	
2.1	Una vez seleccionado el enlace se procederá a descargar el archivo y seleccione “Guardar”.	
2.2	Cuando termine la descarga, seleccione el archivo y de doble clic y se instalará automáticamente creando un acceso en el escritorio.	

3	Empezaremos creando los focos y el vértice ingresando en el recuadro de “ENTRADA” las siguientes coordenadas como se muestra en la figura [A (-2,0), B (1,0), C (2,0)].	
6	Luego en la séptima herramienta seleccionaremos la opción “HIPÉRBOLA”.	
7	Ahora daremos clic en el punto “A”, luego en el “C” y finalmente en el “B” y con la opción “INTERSECCIÓN”, encontraremos el segundo vértice seleccionando la hipérbola y el eje “X”.	

Elementos		
9	Para graficar el centro usaremos la opción “PUNTO” y lo colocaremos en el origen, o ingresamos la entrada de las coordenadas (0,0)	

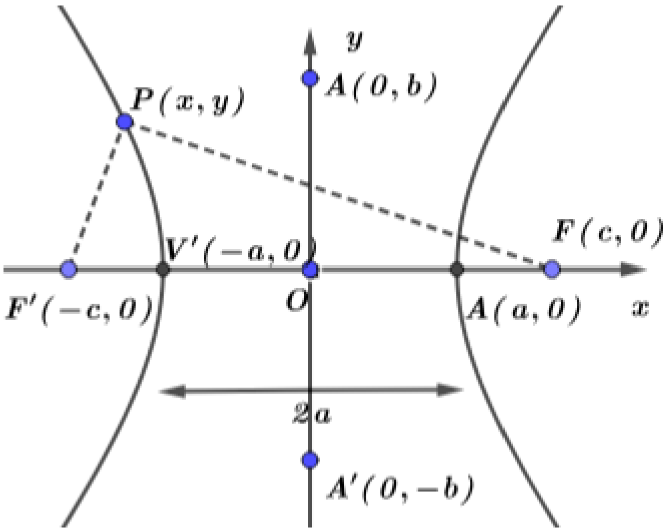
10	Para obtener los lados rectos, usaremos la opción “PERPENDICULAR”, ubicada en la cuarta opción de herramienta y seleccionaremos el eje “X” y luego el foco 1, y repetiremos el proceso para el foco 2	
11	Ahora usaremos la opción “INTERSECCIÓN”, y daremos clic en la recta trazada y luego en la hipérbola.	
12	Luego ocultaremos la perpendicular trazada dando clic derecho sobre esta y seleccionando la opción “OBJETO VISIBLE”, para luego usar trazar un segmento uniendo estos puntos, finalmente daremos diseño agregando color.	



5.8 Demostraciones y ecuaciones de la Hipérbola

5.8.1 Primera Ecuación Ordinaria de la hipérbola o Ecuación Canónica

Para definir la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal coincide con el eje de las abscisas, cuyos focos tienen coordenadas $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$.



Empezaremos estableciendo un punto $P\ (x,y)$ sobre la hipérbola tal que al trazar segmentos la resta de $\left||\overline{FP}|-|\overline{F'P}|\right| = 2a$, donde $2a < 2c$.

De la resta de segmentos se debe establecer que $|\overline{FP}|-|\overline{F'P}| = 2a$, cuando el punto P está sobre la rama izquierda de la hipérbola, mientras que $|\overline{FP}|-|\overline{F'P}| = -2a$ cuando el punto P está sobre la rama derecha. Utilizando la ecuación de distancia entre dos puntos tenemos que:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$|\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Dado que establecimos las siguientes expresiones, deben cumplir la condición de la hipérbola:

Punto P en rama izquierda

$$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Punto P en rama derecha

$$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = -2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a$$

Ahora debemos realizar operaciones matemáticas para obtener una expresión más reducida:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + [(x+c)^2 + y^2]$$

$$\cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$-4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(cx + a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2[(x+c)^2 + y^2]$$

$$c^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dado que $c > a$, al operar $c^2 - a^2$se obtendrá un valor positivo, por lo tanto, se reemplaza por b^2

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Para reducir aún más la expresión podemos dividir a toda la ecuación por a^2b^2

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

Al simplificar obtenemos la ecuación canónica de la hipérbola:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}}$$

La excentricidad e de la hipérbola se define como:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Como $c > a$ la excentricidad de la hipérbola es mayor que la unidad $(e > 1)$; para una hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje y se sigue el mismo proceso anterior y su ecuación es:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

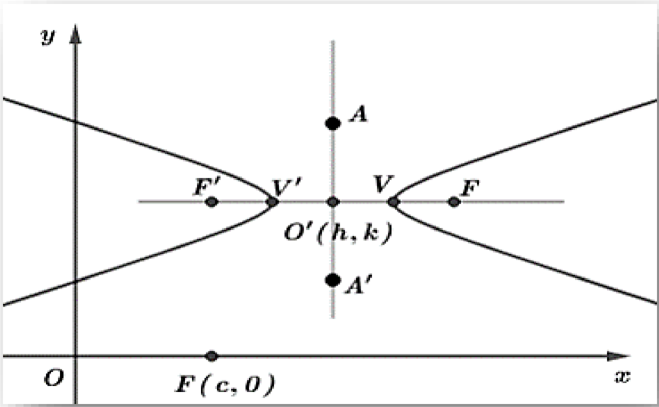
Finalmente, las directrices de una hipérbola con focos sobre el eje x son $x = \pm\frac{a}{e}$ y si se encuentran sobre el eje y son $y = \pm\frac{a}{e}$

5.8.2 Segunda Ecuación Ordinaria de la hipérbola

Para este caso analizaremos una hipérbola con centro fuera del origen en coordenadas (h, k)y eje focal paralelo al eje de las abscisas, por tal motivo es necesario transportar los ejes coordenados como en casos anteriores de puntos (x, y) a (x', y'), utilizando la ecuación canónica:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Al transportar los ejes coordenados es necesario plantear el siguiente sistema coordenado:



$$x = x' + h \quad \rightarrow \quad x' = x - h \qquad\qquad y = y' + k \quad \rightarrow \quad y' = y - k$$

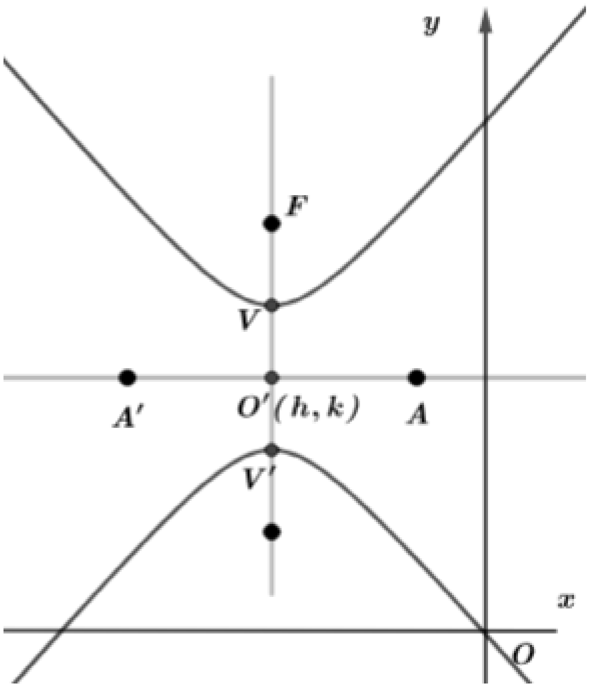
Sustituyendo estas igualdades en la ecuación canónica obtenemos la segunda ecuación ordinaria de la hipérbola:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Para el caso de una hipérbola con centro en el origen los focos, vértices y extremos tienen coordenadas $F(c, 0); F'(-c, 0);\ V(a, 0); V'(-a, 0); A(0, b); A'(0, -b)$ pero en este caso al transportar los ejes los nuevos focos, vértices y extremos tienen coordenadas $F(h + c, k); F'(h - c, k); V(h + a, k); V'(h - a, k); A(h, k + b); A'(h, k - b)$.

Analizando una hipérbola con centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje de la ordenada se parte desde la ecuación canónica para el caso de hipérbolas verticales.



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Al igual que en el caso anterior los puntos de coordenadas (x, y) se transportan a (x', y') y sustituyéndolos en la ecuación anterior.

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

Al transportar los ejes coordenados es necesario plantear el siguiente sistema coordenado:

$$x = x' + h \;\; \rightarrow \;\; x' = x - h \qquad\qquad y = y' + k \;\; \rightarrow \;\; y' = y - k$$

Sustituyendo estas igualdades en la ecuación canónica obtenemos la segunda ecuación ordinaria de la hipérbola para casos con eje focal paralelo al eje y:

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}}$$

Para el caso de una hipérbola con centro fuera del origen y eje focal paralelo al eje y los focos, vértices y extremos tienen coordenadas $F(h, k + c); F'(h, k - c); V(h, k + a); V'(h, k - a); A(h + b, k); A'(h - b, k)$

5.8.3 Forma General de la ecuación de la hipérbola

Para definir una ecuación general de la hipérbola debemos partir de la segunda forma ordinaria y desarrollar los binomios hasta obtener una expresión algebraica.

Forma horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2(x^2 - 2xh + h^2) - a^2(y^2 - 2yk + k^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2xh + h^2b^2 - a^2y^2 + 2a^2yk - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Forma vertical

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \to \frac{b^2(y-k)^2-a^2(x-h)^2}{a^2b^2}=1$$

$$b^2(y^2-2yk+k^2)-a^2(x^2-2xh+h^2)=a^2b^2$$

$$b^2y^2+2a^2xh+h^2b^2-a^2h^2-2b^2yk+b^2k^2-a^2b^2=0$$

Luego de haber obtenido las expresiones algebraicas es necesario reemplazar por las siguientes igualdades:

Forma horizontal $A=b^2; C=-a^2; D=-2b^2h; E=-2a^2k; F=b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2$ sustituyendo obtenemos la ecuación general de la hipérbola con eje focal paralelo al eje x:

$$\boxed{\boldsymbol{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}}$$

Forma vertical $A=b^2; C=-a^2; D=2a^2h; E=-2b^2k; F=-a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2$ sustituyendo obtenemos la ecuación general de la hipérbola con eje focal paralelo al eje y:

$$\boxed{\boldsymbol{Ay^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}}$$

5.9 Formulario de ecuaciones de la Hipérbola

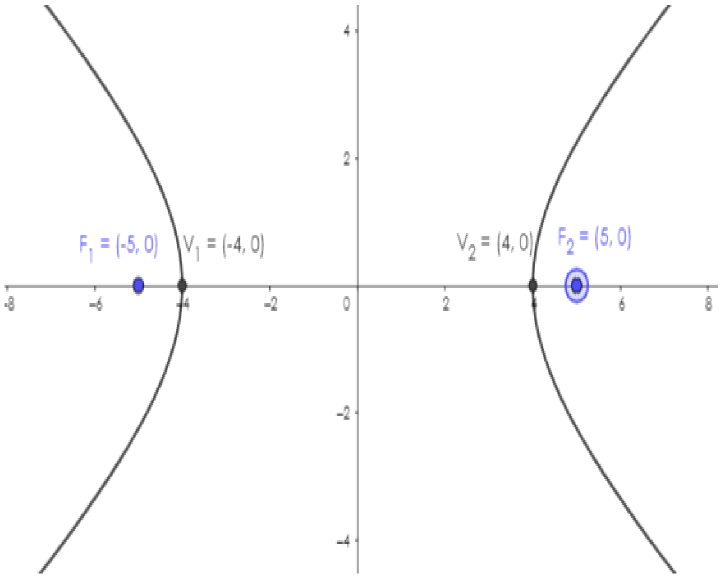
Nombre	Fórmula	Característica
Primera ecuación ordinaria	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Centro en el origen y eje focal sobre la horizontal
Primera ecuación ordinaria	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	Centro en el origen y eje focal sobre la vertical
Segunda ecuación ordinaria	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	Centro en (h,k) y eje focal paralelo a la horizontal
Segunda ecuación ordinaria	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	Centro en (h,k) y eje focal paralelo a la vertical
Ecuación General	$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$	Centro en (h,k) y eje focal paralelo a la horizontal
Ecuación General	$Ay^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$	Centro en (h,k) y eje focal paralelo a la vertical
Excentricidad	$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	Valores de $e>1$

Distancia focal	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	Desde el vértice al foco
	Coordenadas de los focos	
Eje focal sobre la horizontal	$F = (\pm c, 0)$	Centrado en el origen
Eje focal sobre la vertical	$F = (0, \pm c)$	Centrado en el origen
Eje focal paralelo a la horizontal	$F = (h \pm c, k)$	Con centro en (h, k)
Eje focal paralelo a la vertical	$F = (h, k \pm c)$	Con centro en (h, k)
	Coordenadas de los vértices	
Eje focal sobre la horizontal	$V = (\pm a, 0)$	Centrado en el origen
Eje focal sobre la vertical	$V = (0, \pm a)$	Centrado en el origen
Eje focal paralelo a la horizontal	$V = (h \pm a, k)$	Con centro en (h, k)
Eje focal paralelo a la vertical	$V = (h, k \pm a)$	Con centro en (h, k)
	Directrices	
Eje focal sobre la horizontal	$x = \pm \frac{a}{e}$	Eje focal sobre eje x
Eje focal sobre la vertical	$y = \pm \frac{a}{e}$	Eje focal sobre eje y

5.10 Actividad 10: Ejercicios y Problemas

En este apartado encontraremos ejercicios problemas y actividades relacionado con el estudio de la hipérbola que complementarán los conocimientos adquiridos con diferentes niveles de dificultad denotados por una estrella (★) que potenciarán el aprendizaje, además estos pueden ser revisados y comprobados con el software GeoGebra fácilmente.

★Para crear un diseño de una pista de carreras con una forma hiperbólica, con el foco en (5,0), el vértice en (4,0) y el centro en el origen, determina la ecuación de la hipérbola que define el contorno de la pista.



$$V = (\pm a, 0)$$

$$F = (\pm c, 0)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = 3$$

$$Expresión \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$$

★Para diseñar un espejo con forma de hipérbola, con el foco en (0,5) el vértice en (0,3) y el centro en el origen, determina la ecuación de la hipérbola que define la forma del espejo.

$$V = (0, \pm a)$$

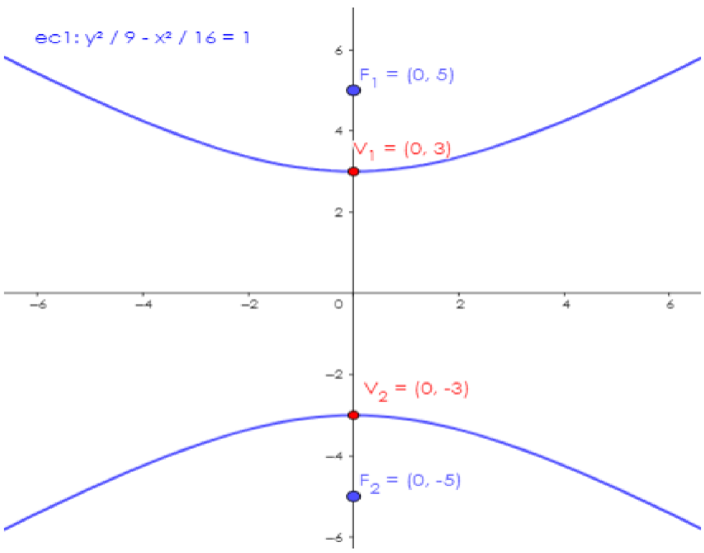
$$F = (0, \pm c)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{(5)^2 - (3)^2} = 4$$

$$Expresión \rightarrow \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1 \rightarrow \boldsymbol{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1}$$



★★Para diseñar un puente con una estructura en forma de hipérbola que se extienda a lo largo de un eje horizontal y tenga una longitud total de 12 unidades, necesitas calcular la ecuación de la hipérbola. La excentricidad de la hipérbola es $\frac{4}{3}$. Determina la ecuación para asegurar que la estructura cumpla con los requisitos de diseño.

$Eje\ principal \to 2a = 12; a = 6$

$Excentricidad\ e = \dfrac{c}{a} \to c = ea$

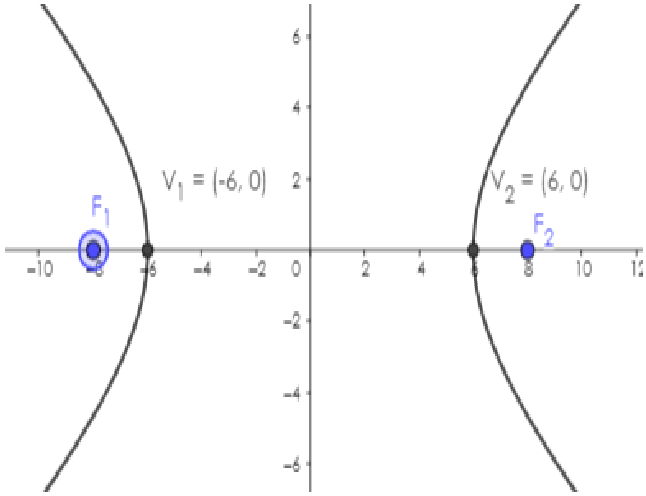
$c = \dfrac{4}{3}(6) \to c = 8$

$c^2 = a^2 + b^2 \to b^2 = c^2 - a^2$

$b = \sqrt{(8)^2 - (6)^2} = 2\sqrt{7}$

$Expresión \to \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\dfrac{x^2}{6^2} - \dfrac{y^2}{\left(2\sqrt{7}\right)^2} = 1 \to \boldsymbol{\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{28} -= 1}$



★★Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje focal horizontal, distancia focal de 34 unidades y distancia del foco al vértice de 2

$Distancia\ focal \to 2c = 34: c = 17$

$distancia\ del\ foco\ l\ vertice$

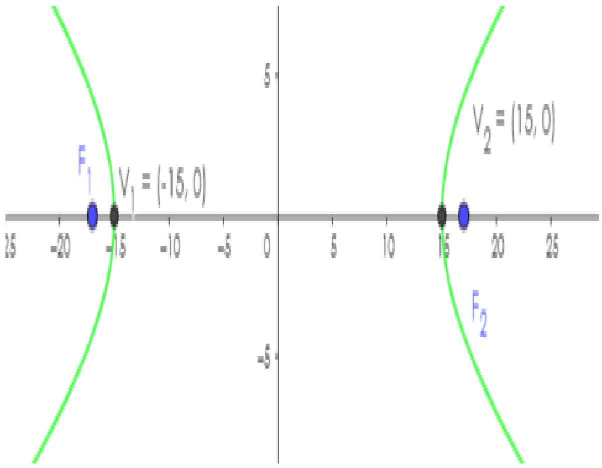
$c - a = 2 \to a = c - 2 \to a = 15$

$c^2 = a^2 + b^2 \to b^2 = c^2 - a^2$

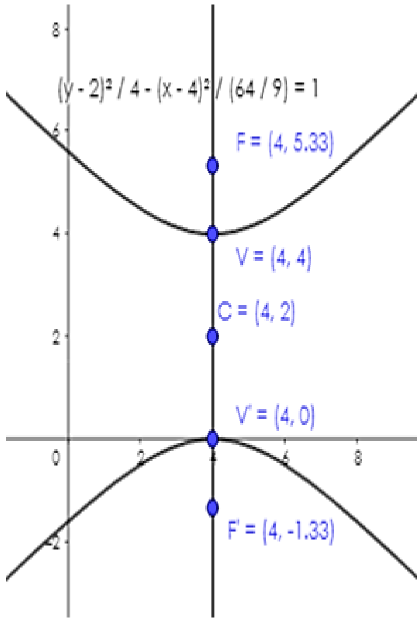
$b^2 = 17^2 - 15^2 = 8^2 = 64$

$Expresión \to \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\dfrac{x^2}{15^2} - \dfrac{y^2}{8^2} = 1 \to \boldsymbol{\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{64} -= 1}$



★★★ Dada la siguiente ecuación general de la hipérbola: $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y + 144 = 0$. Transforma la ecuación a su forma ordinaria, determina las coordenadas del centro, los vértices y los focos y dibuja la gráfica de la hipérbola.



Debemos agrupar y completar los cuadrados:

$$9(x^2 - 8x + 16 - 16) - 16(y^2 - 4y + 4 - 4) = 0$$

$$9((x-4)^2 - 16) - 16((y-2)^2 - 4) = -144$$

$$9(x-4)^2 - 16(y-2)^2 = -64$$

$$\frac{9(x-4)^2}{-64} - \frac{16(y-2)^2}{-64} = -\frac{64}{-64}$$

$$\boldsymbol{\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{\frac{64}{9}} = 1\ Forma\ ordinaria}$$

$$Centro = (h,k) = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2B}\right)$$

$$Centro = \left(-\frac{-72}{2*9}, -\frac{64}{2(-16)}\right) = \boldsymbol{(4,2)}$$

$$Vértices = (h, k \pm a) = (4,2 \pm 2) \to \boldsymbol{V(4,4); V'(4,0)}$$

$$Focos = (h, k \pm c) \to c = \sqrt{a^2 + b^2} \to c = \frac{10}{3} \to \boldsymbol{Focos = \left(4, 2 \pm \frac{10}{3}\right)}$$

Ejercicios para desarrollar

1) ★ Para diseñar una antena parabólica que optimice la recepción de señales, necesitas saber la forma exacta del paraboloide. La antena tiene un foco en $(0,7)$, un vértice en $(0,5)$, y está centrada en el origen. Encuentra la ecuación que describe la forma de la antena para asegurar que capte las señales de manera eficiente
2) ★Estás diseñando el espejo de un telescopio con una forma hiperbólica para mejorar la calidad de la imagen. El foco del espejo está en $(6,0)$ y el vértice en $(4,0)$, con el centro en el origen. Determina la ecuación de la hipérbola que define el contorno del espejo.
3) ★Para construir un canal de riego en forma de hipérbola, el foco está en $(0,-8)$ y el vértice en $(0,-6)$, con el centro en el origen. Calcula la ecuación de la hipérbola que describe la forma del canal para asegurar un flujo de agua eficiente.
4) ★★Estás diseñando un sistema óptico con una hipérbola que tiene una excentricidad de $\frac{5}{4}$ y mide 10 unidades. El eje principal es horizontal. Encuentra la ecuación de la hipérbola para ajustar el sistema óptico a las especificaciones requeridas.
5) ★★Necesitas diseñar una lente con forma de hipérbola para un nuevo tipo de cámara. La hipérbola tiene una excentricidad de $\frac{3}{2}$ y mide 10 unidades, con el eje principal horizontal. Determina la ecuación que describe la forma de la lente para garantizar su funcionamiento adecuado.
6) ★★Estás trabajando con una hipérbola descrita por la ecuación general $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y + 144 = 0$. Transforma esta ecuación a su forma ordinaria, determina las coordenadas del centro, los vértices y los focos, y dibuja la gráfica.
7) ★★★Dada la siguiente ecuación ordinaria de la hipérbola con centro en $C(h,k)$: $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$. Identifica el centro, las coordenadas de los vértices. Calcula la excentricidad e y las coordenadas de los focos y dibuja la hipérbola en el plano cartesiano.
8) ★★★Dada la ecuación general de la hipérbola: $4y^2 - 9x^2 + 36x - 8y - 76 = 0$. Transforma la ecuación a su forma ordinaria y determina el centro, los vértices y los focos.

REFERENCIAS

Aguilar Márquez, A. (2010). Geometría, trigonometría y geometría analítica.

Cotrina, J., & Escudero, P. (2021). Introducción a la geometría analítica. Universidad del Pacífico.

Delgado, J., Frensel, K., & Crissaff, L. (2013). Geometria analítica. Rio de Janeiro: SBM.

EO de Oteyza, E. D. O., Osnaya, E. L., Garciadiego, C. H., & Hoyo, A. M. C. (2001). Geometría analítica y trigonometría. Pearson Educación.

Kindle, J. H. (2007). Geometría analítica. EUNED.

Olvera, B. G. (2014). Geometría analítica. Pearson Educación.

Raichman, S. R., Totter, E., Videla, D., Collado, L., Codina, F., Molina, G., ... & Fitt, G. (2022). Geometría analítica.

Winterle, P., & Steinbruch, A. (2000). Geometria analítica. Makron Books, São Paulo.

ANEXOS

<table>
<tr><td colspan="8">PLANIFICACIÓN MICROCURRICULAR POR DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO POR AREA DE CONOCIMIENTO PRIORIZADO</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td></td><td>Área/asignatura:</td><td>Matemática</td><td>Grado/Curso:</td><td>Segundo BGU</td><td>Paralelo:</td><td>A, B,</td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>5</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td colspan="2">Cónicas: Circunferencia
- Noción de cónicas
- Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen - Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k).
- Ecuación general de la circunferencia</td><td>Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">O.M.5.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.</td></tr>
<tr><td>VOCACIONAL</td><td colspan="7">• Orientar a los estudiantes en un proyecto de vida a través de la contextualización de la asignatura en su quehacer diario.
• Modelar un perfil del educando que se acople a las necesidades del mundo actual.</td></tr>
<tr><td>IDENTIDAD</td><td colspan="7">Marianitas unidas trabajando por una educación de calidad y calidez con la pedagogía del amor, el diálogo y la ternura.</td></tr>
<tr><td>2. PLANIFICACIÓN</td><td colspan="7"></td></tr>
<tr><td colspan="4">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="4">INDICADORES ESENCIALES DE EVALUACIÓN:</td></tr>
<tr><td colspan="4">M.5.2.16. Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano</td><td colspan="4">I.M.5.7.1. Opera analítica, geométrica y gráficamente, con vectores, rectas y planos en el espacio; expresa la ecuación de la recta de forma paramétrica y vectorial; halla mediante tres puntos dicha ecuación o a partir de la intersección de dos planos, y determina la ortogonalidad de los mismos, para efectuar aplicaciones geométricas. (I.2.)</td></tr>
<tr><td>EJES TRANSVERSALES:</td><td>Somos innovadores</td><td>PERIODOS:</td><td>3</td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td>16/09/2024</td><td>TERMINO:</td><td>20/09/2024</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estrategias metodológicas</td><td colspan="3">Recursos</td><td colspan="2">Actividades de evaluación/Técnicas/instrumentos</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Primer Periodo</u>

MOTIVACIÓN (5 minutos)
-Inicia la clase con una breve charla sobre las cónicas y su relevancia en la historia de las matemáticas, mencionando personajes históricos y su influencia en la geometría.
-Para conectar el tema con la vida real, se proyectan imágenes de aplicaciones de circunferencias en arquitectura, tecnología y astronomía.

EXPERIENCIA (25 minutos)
-Los estudiantes crearán un cono utilizando plastilina y lo cortarán en diferentes ángulos para observar las secciones cónicas que se forman (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola).
-El docente supervisará la actividad y guiará el proceso, haciendo preguntas orientadoras sobre las diferencias entre las secciones obtenidas.</td><td colspan="3">Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 9-28.

Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 9-12.</td><td colspan="2">Técnica: Conversación
Instrumento: Lista de cotejo

Técnica: Intercambios orales
Instrumento: Diálogo

Técnica: Ejercicios prácticos
Instrumento: Análisis de casos</td></tr>
</table>

REFLEXIÓN (10 minutos) - Discusión grupal guiada por el docente, donde los estudiantes compartirán sus observaciones de la actividad. -El docente profundiza en la idea del lugar geométrico, explicando que la circunferencia es el conjunto de puntos equidistantes de un centro. -Preguntas clave: ¿Qué caracteriza a la circunferencia entre las otras cónicas? ¿Cómo describirían la relación entre el radio y el centro de la circunferencia? **CONCEPTUALIZACIÓN (30 minutos)** -Historia -Lugar geométrico -Cónica -Circunferencia -Elementos de la circunferencia -Aplicaciones **APLICACIÓN (20 minutos)** - Los estudiantes dibujan y etiquetan las partes de una circunferencia (centro, radio, diámetro, cuerda etc.). El docente pide a los estudiantes que identifiquen circunferencias en el entorno (ruedas, relojes, tapas). Tarea: Investigar y traer un ejemplo de una aplicación de la circunferencia en la vida cotidiana o en la ciencia (astronomía, diseño, tecnología). ***Segundo Periodo*** **MOTIVACIÓN (5 minutos)** -Mostrar cómo la papiroflexia puede ser utilizada en la geometría para construir figuras precisas **EXPERIENCIA (20 minutos)** -Los estudiantes utilizan hojas de papel pergamino para crear circunferencias mediante la técnica de papiroflexia. -El docente supervisará la actividad y guiará el proceso, haciendo preguntas orientadoras sobre la circunferencia.	**Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 13-15. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 9-28. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 16-17.	

REFLEXIÓN (10 minutos) - Discusión grupal guiada por el docente, donde los estudiantes compartirán sus observaciones de la actividad.. - Discusión sobre que utilidad tiene la circunferencia en el pasado y la actualidad. **CONCEPTUALIZACIÓN (30 minutos)** -Deducción canónica de la circunferencia con centro en el origen -Deducción canónica de la circunferencia con centro (h, k) -Deducción de ecuación general de la circunferencia **APLICACIÓN (25 minutos)** - Los estudiantes resuelven problemas sencillos de circunferencias con diferentes radios y centros guiados por el docente. ***<u>Tercer Periodo</u>*** **MOTIVACIÓN (5 minutos)** - Pregunta motivadora: ¿Cómo podemos representar circunferencias usando tecnología? - Mostrar cómo la tecnología puede ser utilizada en la geometría para construir cónicas. **EXPERIENCIA (20 minutos)** -El docente ingresa ecuaciones de la circunferencia en GeoGebra para presentar cómo cambian sus gráficos cuando modifican el centro y el radio. -Representación gráfica de circunferencias con distintos valores de h, k y r. -Los estudiantes participan en cambiar los parámetros para observar cómo afectan la posición y el tamaño de la circunferencia. **REFLEXIÓN (10 minutos)** - Pregunta clave: ¿Qué sucede cuando cambiamos los valores de h o k en la ecuación de la circunferencia? - Discusión sobre la relación entre la ecuación y el gráfico.	**Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 24-25. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Página 26. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 18-23. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 24-25. **Herramientas físicas**	

CONCEPTUALIZACIÓN (20 minutos) - Complementar y resolver dudas acerca de las ecuaciones y sus variables **APLICACIÓN (35 minutos)** - Los estudiantes resuelven problemas sencillos de circunferencias utilizando las ecuaciones de la circunferencia guiados por el docente. Tarea: Realizar ejercicios de la guía	Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Página 28.	

3. ADAPTACIONES CURRICULARES			
Especificación de la Necesidad Educativa	**Especificación de la adaptación a ser aplicada**		
	Grado de adaptación:		
Destreza con Criterio de Desempeño	**Actividad de Aprendizaje**	**Indicadores**	**Técnica e Instrumento de Evaluación**

4. INTERDISCIPLINARIO			
TEMA/ TÍTULO PROYECTO	**ESPECIFICACIÓN DEL INTERDISCIPLINARIO / MATERIA**		
Destreza con Criterio de Desempeño	**Actividad de Aprendizaje**	**Indicadores**	**Técnica e Instrumento de Evaluación**

5.HORAS DE ACOMPAÑAMIENTO DOCENTE PARA EL DESARROLLO DE ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS PARA EL REFUERZO Y FORTALECIMIENTO DE LOS APRENDIZAJES		
Actividades planificadas para las horas de acompañamiento docente para el refuerzo y fortalecimiento de los aprendizajes	**Estrategias Metodológicas Activas**	**Actividades Evaluativas**

ELABORADO	**REVISADO**	**APROBADO**
Docentes:	**Director del área:**	**Vicerrectora:**
Firma:	**Firma:**	**Firma:**
Fecha:	**Fecha:**	**Fecha:**

<table>
<tr><td colspan="8">PLANIFICACIÓN MICROCURRICULAR POR DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO POR AREA DE CONOCIMIENTO PRIORIZADO</td></tr>
<tr><td>Docente:</td><td></td><td>Área/asignatura:</td><td>Matemática</td><td>Grado/Curso:</td><td>Segundo BGU</td><td>Paralelo:</td><td>A, B,</td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>5</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td colspan="2">Cónicas: Elipse
- Ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal x.
- Ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal y.
- Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x.
- Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y
- Ecuación General de la elipse</td><td>Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="2">O.M.5.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.</td></tr>
<tr><td>VOCACIONAL</td><td colspan="7">• Orientar a los estudiantes en un proyecto de vida a través de la contextualización de la asignatura en su quehacer diario.
• Modelar un perfil del educando que se acople a las necesidades del mundo actual.</td></tr>
<tr><td>IDENTIDAD</td><td colspan="7">Marianitas unidas trabajando por una educación de calidad y calidez con la pedagogía del amor, el diálogo y la ternura.</td></tr>
<tr><td>2. PLANIFICACIÓN</td><td colspan="7"></td></tr>
<tr><td colspan="4">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="4">INDICADORES ESENCIALES DE EVALUACIÓN:</td></tr>
<tr><td colspan="4">M.5.2.16. Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano</td><td colspan="4">I.M.5.7.1. Opera analítica, geométrica y gráficamente, con vectores, rectas y planos en el espacio; expresa la ecuación de la recta de forma paramétrica y vectorial; halla mediante tres puntos dicha ecuación o a partir de la intersección de dos planos, y determina la ortogonalidad de los mismos, para efectuar aplicaciones geométricas. (I.2.)</td></tr>
<tr><td>EJES TRANSVERSALES:</td><td>Somos innovadores</td><td>PERIODOS:</td><td>3</td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td>23/09/2024</td><td>TERMINO:</td><td>27/09/2024</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estrategias metodológicas</td><td colspan="3">Recursos</td><td colspan="2">Actividades de evaluación/Técnicas/instrumentos</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Primer Periodo</u>

MOTIVACIÓN (10 minutos)
-Introducir el concepto de la elipse con ejemplos visuales de objetos y trayectorias elípticas (órbitas de planetas, diseño de espejos en telescopios).
-Para conectar el tema con la vida real, se proyectan imágenes de aplicaciones de elipse en arquitectura, tecnología y astronomía.

EXPERIENCIA (25 minutos)
-Los estudiantes utilizan hojas de papel pergamino para crear elipses mediante la técnica de papiroflexia.</td><td colspan="3">Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 47-66.

Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 49-50.</td><td colspan="2">Técnica: Conversación
Instrumento: Lista de cotejo

Técnica: Intercambios orales
Instrumento: Diálogo

Técnica: Ejercicios prácticos
Instrumento: Análisis de casos</td></tr>
</table>

-El docente supervisará la actividad y guiará el proceso, haciendo preguntas orientadoras sobre la elipse. **REFLEXIÓN (10 minutos)** - Discusión grupal guiada por el docente, donde los estudiantes compartirán sus observaciones de la actividad. -El docente profundiza en la idea del lugar geométrico, explicando sobre la elipse. ¿Cómo cambia la forma de la elipse al modificar la distancia entre los focos? **CONCEPTUALIZACIÓN (30 minutos)** -Historia -Lugar geométrico -Cónica -Elipse -Elementos de la Elipse -Aplicaciones - Deducción de primera ecuación canónica de la elipse **APLICACIÓN (15 minutos)** - Los estudiantes dibujan y etiquetan las partes de una elipse (focos, centro, vértices, eje mayor y menor). - El docente pide a los estudiantes que identifiquen la elipse en el entorno. Tarea: Investigar y traer un ejemplo de una aplicación de la elipse en la vida cotidiana o en la ciencia (astronomía, diseño, tecnología). ***<u>Segundo Periodo</u>*** **MOTIVACIÓN (10 minutos)** - Pregunta motivadora: ¿Cómo podemos representar elipses usando tecnología? - Mostrar cómo la tecnología puede ser utilizada en la geometría para construir cónicas. **EXPERIENCIA (20 minutos)** -El docente ingresa ecuaciones de la elipse en GeoGebra para presentar cómo cambian sus gráficos cuando modifican sus variables. -Los estudiantes participan en cambiar los parámetros para observar cómo afectan la posición y el tamaño de la elipse.	**Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 47-48,56. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 47-66 **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 51-55. **Herramientas físicas**	

REFLEXIÓN (10 minutos) - Pregunta clave: ¿Qué sucede cuando cambiamos los valores de a o b en la ecuación de la elipse? - Discusión sobre la relación entre la ecuación y el gráfico. **CONCEPTUALIZACIÓN (30 minutos)** - Ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal y. - Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x. **APLICACIÓN (20 minutos)** - Los estudiantes resuelven problemas sencillos de la elipse utilizando las ecuaciones y guiados por el docente. - Tarea: Realizar 5 construcciones de elipses en GeoGebra ***Tercer Periodo*** **MOTIVACIÓN (10 minutos)** - Pregunta motivadora: ¿Qué importancia tiene la elipse en la física o astronomía? - Video corto del movimiento de los planetas. **EXPERIENCIA (10 minutos)** -El docente ingresa ecuaciones de la elipse en GeoGebra para presentar cómo cambian sus gráficos cuando modifican valores de a, b, h, k. -Los estudiantes participan en cambiar los parámetros para observar cómo afectan la posición y el tamaño de la elipse. **REFLEXIÓN (10 minutos)** - Pregunta clave: ¿Qué sucede cuando cambiamos los valores de h o k en la ecuación de la elipse? - Discusión sobre la relación entre la ecuación y el gráfico. **CONCEPTUALIZACIÓN (30 minutos)** - Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y - Ecuación general de la elipse - Complementar y resolver dudas acerca de las ecuaciones y sus variables	Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 58-59. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Página 63. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 47-66 **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 51-55. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 59-61. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Página 64-66.	

<table>
<tr><td colspan="3">APLICACIÓN (30 minutos)
- Resolución de ejemplos avanzados donde se requiere encontrar la ecuación de una elipse a partir de información sobre sus ejes y centros.
- Los estudiantes resuelven ejercicios de elipses utilizando las ecuaciones de la elipse guiados por el docente.
-Tarea: Realizar ejercicios de la guía</td><td colspan="3"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="8">3. ADAPTACIONES CURRICULARES</td></tr>
<tr><td colspan="4">Especificación de la Necesidad Educativa</td><td colspan="4">Especificación de la adaptación a ser aplicada</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="4">Grado de adaptación:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destreza con Criterio de Desempeño</td><td>Actividad de Aprendizaje</td><td colspan="2">Indicadores</td><td>Técnica e Instrumento de Evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="8">4. INTERDISCIPLINARIO</td></tr>
<tr><td colspan="4">TEMA/ TÍTULO PROYECTO</td><td colspan="4">ESPECIFICACIÓN DEL INTERDISCIPLINARIO / MATERIA</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Destreza con Criterio de Desempeño</td><td>Actividad de Aprendizaje</td><td colspan="2">Indicadores</td><td>Técnica e Instrumento de Evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="8">5.HORAS DE ACOMPAÑAMIENTO DOCENTE PARA EL DESARROLLO DE ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS PARA EL REFUERZO Y FORTALECIMIENTO DE LOS APRENDIZAJES</td></tr>
<tr><td colspan="4">Actividades planificadas para las horas de acompañamiento docente para el refuerzo y fortalecimiento de los aprendizajes</td><td colspan="3">Estrategias Metodológicas Activas</td><td>Actividades Evaluativas</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">ELABORADO</td><td colspan="4">REVISADO</td><td colspan="2">APROBADO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Docentes:</td><td colspan="4">Director del área:</td><td colspan="2">Vicerrectora:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Firma:</td><td colspan="4">Firma:</td><td colspan="2">Firma:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fecha:</td><td colspan="4">Fecha:</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="9">PLANIFICACIÓN MICROCURRICULAR POR DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO POR AREA DE CONOCIMIENTO PRIORIZADO</th></tr>
<tr><td>Docente:</td><td></td><td>Área/asignatura:</td><td>Matemática</td><td>Grado/Curso:</td><td>Segundo BGU</td><td>Paralelo:</td><td colspan="2">A, B,</td></tr>
<tr><td>N.º de unidad de planificación:</td><td>5</td><td>Título de unidad de planificación:</td><td colspan="2">Cónicas: Parábola
-Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x
-Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría y
-Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x
-Ecuación canónica de la parábola con vértice (h, k) y eje focal paralelo al eje y
-Ecuación general de la parábola</td><td>Objetivos específicos de la unidad de planificación:</td><td colspan="3">O.M.5.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.</td></tr>
<tr><td>VOCACIONAL</td><td colspan="8">• Orientar a los estudiantes en un proyecto de vida a través de la contextualización de la asignatura en su quehacer diario.
• Modelar un perfil del educando que se acople a las necesidades del mundo actual.</td></tr>
<tr><td>IDENTIDAD</td><td colspan="8">Marianitas unidas trabajando por una educación de calidad y calidez con la pedagogía del amor, el diálogo y la ternura.</td></tr>
<tr><td>2. PLANIFICACIÓN</td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="4">DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:</td><td colspan="5">INDICADORES ESENCIALES DE EVALUACIÓN:</td></tr>
<tr><td colspan="4">M.5.2.16. Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano</td><td colspan="5">I.M.5.7.1. Opera analítica, geométrica y gráficamente, con vectores, rectas y planos en el espacio; expresa la ecuación de la recta de forma paramétrica y vectorial; halla mediante tres puntos dicha ecuación o a partir de la intersección de dos planos, y determina la ortogonalidad de los mismos, para efectuar aplicaciones geométricas. (I.2.)</td></tr>
<tr><td>EJES TRANSVERSALES:</td><td>Somos innovadores</td><td>PERIODOS:</td><td>3</td><td>SEMANA DE INICIO:</td><td>30/09/2024</td><td>TERMINO:</td><td colspan="2">04/10/2024</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estrategias metodológicas</td><td colspan="3">Recursos</td><td colspan="3">Actividades de evaluación/Técnicas/instrumentos</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Primer Periodo</u>

MOTIVACIÓN (10 minutos)
-Introducir el concepto de la parábola con ejemplos visuales de objetos y trayectorias.
-Para conectar el tema con la vida real, se proyectan imágenes de aplicaciones de la parábola en arquitectura, tecnología.

EXPERIENCIA (25 minutos)
-Los estudiantes utilizan hojas de papel pergamino para crear parábolas mediante la técnica de papiroflexia.
-El docente supervisará la actividad y guiará el proceso, haciendo preguntas orientadoras sobre la parábola.</td><td colspan="3">Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 29-46.

Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 31-33.</td><td colspan="3">Técnica: Conversación
Instrumento: Lista de cotejo

Técnica: Intercambios orales
Instrumento: Diálogo

Técnica: Ejercicios prácticos
Instrumento: Análisis de casos</td></tr>
</table>

REFLEXIÓN (10 minutos) - Discusión grupal guiada por el docente, donde los estudiantes compartirán sus observaciones de la actividad. -El docente profundiza en la idea del lugar geométrico, explicando sobre la parábola. **CONCEPTUALIZACIÓN (30 minutos)** -Historia -Lugar geométrico -Cónica -Parábola -Elementos de la parábola -Aplicaciones - Deducción de primera ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x. **APLICACIÓN (15 minutos)** - Los estudiantes dibujan y etiquetan las partes de una parábola (centro, vértice, directriz, eje focal). - El docente pide a los estudiantes que identifiquen la parábola en el entorno. Tarea: Investigar y traer un ejemplo de una aplicación de la parábola en la vida cotidiana o en la ciencia (astronomía, diseño, tecnología). ***<u>Segundo Periodo</u>*** **MOTIVACIÓN (10 minutos)** - Pregunta motivadora: ¿Cómo podemos representar parábolas usando tecnología? - Mostrar cómo la tecnología puede ser utilizada en la geometría para construir cónicas. **EXPERIENCIA (20 minutos)** -El docente ingresa ecuaciones de la parábola en GeoGebra para presentar cómo cambian sus gráficos cuando modifican sus variables. -Los estudiantes participan en cambiar los parámetros para observar cómo afectan la posición y el tamaño de la parábola. **REFLEXIÓN (10 minutos)** - Pregunta clave: ¿Qué sucede cuando cambiamos los valores en la ecuación de la parábola? - Discusión sobre la relación entre la ecuación y el gráfico.	**Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 29-31,38-39. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 29-46. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 34-37. **Herramientas físicas**	

CONCEPTUALIZACIÓN (30 minutos) - Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría y. - Ecuación canónica de la parábola con vértice (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x. **APLICACIÓN (20 minutos)** - Los estudiantes resuelven problemas sencillos de la parábola utilizando las ecuaciones y guiados por el docente. - Tarea: Realizar 5 construcciones de parábolas en GeoGebra ***<u>Tercer Periodo</u>*** **MOTIVACIÓN (10 minutos)** - Pregunta motivadora: ¿Qué importancia tiene la parábola en diferentes áreas de estudio? - Video corto del movimiento de objetos con desplazamiento en forma de parábola. **EXPERIENCIA (10 minutos)** -El docente ingresa ecuaciones de la parábola en GeoGebra para presentar cómo cambian sus gráficos cuando modifican valores de h, k. -Los estudiantes participan en cambiar los parámetros para observar cómo afectan la posición y el tamaño de la parábola. **REFLEXIÓN (10 minutos)** - Pregunta clave: ¿Qué sucede cuando cambiamos los valores de h o k en la ecuación de la parábola? - Discusión sobre la relación entre la ecuación y el gráfico. **CONCEPTUALIZACIÓN (25 minutos)** - Ecuación canónica de la parábola con vértice (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y - Ecuación general de la parábola - Complementar y resolver dudas acerca de las ecuaciones y sus variables **APLICACIÓN (35 minutos)** - Resolución de ejemplos avanzados donde se requiere encontrar la ecuación de una parábola a partir de información sobre sus ejes y vértices.	Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 40-42. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 29-46. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 34-37. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Página 42-43. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Página 44-46.	

- Los estudiantes resuelven ejercicios de parábolas utilizando las ecuaciones de la parábola guiados por el docente. -Tarea: Realizar ejercicios de la guía		

3. ADAPTACIONES CURRICULARES

Especificación de la Necesidad Educativa	**Especificación de la adaptación a ser aplicada**		
	Grado de adaptación:		
Destreza con Criterio de Desempeño	**Actividad de Aprendizaje**	**Indicadores**	**Técnica e Instrumento de Evaluación**

4. INTERDISCIPLINARIO

TEMA/ TÍTULO PROYECTO	**ESPECIFICACIÓN DEL INTERDISCIPLINARIO / MATERIA**		
Destreza con Criterio de Desempeño	**Actividad de Aprendizaje**	**Indicadores**	**Técnica e Instrumento de Evaluación**

5.HORAS DE ACOMPAÑAMIENTO DOCENTE PARA EL DESARROLLO DE ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS PARA EL REFUERZO Y FORTALECIMIENTO DE LOS APRENDIZAJES

Actividades planificadas para las horas de acompañamiento docente para el refuerzo y fortalecimiento de los aprendizajes	**Estrategias Metodológicas Activas**	**Actividades Evaluativas**

ELABORADO	**REVISADO**	**APROBADO**
Docentes:	**Director del área:**	**Vicerrectora:**
Firma:	**Firma:**	**Firma:**
Fecha:	**Fecha:**	**Fecha:**

PLANIFICACIÓN MICROCURRICULAR POR DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO POR AREA DE CONOCIMIENTO PRIORIZADO							
Docente:		**Área/asignatura:**	Matemática	**Grado/Curso:**	Segundo BGU	**Paralelo:**	A, B,
N.º de unidad de planificación:	5	Título de unidad de planificación:	Cónicas: Hipérbola -Ecuación canónica de la hipérbola con centro (0,0) y eje focal a x. -Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (0,0) y eje focal a y. -Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h, k) y eje focal a x. -Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h, k) y eje focal a y -Ecuación general de la parábola		Objetivos específicos de la unidad de planificación:	**O.M.5.6.** Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.	
VOCACIONAL	• Orientar a los estudiantes en un proyecto de vida a través de la contextualización de la asignatura en su quehacer diario. • Modelar un perfil del educando que se acople a las necesidades del mundo actual.						
IDENTIDAD	Marianitas unidas trabajando por una educación de calidad y calidez con la pedagogía del amor, el diálogo y la ternura.						
2. PLANIFICACIÓN							

DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:	**INDICADORES ESENCIALES DE EVALUACIÓN:**
M.5.2.16. Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano	**I.M.5.7.1.** Opera analítica, geométrica y gráficamente, con vectores, rectas y planos en el espacio; expresa la ecuación de la recta de forma paramétrica y vectorial; halla mediante tres puntos dicha ecuación o a partir de la intersección de dos planos, y determina la ortogonalidad de los mismos, para efectuar aplicaciones geométricas. (I.2.)

EJES TRANSVERSALES:	Somos innovadores	**PERIODOS:**	3	**SEMANA DE INICIO:**	07/10/2024	**TERMINO:**	11/10/2024

Estrategias metodológicas	**Recursos**	**Actividades de evaluación/Técnicas/instrumentos**
<u>Primer Periodo</u> **MOTIVACIÓN (10 minutos)** -Introducir el concepto de hipérbolas con ejemplos visuales de objetos y trayectorias. -Para conectar el tema con la vida real, se proyectan imágenes de aplicaciones de la hipérbola en arquitectura, tecnología. **EXPERIENCIA (25 minutos)** -Los estudiantes utilizan hojas de papel pergamino para crear hipérbolas mediante la técnica de papiroflexia. -El docente supervisará la actividad y guiará el proceso, haciendo preguntas orientadoras sobre la hipérbola.	**Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 67-80. **Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 69-70.	**Técnica:** Conversación **Instrumento:** Lista de cotejo **Técnica:** Intercambios orales **Instrumento:** Diálogo **Técnica:** Ejercicios prácticos **Instrumento**: Análisis de casos

REFLEXIÓN (10 minutos) - Discusión grupal guiada por el docente, donde los estudiantes compartirán sus observaciones de la actividad. -El docente profundiza en la idea del lugar geométrico, explicando sobre la hipérbola.		
CONCEPTUALIZACIÓN (30 minutos) -Historia -Lugar geométrico -Cónica -Hipérbola -Elementos de la hipérbola -Aplicaciones - Deducción de primera ecuación canónica de la hipérbola con centro (0,0) y eje de focal a x.	**Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 67-68,74-75.	
APLICACIÓN (15 minutos) - Los estudiantes dibujan y etiquetan las partes de una hipérbola (centro, vértice, eje focal entre otras). - El docente pide a los estudiantes que identifiquen la hipérbola en el entorno. Tarea: Investigar y traer un ejemplo de una aplicación de la hipérbola en la vida cotidiana o en la ciencia (astronomía, diseño, tecnología). ***<u>Segundo Periodo</u>***	**Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 67-80.	
MOTIVACIÓN (10 minutos) - Pregunta motivadora: ¿Cómo podemos representar hipérbolas usando tecnología? - Mostrar cómo la tecnología puede ser utilizada en la geometría para construir cónicas.	**Herramientas físicas** Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 71-74.	
EXPERIENCIA (20 minutos) -El docente ingresa ecuaciones de la hipérbola en GeoGebra para presentar cómo cambian sus gráficos cuando modifican sus variables. -Los estudiantes participan en cambiar los parámetros para observar cómo afectan la posición y el tamaño de la hipérbola.		
REFLEXIÓN (10 minutos) - Pregunta clave: ¿Qué sucede cuando cambiamos los valores en la ecuación de la hipérbola? - Discusión sobre la relación entre la ecuación y el gráfico.	**Herramientas físicas**	

<table>
<tr>
<td>CONCEPTUALIZACIÓN (30 minutos)
- Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (0,0) y eje focal a y.
- Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h, k) y eje focal a x.

APLICACIÓN (20 minutos)
- Los estudiantes resuelven problemas sencillos de la hipérbola utilizando las ecuaciones y guiados por el docente.
- Tarea: Realizar 5 construcciones de hipérbola en GeoGebra

<u>Tercer Periodo</u>

MOTIVACIÓN (10 minutos)
- Pregunta motivadora: ¿Qué importancia tiene la hipérbola en diferentes áreas de estudio?
- Video corto de objetos y trayectorias en forma de hipérbola.

EXPERIENCIA (10 minutos)
-El docente ingresa ecuaciones de la hipérbola en GeoGebra para presentar cómo cambian sus gráficos cuando modifican valores de h, k.
-Los estudiantes participan en cambiar los parámetros para observar cómo afectan la posición y el tamaño de la hipérbola.

REFLEXIÓN (10 minutos)
- Pregunta clave: ¿Qué sucede cuando cambiamos los valores de h o k en la ecuación de la hipérbola?
- Discusión sobre la relación entre la ecuación y el gráfico.

CONCEPTUALIZACIÓN (25 minutos)
- Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h, k) y eje focal a y
- Ecuación general de la hipérbola
- Complementar y resolver dudas acerca de las ecuaciones y sus variables

APLICACIÓN (35 minutos)
- Resolución de ejemplos avanzados donde se requiere encontrar la ecuación de una hipérbola a partir de información sobre sus ejes y vértices.
- Los estudiantes resuelven ejercicios de hipérbolas utilizando las ecuaciones de la hipérbola guiados por el docente.
-Tarea: Realizar ejercicios de la guía</td>
<td>Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 76.

Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 80-81.

Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 67-80.

Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Páginas 71-74.

Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Página 77-78.

Herramientas físicas
Guía de Recursos Didácticos para la enseñanza aprendizaje de la unidad temática cónica. Página 80-83.</td>
<td></td>
</tr>
<tr><td colspan="3">3. ADAPTACIONES CURRICULARES</td></tr>
<tr><td>Especificación de la Necesidad Educativa</td><td colspan="2">Especificación de la adaptación a ser aplicada</td></tr>
</table>

	Grado de adaptación:		
Destreza con Criterio de Desempeño	**Actividad de Aprendizaje**	**Indicadores**	**Técnica e Instrumento de Evaluación**
4. INTERDISCIPLINARIO			
TEMA/ TÍTULO PROYECTO	**ESPECIFICACIÓN DEL INTERDISCIPLINARIO / MATERIA**		
Destreza con Criterio de Desempeño	**Actividad de Aprendizaje**	**Indicadores**	**Técnica e Instrumento de Evaluación**

5.HORAS DE ACOMPAÑAMIENTO DOCENTE PARA EL DESARROLLO DE ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS PARA EL REFUERZO Y FORTALECIMIENTO DE LOS APRENDIZAJES		
Actividades planificadas para las horas de acompañamiento docente para el refuerzo y fortalecimiento de los aprendizajes	**Estrategias Metodológicas Activas**	**Actividades Evaluativas**

ELABORADO	**REVISADO**	**APROBADO**
Docentes:	**Director del área:**	**Vicerrectora:**
Firma:	**Firma:**	**Firma:**
Fecha:	**Fecha:**	**Fecha:**