UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN HUMANAS Y TECNOLOGÍAS
CARRERA DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA

Título:

Software GeoGebra para el Aprendizaje de Ecuaciones Polares en Estudiantes de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física, UNACH.

Trabajo de Titulación para optar al título de Licenciado en Pedagogía de las Matemáticas y la Física

Autor:
Ponce Ortiz, Nick Eduardo

Tutor:
PhD. Carmen Varguillas Carmona

Riobamba, Ecuador. *2024*

DECLARATORIA DE AUTORÍA

Yo, Nick Eduardo Ponce Ortiz, con cédula de ciudadanía 2300016777, autor (a) del trabajo de investigación titulado: Software Geogebra para el Aprendizaje de Ecuaciones Polares en Estudiantes de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física, UNACH, certifico que la producción, ideas, opiniones, criterios, contenidos y conclusiones expuestas son de mí exclusiva responsabilidad.

Asimismo, cedo a la Universidad Nacional de Chimborazo, en forma no exclusiva, los derechos para su uso, comunicación pública, distribución, divulgación y/o reproducción total o parcial, por medio físico o digital; en esta cesión se entiende que el cesionario no podrá obtener beneficios económicos. La posible reclamación de terceros respecto de los derechos de autor (a) de la obra referida, será de mi entera responsabilidad; librando a la Universidad Nacional de Chimborazo de posibles obligaciones.

En Riobamba, 15 de noviembre de 2023.

Nick Ponce

Nick Eduardo Ponce Ortiz

C.I: 2300016777

ACTA FAVORABLE - INFORME FINAL DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

En la Ciudad de Riobamba, a los **15** días del mes de **Noviembre** de **2023**, luego de haber revisado el Informe Final del Trabajo de Investigación presentado por el estudiante **NICK EDUARDO PONCE ORTIZ** con CC: **2300016777**, de la carrera **PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA** y dando cumplimiento a los criterios metodológicos exigidos, se emite el **ACTA FAVORABLE DEL INFORME FINAL DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN** titulado **"SOFTWARE GEOGEBRA PARA EL APRENDIZAJE DE ECUACIONES POLARES EN ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA, UNACH",** por lo tanto se autoriza la presentación del mismo para los trámites pertinentes.

Firmado electrónicamente por:
CARMEN SIAVIL
VARGUILLAS CARMONA

PhD. Carmen Varguillas Carmona
TUTOR(A)

CERTIFICADO DE LOS MIEMBROS DEL TRIBUNAL

Quienes suscribimos, catedráticos designados Miembros del Tribunal de Grado para la evaluación del trabajo de investigación **Software Geogebra para el Aprendizaje de Ecuaciones Polares en Estudiantes de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física, Unach.**, presentado por **Nick Eduardo Ponce Ortiz**, con cédula de identidad número **2300016777**, bajo la tutoría de **PhD. Carmen Siavil Varguillas Carmona**; certificamos que recomendamos la APROBACIÓN de este con fines de titulación. Previamente se ha evaluado el trabajo de investigación y escuchada la sustentación por parte de su autor; no teniendo más nada que observar.

De conformidad a la normativa aplicable firmamos, en Riobamba al 24 de enero de 2024.

Sandra Elizabeth Tenelanda Cudco, Mgs.
PRESIDENTE DEL TRIBUNAL DE GRADO

Laura Esther Muñoz Escobar, Mgs.
MIEMBRO DEL TRIBUNAL DE GRADO

Jhonny Patricio Ilbay Cando, Mgs.
MIEMBRO DEL TRIBUNAL DE GRADO

C E R T I F I C A C I Ó N

Que, **PONCE ORTIZ NICK EDUARDO** con CC: **2300016777**, estudiante de la Carrera **PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA**, Facultad de **CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS**; ha trabajado bajo mi tutoría el trabajo de investigación titulado "**SOFTWARE GEOGEBRA PARA EL APRENDIZAJE DE ECUACIONES POLARES EN ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA, UNACH.**", cumple con el 5 %, de acuerdo al reporte del sistema Anti plagio **TURNITIN**, porcentaje aceptado de acuerdo a la reglamentación institucional, por consiguiente autorizo continuar con el proceso.

Riobamba, 24 de enero de 2024

Firmado electrónicamente por:
CARMEN SIAVIL
VARGUILLAS CARMONA

PhD. Carmen Siavil Varguillas Carmona
TUTOR(A)

DEDICATORIA

Con humildad y gratitud, dedico este trabajo de investigación a Dios. Con su luz ha guiado mis pasos en este fascinante viaje, además de colocar en el camino a personas maravillosas que aportaron significativamente en mi etapa estudiantil a nivel básico, bachillerato y superior.

Con amor y gratitud, dedico el esfuerzo de la etapa estudiantil al pilar de mi vida, mi mamá, quien ha desplegado todos sus esfuerzos para salir adelante, y ha hecho lo posible e imposible para que no me falte nada, al mismo tiempo de formarme como persona y futuro profesional.

Este trabajo es tanto tuyo como mío, y te lo dedico a ti mamá por haberme guiado con amor, por ser mi fuente inagotable de inspiración y fortaleza, y haber hecho posible este viaje, pues tu dedicación y sacrificio son las raíces que sostienen el árbol de mis logros.

¡Gracias, mamá, por ser mi eterna fuente de luz y amor!

Con amor, Nick.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, agradezco a Dios por brindarme sabiduría, fortaleza y visión en este maravilloso viaje de conocimiento, y haber hecho posible la culminación de este trabajo de investigación.

Así mismo, expreso mi sincero agradecimiento a los docentes que fueron parte de mi trayectoria académica, pues con su orientación y paciencia han sido la brújula que ha guiado cada paso de este proceso. Mención especial a mi tutora Carmen Varguillas por el tiempo brindado y sus valiosas enseñanzas, que fueron como un faro en la oscuridad académica.

De igual manera, al pilar fundamental de mi existencia que es mi familia, les agradezco por su amor incondicional, comprensión y apoyo constante. Por último, pero no menos importante a mis amigos, gracias por compartir risas, tristezas, desafíos y momentos inolvidables.

Sin duda este trabajo no es solo resultado de mi esfuerzo, sino fruto de las bendiciones, apoyo y amor de todos aquellos que han contribuido de alguna manera; por ello, estas palabras es el reflejo de mi profunda gratitud hacia cada uno de ustedes.

Nick Ponce.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS.

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

En esta época donde prima la tecnología, aprender matemáticas debe ser una experiencia dinámica y enriquecedora con una fusión de software y pedagogía, por ello el presente trabajo se enfoca en un tópico específico con el objetivo de diseñar una guía práctica con GeoGebra para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares. En tal sentido, para su desarrollo la metodología empleada fue de enfoque cuantitativo con diseño no experimental y alcance descriptivo-propositivo, siendo sujetos de estudio los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física, con mayor énfasis en sexto, séptimo y octavo semestre, a quienes se le aplicó la técnica de encuesta con los instrumentos de prueba objetiva y cuestionario. Los resultados referentes a ecuaciones y gráficas polares arrojaron que 40% no domina la parte conceptual y 50% lo procedimental; por otro lado, 81% enfatiza las cualidades que ofrece el software, como facilidad de manejo, aprendizaje autónomo y representación visual efectiva, lo cual fue la base para el desarrollo de una guía que incite a generar aprendizajes significativos. En conclusión, se evidenció una falencia en la preparación y entendimiento de los estudiantes en este tópico específico de la matemática, en especial las habilidades procedimentales, razón por la cual se diseñó la guía para preparar a los futuros educadores de manera significativa y proporcionar un recurso que inspire a las mentes del mañana.

Palabras claves: Aprendizaje, GeoGebra, Gráficas Polares, Guía Práctica

ABSTRACT

In this time of technology, learning mathematics should be a dynamic and enriching experience with a fusion of software and pedagogy. Therefore, this work focuses on a specific topic to design a practical guide with GeoGebra for learning equations and polar graphs. In this sense, the methodology used for its development was a quantitative approach with a non-experimental design and descriptive-propositive scope, being the subjects of study the students of the Pedagogy of Experimental Sciences: Mathematics and Physics, with greater emphasis on the sixth, seventh, and eighth semester, to whom the survey technique was applied with the instruments of objective test and questionnaire. The results regarding equations and polar graphs showed that 40% did not master the conceptual part and 50% the procedural part; on the other hand, 81% emphasized the qualities offered by the software, such as ease of use, autonomous learning, and effective visual representation, which was the basis for the development of a guide that encourages the generation of significant learning. In conclusion, there was evidence of a lack of preparation and understanding of students in this specific topic of mathematics, especially procedural skills, which is why the guide was designed to prepare future educators meaningfully and provide a resource that inspires the minds of tomorrow.

Keywords: Learning, GeoGebra, Polar Graphs, Practical Guide

Firmado electrónicamente por:
SOFIA FERNANDA
FREIRE CARRILLO

Reviewed by:

Mgs. Sofía Freire Carrillo

ENGLISH PROFESSOR

C.C. 0604257881

CAPÍTULO I. INTRODUCCION.

En el campo de la docencia, investigar e implementar nuevas maneras y formas de enseñar, trasciende el conocimiento en los discentes, permitiendo así que puedan comprender y experimentar los contenidos teóricos. Es por ello que Coloma et al. (2020), hacen énfasis en que los softwares en ciencias exactas son herramientas significativas, ya sea en Física o Matemática, con menor medida de utilización en esta última, dado que los docentes mantienen sus clases magistrales y se resisten a innovar en la aplicación de estos. Por ende, las personas que están inmersas en el campo de la docencia deben investigar e implementar nuevas maneras y formas de trascender el conocimiento en los discentes, para que ellos puedan comprender y experimentar los contenidos teóricos.

Dentro de la Matemática, uno de los tantos contenidos que demandan de estas herramientas son las ecuaciones polares, mismas que requieren de la implementación de un software para su enseñanza, donde los estudiantes puedan observar de forma eficiente las curvas de las ecuaciones, ya que al realizarlas de forma manual es difícil identificar y unir sus puntos, así como la forma que estas adquieren. Permitiendo de esta manera al docente, facilitar la adquisición de conocimientos tanto teóricos como prácticos sin dejar de lado la explicación del cómo y por qué se generan esos puntos que luego se transforman en maravillosas gráficas.

Argumentando a lo anterior que, Chau y Sánchez (2010) mencionan que es posible representar matemáticamente formas de seres presentes en la naturaleza a través de una ecuación polar entendiendo su significado; por ejemplo, las flores donde se puede graficar sus pétalos que representan a la belleza, o una mariposa que es el emblema de la transformación y simbolismo de la libertad en diferentes formas; entre otras. Es así la importancia de relacionarla con la realidad esta y todas las temáticas de la Matemática.

Ante lo anterior, mencionar que, un docente debe trasmitir el conocimiento de forma eficaz y eficiente apoyándose en la tecnología para lograr aprendizajes más dinámicos y significativos, siendo GeoGebra parte de esas herramientas que permiten a los estudiantes interactuar, combinando los conocimientos teóricos con la práctica mediante la construcción de actividades y gráficas que se relacionan con la realidad. Pues, este software "es un excelente medio electrónico-digital que permite visibilizar las principales características, propiedades y fundamento lógico-teórico de contenidos matemáticos" (Benavides et al., 2016, p. 3).

Visto de esta forma la idea central que orientó el presente trabajo fue conocer el empleo de GeoGebra en el aula de clase en la temática de ecuaciones y gráficas polares, e impulsar el aprendizaje de otras mediante el diseño de una guía práctica sobre construcción de gráficas polares con la utilización del software para la comprensión de sus características, generando así significado en las expresiones matemáticas con relaciones pertinentes del entorno.

Esta investigación tuvo un enfoque cuantitativo, pues se recopilaron datos con medición de escala ordinal, los mismos que con ayuda de la estadística descriptiva y el software Rstudio permitió analizar el uso de GeoGebra en el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares logrando un nivel de investigación descriptivo; los datos fueron obtenidos de forma directa, es decir sin manipular las variables, dando así a un diseño de investigación no experimental. Cabe recalcar que los datos se consiguieron mediante la técnica de la encuesta, y su instrumento el cuestionario, aplicado a los estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.

En cuanto a la estructura general de este estudio, se describe a continuación:

Capítulo I: Presentando a la introducción, antecedentes de la investigación, planteamiento y formulación del problema con sus respectivas preguntas directrices, además de los objetivos de la investigación y justificación.

Capítulo II: Conformado por la información bibliográfica para sustentar el actual estado del arte y la respectiva fundamentación teórica de la temática en específico consolidada por artículos científicos, libros y contribuciones académicas.

Capítulo III: Representa la metodología de la investigación, donde se describe el enfoque, diseño, tipo, así como los instrumentos para recoger la información con su respectiva población y muestra.

Capítulo IV: Apartado base y trascendental en la aceptación de la propuesta, pues se sintetiza los resultados de los informantes por medio de tablas y gráficas de cada instrumento utilizado y diseñado para el estudio.

Capítulo V: Muestra el cumplimiento de los objetivos propuestos por medio de conclusiones y recomendaciones de la investigación.

Capítulo VI: El producto de la investigación, que es la guía práctica, la cual consta de aspectos preliminares (presentación, justificación y objetivos de la guía) y seis unidades de desarrollo en bases de GeoGebra, Coordenadas Polares, Rectas y Circunferencias, Caracoles de Pascal, Rosas y Cónicas.

1.1 Antecedentes

Hernández et al. (2014) afirman que es necesario conocer los antecedentes de la investigación, pues estos permiten conocer lo que se ha hecho con respecto a un tema, ayudando a estructurar y seleccionar formalmente la idea del estudio con la perspectiva principal desde la cual se abordará. Por lo cual, a continuación, se presenta antecedentes de investigativas relacionadas al tema y que aportan al desarrollo de la presente investigación.

En el contexto internacional, se destacan a los siguientes investigadores:

Morales et al. (2023), en su trabajo investigativo que tuvo el objetivo de analizar la producción científica sobre el impacto del software GeoGebra en el aprendizaje de la matemática, aplicó una metodología cualitativa de tipo descriptiva-documental con una revisión sistemática en la base de datos Scopus, donde en el proceso de revisión de un total de 72 artículos seleccionó 16 que aportaban al objeto de estudio entre los años 2011 – 2022. De este modo, observaron un predominio en estudiantes de nivel secundario, pues solo cuatro artículos eran relacionados al nivel superior, no obstante, destaca las potencialidades generales que ofrece el software como la oportunidad de elaborar materiales didácticos online, además de mejorar las habilidades de comunicación matemática.

Los investigadores concluyen que GeoGebra es un software idóneo para el proceso de enseñanza – aprendizaje, ya que permite ilustrar los conceptos y procedimientos matemáticos de forma interactiva. De allí, que para la presente investigación motiva a indagar y describir la utilización de GeoGebra en los estudiantes de formación docente de Matemática y Física, por el aporte que tendría este en su futura labor.

En el mismo sentido, Alabdulaziz et al. (2021) en su investigación con el principal objetivo de identificar la efectividad del programa GeoGebra para desarrollar el rendimiento académico en Matemática, aplicó un enfoque cuantitativo con diseño cuasi experimental, es decir, que existió un grupo de control y otro experimental de una muestra aleatoria de 60 estudiantes. El instrumento aplicado fue una prueba objetiva en dos tiempos, es decir pre y post al desarrollo de las clases con el software GeoGebra en coordenadas polares y números complejos. Por su parte, los resultados revelaron que el grupo experimental fue superior al de control en el rendimiento de matemáticas, por lo que los investigadores recomiendan incluir el software GeoGebra en los planes de estudio en las diferentes etapas de la educación matemática en general, y mucho más en coordenadas polares y números complejos.

Además, González (2019) en su trabajo de posgrado resalta que los docentes en la educación media se enfatizan en las coordenadas cartesianas, obviando otras necesarias como es el caso de las coordenadas polares. De allí, que su objetivo fue diseñar una estrategia metodológica mediada por GeoGebra para potencializar el pensamiento geométrico en los estudiantes de la institución educativa Samuel Barrientos Restrepo, por lo que empleó un modelo de investigación – acción educativa con enfoque mixto, los instrumentos usados fueron una prueba de conocimiento y registro de observación aplicados a veinte estudiantes de la unidad educativa mencionada del municipio de Medellín.

Los principales resultados encontrados fueron que la mayoría de encuestados no responde a las preguntas relacionadas a la competencia formulación y ejecución, además de la falta de conocimientos sobre coordenadas polares, debido a que no se está ofreciendo al alumno diversas alternativas de resolución de problemas y/o modelación matemática; posterior realizó su intervención pedagógica en el aula de clase con apoyo de GeoGebra en el tema en estudio, lo que le permitió concluir que el uso de GeoGebra fue positivo y satisfactorio, pues el discente toma el problema, lo discute, analiza y planea una estrategia de solución apoyado en la herramienta, dando un desarrollo óptimo de sus competencias matemáticas. Visto de esta forma, este trabajo orientó a tener una visión clara de la problemática, además de bosquejar las dimensiones y reactivos de los instrumentos para obtener mejores resultados y conocer a fondo a los sujetos en estudio.

En el contexto nacional, se destacan a los siguientes investigadores:

Sarmiento y Toledo (2022) en su investigativa propusieron una guía para el desarrollo de un plan didáctico dirigido a los docentes que imparten la asignatura de matemáticas en los diferentes niveles educativos del área rural de Cuenca, aplicando el enfoque cuantitativo con diseño no experimental y nivel proyectivo. El instrumento fue un cuestionario enfocado a describir y conocer el uso de recursos tecnológicos como GeoGebra dentro del salón de clases de los 25 docentes del área rural, teniendo como principal resultado que 60% de los encuestados utilizan con poca frecuencia algún tipo de software educativo especializado en la enseñanza de la matemática para impartir sus clases.

De este modo, obtuvieron un fundamento trascendental para su propuesta, en la cual aplicaron el modelo ADDIE para el uso del software GeoGebra dentro de la asignatura de estudio, donde explican que realizar en cada etapa del modelo, así concluyen que el software GeoGebra con una respectiva guía metodológica de aplicación se puede articular en los niveles educativos con sus funcionalidades dentro y fuera del salón de clases, por consiguiente los estudiantes desarrollan la capacidad de pensamiento, razonamiento, y aplican los conocimientos matemáticos en situaciones de la cotidianidad.

Otro trabajo significativo en el campo de estudio de GeoGebra para el aprendizaje de contenidos matemáticos es el de Haro (2020), pues si bien no está enfocado a coordenadas polares, su tópico es anterior al estudio de las mismas, por lo que se considera valioso el aporte y enfoque que le presta a la investigación desarrollada a los estudiantes de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, Matemática y Física de la Universidad Central del Ecuador, donde se propuso analizar la influencia del software libre GeoGebra Clásico 5.0 en la enseñanza de los sólidos de revolución, en los estudiantes del Quinto Semestre, a más de aportar con una propuesta final.

La investigación asumió un diseño cuasi-experimental con enfoque cualitativo-cuantitativo, nivel de profundidad exploratorio, además se realizó el debido estudio documental y se aplicó un instrumento validado por expertos, arrojando como resultado principal que no se ha implementado el uso de aplicaciones móviles en la institución, es así que el investigador concluye que es evidente la necesidad de los estudiantes en ajustarse a la actualización y desarrollo de las nuevas tecnologías que brinda la educación para alcanzar mejores niveles de enseñanza - aprendizaje en diferentes contenidos de Cálculo.

Por último es conveniente acotar el trabajo de Jadán (2022), que tuvo como objetivo elaborar una guía didáctica con enfoque constructivista para problemas de optimización en Cálculo Diferencial apoyado en GeoGebra. Se utilizó un enfoque cuantitativo con carácter explicativo, teniendo como población a los estudiantes de la carrea de matemáticas y física de la Universidad de Cuenca; además con la noción de conocer los problemas de aprendizaje que poseen los estudiantes aplicó un cuestionario online acerca de los temas en estudio. El investigador recalcó que en la elaboración de la guía se incluyeron temas bases hasta llegar a la resolución de problemas de optimización, donde priorizó el uso de GeoGebra como recurso didáctico en el desarrollo de las diferentes clases. En función de lo planteado, se observa que los estudios han explorado la efectividad de GeoGebra en la educación, destacando la compresión de conceptos matemáticos complejos y abstractos, por lo que el presente trabajo busca seguir la misma línea de investigación en coordenadas y gráficas polares.

1.2 Planteamiento del problema

La utilización de herramientas tecnológicas en el área de las ciencias exactas es escasa, tal como lo plantea Asanza et al. (2020), el uso de las TIC sigue siendo poco desarrollado, a pesar de los resultados positivos que brinda su manejo, esto puede deberse a metodologías tradicionalistas o las brechas de comunicación que existen a nivel mundial. Por lo tanto, se debe promover un cambio desde los estudiantes que se están formando como docentes, haciendo uso de software que les permitan lograr aprendizajes significativos y en un futuro ejercer una buena práctica docente.

Uno de ellos y más conocido por todos en el campo de la Matemática es el software GeoGebra, puesto que las ventajas de su empleo dentro del aula de clases son diversas. Preiner (2008) destaca algunas de ellas, por ejemplo: software de geometría dinámica, múltiples representaciones de objetos matemáticos que fomentan la comprensión de los conceptos, manejo de forma intuitiva por parte de los estudiantes, manipuladores virtuales que permiten la creación de materiales basados en la web y, además, es de código abierto, por lo que cualquier persona lo puede usar sin costo, manejándolo desde la versión para escritorio o de la web.

Por ello, es necesario profundizar la aplicación de tecnología en la enseñanza universitaria en asignaturas y temáticas específicas, pues así se da lugar y sentido a estos procesos formativos con énfasis en “los procesos de formación docente y los escenarios por los que esta circula, como son la teorización, las perspectivas de los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación” (Sánchez et al., 2021, p. 7). Es decir que, la enseñanza involucra diferentes aspectos, los mismos que deben ser superados para lograr aprendizajes significativos, y llegar al fin último de la educación, que es formar de manera integral al educando.

No obstante, Baptista (2017) en su investigación “O Ensino de coordenadas polares através do software GeoGebra”, muestra que el estudio de las Coordenadas Polares con el uso de GeoGebra se puede desarrollar desde el bachillerato, enseñando desde sus fundamentos teóricos, pues si no se tiene esas bases, en el nivel superior se complica el desarrollo de las ecuaciones polares. Así mismo, existen planteamientos como el de Chau y Sánchez (2010), que relaciona las coordenadas polares como unas curvas maravillosas mostrando que las gráficas de las diferentes ecuaciones se las puede explicar con las distintas formas que adopta la naturaleza, como de algunas flores, caracoles, mariposas, espirales, etc.

A pesar que, los estudios han abordado desde lo teórico las diferentes ecuaciones al ejemplificar su clasificación y relación con la naturaleza, y sus características en las representaciones gráficas; son muy pocos los que se enfocan en detallar cómo es el uso de este software matemático por los estudiantes, y la construcción de ecuaciones y gráficas polares. En tal sentido, Vicent et al. (2019) en su trabajo titulado “Propuesta para la enseñanza/aprendizaje de las coordenadas polares con GeoGebra”, describe una propuesta de clase, con énfasis en tres fases a desarrollarse paso a paso mediante la utilización directa del software GeoGebra en el aprendizaje del tópico de coordenadas polares, siendo esta una experiencia referencial para el desarrollo del presente estudio.

Aunado a esto, que el rendimiento académico de los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física desde la implementación de la carrera en la asignatura de Cálculo de Varias Variables, se ubica en un promedio de calificación de 7 puntos, es decir un grupo de estudiantes no alcanzan totalmente el resultado de aprendizaje para cada una de las unidades, y por ende de la cátedra. Pues existen temáticas que se les dificulta a los discentes, así lo planteó la docente de la asignatura cuando afirmó, el contenido de la asignatura de Cálculo de Varias Variables donde los estudiantes presentan mayor dificultad es funciones vectoriales e integrales múltiples, también mencionó respecto al contenido de ecuaciones y gráficas polares que se logra un 70% del resultado de aprendizaje, en este caso utilizar una herramienta tecnológica como GeoGebra u Octave pueden potencializar el aprendizaje de estas temáticas, de la misma manera considera de gran utilidad el uso de una guía práctica para la implementación de estos software en la construcción de gráficas polares e interpretación de sus ecuaciones (S. Tenelanda comunicación personal, 03 de marzo de 2023).

Por tal motivo resulta significativo conocer el uso del software en los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo y proponer un material sobre la temática. Teniendo que esta investigación pretende diseñar una guía práctica con el software GeoGebra para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares en los estudiantes de la carrera en mención.

1.2.1 Formulación del problema

¿Cuáles son los elementos estructurales de una guía práctica para el aprendizaje de ecuaciones polares con el uso del software GeoGebra dirigida a los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo?

1.2.2 Preguntas directrices

- ¿Cuál es el nivel de conocimiento en ecuaciones y gráficas polares de los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo?
- ¿Cuál es el nivel de utilización del software GeoGebra en el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares de los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo?
- ¿Cómo se elabora una guía práctica sobre ecuaciones y construcción de gráficas polares con el software GeoGebra?

1.3 Justificación

El aprendizaje de las ciencias exactas presenta desafíos significativos en los diferentes tópicos, tanto para docentes como estudiantes. A menudo, se genera dificultades en su comprensión y asimilación por lo abstracto y alejado de las aplicaciones prácticas, o la falta de interactividad en la adquisición de la información.

De hecho, aplicar la tecnología en el aprendizaje de Matemática es muy gratificante, pues los estudiantes logran mayor comprensión de las temáticas tratadas en el salón de clases, propiciando un ambiente de trabajo con motivación y convirtiendo los conocimientos teóricos a prácticos. Por lo tanto, resulta importante usar algún software educativo para consolidar el aprendizaje, siendo GeoGebra uno de los más conocidos y aplicados por todos en el campo de la Matemática, puesto que las ventajas de su empleo dentro del aula de clases son diversas.

En tal sentido, el presente trabajo aporta con la propuesta final de una guía que tiene como prioridad robustecer la educación para que los estudiantes demuestren compresión, análisis, y efecto favorable en la construcción de las diferentes gráficas de ecuaciones polares potencializando así el aprovechamiento. De igual manera, que se constituya de base para posteriores investigaciones referente a la temática en estudio, con diseños experimentales que permitan comprobar el beneficio del material elaborado, así como la aplicación del software en el salón de clase.

El estudio está dirigido a los estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física, proporcionándoles una guía práctica sobre ecuaciones polares utilizando el software GeoGebra, para ello es necesario identificar el manejo del software por parte de los estudiantes. Posterior, con los datos describir su uso y obtener las bases necesarias para profundizar en la elaboración de la guía de aprendizaje. Teniendo así que, la investigación al nivel y diseño investigativo propuestos fue factible desarrollarla, ya que existió la colaboración docente de los diferentes semestres para la aplicación del instrumento y desarrollo del estudio, así como la disponibilidad de los recursos a utilizarse.

Finalmente, la elaboración de una guía práctica sobre la construcción de las diferentes gráficas polares permitirá a los estudiantes en estudio, así como futuros que cursarán la asignatura de Cálculo de Varias Variables afianzar sus conocimientos y autoeducarse en esta temática de una manera teórico-práctica, logrando significancia en el proceso formativo para su futura inserción en el campo laboral.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Diseñar una guía práctica con GeoGebra para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares dirigida a estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Diagnosticar el nivel de conocimiento en ecuaciones y gráficas polares de los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.
- Describir el nivel de utilización del software GeoGebra en el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares de los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo.
- Elaborar una guía práctica para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares con el uso del software Geogebra dirigida a los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO.

2.1 Estado del arte

Cenas et al. (2021), en su investigación titulada "GeoGebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios", que tuvo como objetivo reflexionar la influencia del software GeoGebra en el aprendizaje significativo de las matemáticas en estudiantes universitarios, aplicando una metodología de búsqueda de información científica en bases como Proquest, Scopus y Google Académico.

El investigador hizo una revisión sistemática donde encontró que las TIC son herramientas que favorecen la trasmisión de información en menos tiempo, además permiten el establecimiento de un ambiente de aprendizaje favorable y significativo con motivación e interactividad, pues el alumno analiza de manera detallada contenidos matemáticos, al mismo tiempo que alcanza objetivos claves para el desarrollo pleno de sus competencias matemáticas. También, concluye que el Programa Aplicativo o software GeoGebra es una estrategia didáctica para mejorar el rendimiento académico por su aporte al aprendizaje significativo, teniendo así que este trabajo aporta significativamente a tener una idea sobre el contexto del software utilizado en estudiantes universitarios.

Continuando con el trabajo de Baptista (2017) que se titula "O Ensino de coordenadas polares através do software GeoGebra", con el objetivo principal de mostrar que el estudio de las coordenadas polares se puede desarrollar en el bachillerato, destacando que las mismas son un contenido necesario para algunos cursos superiores en el área de las ciencias exactas, pero poco conocidas en el bachillerato y menos sus aplicaciones. Baptista aplicó una metodología de diseño experimental y nivel explicativo, donde realiza el estudio de gráficas de curvas en coordenadas polares por medio del software GeoGebra, encontrando que son varias las posibilidades para introducir la enseñanza de las coordenadas polares y algunas de sus curvas en la escuela secundaria, sin embargo, dicho contenido debe tener base en aspectos del plano cartesiano, la enseñanza de funciones y trigonometría.

Finalmente, el investigador destaca que GeoGebra es un excelente instrumento tecnológico para la enseñanza de las matemáticas en específico coordenadas polares, pues lleva al alumno a un mayor interés por los contenidos estudiados en el aula, superando las expectativas en las que lo dirige al explorar herramientas matemáticas. Si bien el análisis se lleva a cabo en bachillerato, es importante resaltar que es uno de los pocos trabajos que se enmarcan directamente en la temática de estudio desde sus bases matemáticas, aportando ideas relevantes para el desarrollo del marco conceptual de la indagación.

Así mismo, la investigación titulada "El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática" con objetivo de analizar los beneficios de GeoGebra en los espacios de formación continua e investigación y dentro del marco de la educación matemática, a través del enfoque cuantitativo y la aplicación de un cuestionario a 799 docentes de un muestreo a nivel nacional. Arteaga et al. (2019) encontraron una valoración positiva sobre este software, por parte de los usuarios encuestados, así como, el interés de docentes no usuarios que sugieren cursos de capacitación en GeoGebra a nivel nacional, concluyendo que los beneficios son diversos entre los que se resalta el desarrollo de habilidades para el trabajo colaborativo, la verificación de postulados y la comprensión de conceptos.

Por último el estudio de Campaña (2019) titulado “Guía didáctica para el aprendizaje de matemática utilizando GeoGebra en estudiantes de segundo de bachillerato” donde su orientación y objetivo principal fue el desarrollo de una guía didáctica en el uso del software GeoGebra para docentes y estudiantes en la enseñanza aprendizaje de Matemática de la Unidad Educativa Manuela Sáenz. Utilizó el enfoque mixto, interpretó resultados de manera cuantitativa y cualitativa tomando en cuenta que el nivel de profundidad fue exploratorio-descriptivo con una participación directa de la realidad investigativa para lograr una aprehensión completa del objeto estudiado.

Campaña se propuso el uso de GeoGebra apoyada en herramientas virtuales sincrónicas y asincrónicas con actividades interactivas, por lo que la propuesta elaborada en la plataforma Jimdo permite a los nativos digitales navegar virtualmente comprendiendo las destrezas de Matemática y superar el temor que generaban ciertos contenidos de mayor razonamiento y abstracción. De allí, que toda la guía didáctica se fundamentó mediante el constructivismo para el proceso enseñanza y aprendizaje de Matemática en la muestra en estudio, con el propósito de interactuar con varias temáticas. En tal sentido, la contribución de esta investigativa es el contexto de la elaboración de una guía con GeoGebra para el aprendizaje de contenidos matemáticos, pues dentro de los objetivos que se pretende alcanzar es elaborar una guía para el aprendizaje de ecuaciones polares con el software GeoGebra.

2.2 Fundamentación Teórica

2.2.1 Teoría Conectivista

Según López & Escobedo (2021) “La premisa actual del mundo moderno es la era de la digitalización, la cual esta influencia por los cambios continuos en las diversas áreas que tienen vías de desarrollo, por ejemplo, la educación y salud” (p.68). Dicho esto, la teoría conectivista se basa en la palabra propiamente dicha, es decir, conexión, bien sea tecnológica o social. Por lo cual, su base es redes interconectadas para generar un aprendizaje, posterior a eso adaptarla y finalmente aplicar o suministrar esta información a las mismas fuentes de información, por ejemplo, las redes sociales y/o educativas, para que sean un bucle de aprendizaje continuo.

En la misma línea, Cueva et al. (2020) consideran que la adquisición de conocimientos debe aprovechar los medios tecnológicos que tiene a su alcance, apoyados por el docente en las dificultades que se les presentan, pues con el empleo de las TIC y otros medios puede dar solución a las necesidades personales y académicas. Pero para cumplir estas ideas, los docentes necesitan preparase en el uso de las mismas con fines didácticos, aprovechar sus potencialidades e integrarlas en la búsqueda activa del conocimiento; por tanto, es necesario que el discente no sea un consumidor de información, sino no más bien productores de conocimiento.

Teniendo así que el principal exponente de esta teoría es Siemens, quien considera que el conocimiento fluye en torno a la velocidad y la sociedad no fluye en torno a la misma, por lo cual, no siempre se procesa la información (E. López & Escobedo, 2021). Sin embargo, este trabajo no solo se realiza con la relación educador-estudiante que sería la técnica más primitiva, donde el educador motiva a investigar y realizar procesos de aprendizajes, pues con el paso de los años y la tecnología el conectivismo se complementa con redes, bases de datos, personas e incluso educación artificial, esta última viene siendo un suplemento del educador, todo con el objetivo de crear una red de conocimiento.

Los antecedentes de la teoría se remontan hasta la práctica de los mayores exponentes de la psicología dentro del psicoanálisis realizado por Freud, teniendo muchas similitudes con el conectivismo propuesto por Siemens y Downes, basadas en la inspiración de la una con la otra. Una de ellas es que los autores buscaban explicar lo que las teorías científicas no lograban y de la misma forma recibieron críticas, sin embargo, no impidió que sus escuelas se propaguen en sus áreas respectivas, como lo es en la pedagogía el conectivismo, además sus múltiples estudios proponen que el conectivismo está formado por personas conectadas a fuentes de información, es decir, el estudiante experimenta a través de estas redes de aprendizaje para adquirir la información necesaria (Sánchez et al., 2019).

De acuerdo a Basurto et al. (2021) el objetivo de implementar el uso de las TIC, es evitar que la clase se sumerja en el modelo de educación tradicional, logrando esto con estrategias y metodologías efectivas, las mismas le permiten al docente crear, diseñar, transformar la forma en la que se enseña, dado que está la necesidad de modernizarse y estar al día con las nuevas herramientas tecnológicas .

Además, Sánchez et al. (2019) destacan a la Escuela de Gestalt con un enfoque constructivista, como fuente de inspiración para Siemens con base a que el aprendizaje es un proceso de formación de ideas de forma continua, asemejándose con el conectivismo en que el conocimiento debe ser reformable. Por su parte en las ciencias pedagógicas autores como: Piaget, Gagné, Teoría del Caos, Instruccionismo, etc., han brindado cimientos para que las bases del conectivismo sean sólidas., donde Piaget expone la importancia del medio social con el aprendizaje y Gagné de igual forma expresando que hay medios internos y externos que permiten avanzar en el proceso de aprendizaje. Por lo tanto, el conectivismo no es una nueva forma de aprendizaje, más bien es un enfoque global de varias teorías.

2.2.1.1 Los principios de Siemens

Los escritos de Siemens han ido construyendo los principios, en general describen que el estudiante forma su propio conocimiento y adapta esto a su medio, así mismo, Siemens en 2005 propone que esta teoría es para fomentar el aprendizaje en la era digital, la cual debe cumplir con tres premisas que son la colaboración, interacción y conexiones. De esta manera, se forman las redes de conocimiento con información según la necesidad, que posterior a la selección será procesada y sintetizada para que no exista información obsoleta. Además en 2008 expone que el conocimiento está en todas las redes y conexiones, con base a diversas escuelas como el conductismo, cognitivismo y constructivismo, por lo que el aprendiz debe conectarse con la tecnología para formar cognición y conocimiento duradero (Marcillo & Nacevilla, 2021).

2.2.1.2 Ideas generales para el diseño de una propuesta de aprendizaje

El conectivismo propone que el aprendiz sea el principal actor de su forma de aprender, con sus herramientas y medios para que de esta forma sea personal y único, sin embargo, los principios para lograr una propuesta de aprendizaje se toman de diversas escuelas como es desde la perspectiva psicológica y biológica (neurociencia); la primera se toma como referencia en que el aprendiz debe alimentar su red neuronal de forma progresiva para que incremente conocimientos y en el ámbito de biológico es el entrenamiento del cerebro y memoria (Marcillo & Nacevilla, 2021).

Por consiguiente, abarcando distintos campos un principio son las TIC, dado que la aparición de esta rama manifiesta entornos virtuales de enseñanza y aprendizaje con el apoyo de un sistema web donde existen diversos usuarios que interactúan con actividades para poder generar experiencias, conocimientos, y desarrollar proyectos colaborativos con participación de todos. Por lo que, el aprendiz debe tener un sistema de acceso que brinde capacitación permanente, de igual forma la docencia debe brindar guías de estudio y espacios virtuales que promuevan actividades como debates, foros, videos y cuestionarios donde se construya redes de aprendizaje específicas y generales (Solórzano & García, 2016).

2.2.2 TIC en Educación

Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones conocidas como TIC, son herramientas que en los últimos años han protagonizado el ámbito de la educación, por medio de la era de la digitalización. Sin embargo, a pesar del auge que tiene, el sistema de docencia carece de la evolución de utilizar dichas herramientas, por ello, algunos sistemas pedagógicos están estancados en relación al tiempo (Solórzano & García, 2016). La sociedad debe avanzar de acuerdo con los avances tecnológicos, sin embargo, este proceso no se produce por sí solo, debe estar acompañado de vinculación y motivación, para que los estudiantes indaguen en nuevas formas de aprendizaje y este paulatinamente se desarrolle.

Por otra parte, Cruz et al. (2019) manifiestan que las TIC son instrumentos como equipos y aplicaciones que contienen textos, videos e imágenes, los mismos brindan a todo el sistema educativo dos premisas importantes, que son la búsqueda y replanteamiento de contenidos, por lo que su objetivo es desarrollar dinámica y didáctica al aprendizaje, durante toda la vida, es decir, desde la formación hasta la etapa profesional tanto de estudiantes como de profesionales propiamente dicho.

En el ámbito educativo las TIC desempeñan un importante papel para la investigación y formación de conocimientos, por ello, las instituciones educativas tratan de vincular a los estudiantes y al personal de docencia a que estas nuevas formas de hacer investigación sean utilizadas para crear un sistema de enseñanza y aprendizaje. No obstante, a pesar de vincular a la sociedad con las TIC, no se obtiene un resultado óptimo de mejora en el sistema educativo en relación con las dinámicas pedagógicas y metodológicas, dado que, no existen capacitaciones que informen los beneficios y por ello no hay un resultado de aumento de aprendizaje (Castillo, 2020).

Teniendo el planteamiento de Alcívar et al. (2019), las metodologías innovadoras que posibilitan la incorporación de las TIC en el proceso educativo están la metodología de trabajo colaborativo y el aprendizaje basado en problemas (ABP), las mismas permiten la utilización de herramientas, recursos y aplicaciones web 2.0 y 3.0 para la creación de nuevos conocimientos entre pares, en cambio con el ABP los estudiantes identifica problemas y los resuelven muy motivados al utilizar las TIC, teniendo como resultados productos y soluciones muy creativas.

Por consiguiente, Castillo (2020) manifiesta , las ventajas o beneficios de las TIC se centran en lograr objetivos de aprendizajes didácticos más rápidos, el desarrollo de enseñar o comprender contenidos y el aumento de investigación metodológica e incremento de atención en estudiantes. Por lo tanto, la utilización de las TIC debe basarse en la capacitación continua sobre cómo manejarlas y dar buen uso de ellas para el correcto desarrollo de enseñanza-aprendizaje, con el objetivo de que el docente colabore con ideas innovadoras y correctas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Dicho esto, la difusión e implantación de las TIC en las diversas áreas es una de las soluciones, sin embargo, el uso correcto de las TIC es lo que cambiará el diseño de tareas y manejo de metodologías.

2.2.2.1 TIC en el aprendizaje de matemática

La Matemática es una ciencia que se basa en contar y medir formas, la cual parte de la deducción lógica de valores abstractos, llevando a que el estudiante o el profesional realice un análisis lógico, abstracto y ordenado con sus conocimientos exactos. Reyes (2020), manifiesta que, al ser una ciencia importante para el desarrollo diario, el nivel intelectual debería ser alto, sin embargo, según informes internacionales es el área de estudio con el menor porcentaje de rendimiento, bajas notas y siendo la más complicada para muchos estudiantes.

Dicho esto, el método de emplear las TIC en matemáticas en la actualidad se muestra como un nuevo camino de aprendizaje, sin embargo, el sistema educativo tiene el reto de incorporar nuevos métodos de enseñanzas viables para que los estudiantes aprendan a emplearlas de forma correcta y aplicarlas como estrategia para el aprendizaje de matemáticas (Coloma et al., 2020). Por tal motivo, no solo se trata de llevar una app al aula de clases, sino saber el momento adecuado de incorporarla, esto se logra con una planificación didáctica y el uso adecuado de metodología, por ejemplo, la gamificación, ABP, trabajo colaborativo, es decir todas aquellas que se enfoquen el estudiante sea el partícipe directo del aprendizaje.

En la era del surgimiento de nuevas metodologías de aprendizaje en el ámbito educativo enfocadas la tecnología, constituyen un avance de gran impacto en la educación, en este sentido Carvajal et al. (2019) mencionan:

Las TIC ayudan a mejorar el desempeño académico de los alumnos en todas las materias, no únicamente en matemáticas, debido a que éstas ayudan y apoyan a los estudiantes para realizar sus tareas, trabajos en clases y también a los profesores para que sus cursos sean más motivadores e interesantes. No obstante, debe tenerse siempre en cuenta que el mal uso de estas herramientas puede ocasionar el efecto contrario, en lugar de ayudar pudieran perjudicar (p. 3).

Entendiendo así que los beneficios de las TIC llevan años de auge pues realizan la función de facilitar y formar una nueva didáctica para que los estudiantes comprendan conceptos complejos y abstractos. Sin embargo, en muchas instituciones educativas no existe la tecnología suficiente o los medios para incorporar estas formas mucho más didácticas de aprendizaje, lo cual crea una problemática considerando que los profesionales y alumnado que no están inducidos en este medio no han promovido cambios significativos en su forma de enseñanza-aprendizaje, un hecho de esta problemática es bajos recursos y falta de capacitación por lo que no se puede concebir al profesor y alumno en una nueva forma pedagógica dentro de una era totalmente digita (Coloma et al., 2020).

Cabe destacar que la era de la digitalización generó un cambio sin precedentes, ya que se utiliza en ámbitos tanto personales, profesionales y educativos (Jiménez, 2019). En este último las herramientas favorecen a la mejor comprensión del aprendizaje, además de fortalecer y hacer didáctica la temática en estudio, tal es el caso, en matemáticas el objetivo es la utilización de un software donde los estudiantes puedan afianzar conocimientos e incluso puedan hacer práctica de aquello, generando aprendizajes más significativos.

En esta misma línea Coloma et al. (2020), destaca que existen múltiples aplicaciones y software que permiten aprender dinámicamente las matemáticas, por ejemplo: Área de aritmética con las calculadoras matemáticas y Abaco online, Álgebra con sistemas como Software Math que permite resolver ecuaciones y comprender los procesos, de igual forma, Wikis que exploran resolver expresiones algebraicas, en sistema de videos esta Khan Academy que brinda diferentes tipos de lecciones matemáticas, en juegos y actividades interactivas formado por el sistema Math Game Time que incluye un repositorio de juegos y en Geometría el sistema GeoGebra que constituye un software matemático que trabaja con álgebra y geometría de forma visual.

2.2.2.2 GeoGebra

Si bien es cierto como ya se ha mencionado, la tecnología es una herramienta que beneficia en los procesos de enseñanza para lograr una buena metodología, pero se debe conocer los software o aplicaciones correctos para explorar este ámbito de aprender ciencias creando ciencias. Una de las herramientas más utilizada es el software GeoGebra, el cual fue creado por Markus Hohenwarter, con el objetivo de poder aprender de forma dinámica la geometría, cálculo y álgebra, así el concepto fue crear un programa dinámico libre, gratuito, compatible con varios sistemas, didáctico y con una interfaz fácil de usar para los docentes y el alumnado (Coloma et al., 2020).

Con el paso del tiempo el software se fue popularizando, produciendo que se tradujera a varios idiomas y contando con el trabajo de muchos voluntarios. Pues este programa cuenta con muchas perspectivas para lograr de forma dinámica el proceso de enseñanza aprendizaje, características como gráficas formadas por puntos, rectas, figuras, etc., así mismo posee vistas para trabajar estadística, probabilidad, forma algebraica con ecuaciones y posee la manera de observar coordenadas polares. Dicho aquello, para el correcto manejo del sistema, es necesario una guía de ayuda para usuarios el cual brinda información sobre su utilización en la temática específica.

Uno de los objetivos de la creación de GeoGebra fue brindar un sistema como medio de aprendizaje para poder modificar la metodología común a un método que permita que el aprendizaje sea dinámico. Dado que, una de las premisas del sistema educativo durante mucho tiempo es el mecanismo del rol pasivo y activo, por ejemplo, el profesor siendo el actor principal y el estudiante asume el rol de escuchar, sin embargo, por medio de esta interfaz o de muchos programas que incluyen las TIC se logra que el profesor sea un medio de aprendizaje para explicar significados, pero el estudiante también realiza el trabajo de investigar y comprender dichos significados (Cenas et al., 2021).

2.2.2.3 GeoGebra como herramienta educativa

GeoGebra se ha convertido en la plataforma educativa esencial para la enseñanza y aprendizaje de la matemática alrededor del mundo, debido a su enfoque dinámico, exploratorio y experimental. Lo que le concede un puesto privilegiado para el tema de coordenadas polares, pues es posible que el estudiante interactúe con el componente geométrico y algebraico, pasando de un sistema de coordenadas a otro; asimismo, una enseñanza con alternancia de la herramienta con el cálculo manual, dando así mayor agilidad de pensamiento a los estudiantes (Gónzalez, 2019).

Por tanto, resulta importante destacar las funcionalidades de GeoGebra que pueden aprovecharse en el aprendizaje de ecuaciones y graficas polares. Entre las que recalca Haro (2020) son la facilidad para crear materiales educativos estáticos y dinámicos como applets en páginas web, a partir de la construcción creada en el software de escritorio de GeoGebra y que sirven de apoyo a las explicaciones teóricas.

Similarmente, se puede crear actividades para que manipulen los estudiantes de manera directa las gráficas polares; en general las funcionalidades son:

- Representación Visual: Observar de forma inmediata como las ecuaciones polares se convierten en sorprendentes gráficas.
- Interactividad: Fomenta la experimentación y descubrimiento en los estudiantes al manipular las ecuaciones y sus parámetros en tiempo real.
- Construcción de Gráficas: Con apoyo de una guía los estudiantes pueden construir paso a paso las gráficas polares promoviendo un aprendizaje activo.
- Conexión Algebraica: GeoGebra integra las vistas y herramientas de álgebra y cálculo, esto facilita la transición de la representación polar y cartesiana.
- Recursos Educativos: Diseñar recursos personalizados para apoyar el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares con textos, deslizadores, y casillas de control.
- Accesibilidad: En virtud del acceso gratuito, los discentes pueden utilizarlo en cualquier dispositivo electrónico.

2.2.2.4 Experiencias de uso GeoGebra en el aprendizaje de matemática

En el estudio de Martínez et al. (2019), con énfasis en el software Geogebra y su incidencia en el rendimiento académico, manifiestan que los docentes no utilizan recursos de las TIC como medio para mejorar la metodología de sus clases, por otro lado, el valor de alumnos que alguna vez utilizaron GeoGebra es altamente significativo en relación a porcentajes mostrando mejor rendimiento, en comparación a estudiantes que no conocen del sistema.

Así mismo, el trabajo titulado “Uso de GeoGebra y su Incidencia en el Proceso Enseñanza- Aprendizaje de Grafica de Funciones en el Nivel Superior” realizado por Coronel et al. en (2018) exponen en base a sus resultados obtenidos por medio de evaluaciones en un estudio con grupos de control y experimental que el uso del sistema GeoGebra muestra mejor desempeño en el proceso de enseñanza de los estudiantes comprobado por medio de cálculos estadísticas.

Por resaltar otra investigación es la desarrollada por Guallichico (2022),enfocada al análisis y aplicación del software en la temática de secciones cónicas, por medio de los resultados concluye que la utilización del software GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de la temática específica, implica el manejo de la herramienta tecnológica para elegir adecuadamente los elementos de trabajo, así como el dominio teórico; solo así se produce un ambiente dinámico de trabajo captando la atención del estudiante, y logrando un aprendizaje significativo.

En base a estos estudios y la experiencia usando el software, se resalta que la utilización de GeoGebra beneficia mucho en las diferentes temáticas de la Matemática, sin embargo, no todos los docentes lo aplican, entonces resulta significativo ir paso a paso incorporándolo en otros tópicos donde no se ha estudiado su aplicación. Coloma et al. (2020) destaca que el software cuenta con la practicidad de crear grupos para trabajar de forma colaborativa o también de forma autónoma, fomentando la creatividad e investigación del estudiante para afrontar nuevos retos por medio de representaciones mentales y conceptos. No obstante, a pesar de que se muestran múltiples características ventajosas por medio de la utilización de este programa para mejorar la didáctica, es necesario la capacitación por medio de las TIC en el sistema educativo tanto de colegios como universidades para el correcto uso del software GeoGebra, así mismo si no se le da buen uso, los resultados resultan irrelevantes en el aprendizaje.

2.2.3 Aprendizaje constructivista de la Matemática

2.2.3.1 Constructivismo

El referente del constructivismo es brindar explicaciones sobre cómo funciona y se forma el conocimiento, una de las premisas es el racionalismo el cual se basa en que el conocimiento es sujeto a las capacidades que tiene cada ser humano, por otro lado, la empirista, que fomenta que el conocimiento es dado por la experiencia; por lo que hay que tener en cuenta a Jenófanes, dado que él manifestaba que los seres humanos no eran dotados de conocimientos por los dioses que adoraban, más bien, lo que sucedía era que con el paso del tiempo su manera de analizar y razonar los llevaba a reflexionar y ser independientes (Araya et al., 2007). Dicho esto, el constructivismo plantea firmemente que el conocimiento está en cada ser humano, generándose a través del accionar del día a día y cuando se experimenta con diversas situaciones se transforma.

Según Ortiz (2015), el conocimiento en la teoría constructivista es una construcción del ser humano, es decir cada persona percibe la realidad, la organiza y le da sentido en forma de constructos, por lo que cada día en cada acción se aprende algo, además que aprende en base al desarrollo de actividades propias, es decir gracias a la actividad biológica, específicamente del sistema nervioso central, favorece a la cimentación de un todo con sentido y unicidad de la realidad.

Continuando con los referentes que brindaron las pautas para el desarrollo de esta teoría es Heráclito, el cual siempre expuso que el mundo estaba en constante cambio y que esos procesos llevan al conocimiento a nunca ser igual, por lo tanto, nunca se puede afirmar que algo es definitivo. Avanzando en el paso de la historia, Descartes fue uno de los mayores exponentes del constructivismo brindando dos premisas, la primera expone que, al desarmar una máquina, el ser humano conoce de las piezas como deben ir es decir todas sus partes, la segunda, manifiesta que, con base a la matemática al descomponer cualquier ejercicio ya se conocerá la estructura y componentes, en conclusión, el ser humano conoce y domina lo que el mismo construye (Araya et al., 2007).

Posteriormente, en el siglo XXI, el sistema educativo se califica como constructivista, el cual le permite que el alumno se prepare para su desarrollo en el presente, como ciudadano y profesional, todo esto con el objetivo de que el estudiante se encuentre en aprendizaje continuo y la información se reproduzca (Guerra, 2020). En conclusión, el constructivismo hace que el sujeto genere su propio conocimiento, todo esto por medio de las interacciones el cual posteriormente lo transforma dentro del medio que lo rodea.

2.2.3.2 Aprendizaje de la matemática

El constructivismo como un modelo pedagógico para el aprendizaje de la Matemática está sujeto por los cambios tecnológicos que con el paso de los años han marcado en la sociedad. En este sentido, la educación se ha ajustado a estas transiciones, sin embargo, no siempre se adaptan estos nuevos sistemas para mejorar las metodologías. Bolaño (2020) manifiesta que el constructivismo y la Matemática son dos estructuras que deben reformarse para que las metodologías teóricas sean suplantadas por más ejemplos prácticos, dinámicos y de repetición, todo esto, con el objetivo que aflore su método de enseñanza donde el estudiante tenga libertad de crear sus conocimientos y el docente sea una guía, formando un ciclo desde lo micro como el conocimiento por lógica hasta el macro para formar un conocimiento científico y con motivación a investigación.

Considerando que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se ha visto casi siempre como un proceso complejo, se ha tratado de incursionar las TIC en dicho campo, por lo que los docentes motivados por dar solución a este problema han planteado propuestas pedagógicas con la finalidad de suministrar una correcta comprensión y aplicación de los contenidos matemáticos (Farinango & Vila, 2022) . Desde esta perspectiva, el estudiante debe ocupar herramientas que le ayuden a que el conocimiento se desarrolle, para mejorar la observación e interpretación de resultados con una base analítica.

En el contexto de la Matemática el método efectivo es la resolución de problemas por medio del punto de vista constructivista para desarrollar la esfera cognitiva y afectiva, mientras tanto los docentes dentro de la aplicación de esta teoría deben enfocarse en explicar los procesos matemáticos y no solo estudiar la validez de los mismos, por lo tanto, debe promover la dinámica en clases y mostrar al estudiante que existen muchas herramientas para potencializar su aprendizaje (Bolaño, 2020).

A nivel de todas las aulas del mundo, las dificultades para aprender matemáticas o las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (DAM), corresponde a un término moderno con características pedagógicas dejando de lado el marco de existir alguna afección mental, por lo tanto, son problemas que consecuentemente los profesores y alumnado se deben enfrentar, sin embargo, son pocas las estrategias que se utilizan para la resolución ante problemáticas como la calculia y discalculia, donde dichos términos se diferencian en que el primero es una condición adquirida y la discalculia es un trastorno del desarrollo (Corral et al., 2018).

Otra de las grandes dificultades es la comprensión de los ejercicios o problemas para su posterior resolución, punto a considerar en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que este aspecto es el fin de la enseñanza de la Matemática donde se logra que los diferentes contenidos cobren sentido con coherencia y rigor. Además, Ortega (2022) plantea que la resolución de problemas permitirá que el estudiante desarrolle habilidades como el análisis y la propuesta de soluciones a una situación problema que se ha planteado, lo que lleva a que los alumnos sean más competentes matemáticamente y puedan aplicar sus conocimientos a situaciones que se les presenta en la vida cotidiana.

Estas afecciones pueden estar presentes desde la infancia hasta la adultez, donde poco a poco se va comprobando la falta de razonamiento matemático, por lo que el diagnóstico de las mismas a tiempo puede contrarrestar estas afecciones y evitar que el estudiante use de forma incorrecta los signos y algoritmos matemáticos dando como resultado cálculos más precisos. En definitiva, estas dificultades pueden derivarse de varios factores en relación a la cantidad y calidad de las clases que reciba el alumno, factores internos como alteraciones cognitivas y factores externos como enseñanza inadecuada asociados a falta de recursos y empleo de una metodología tradicional (Corral et al., 2018).

2.2.4 Contenido curricular

2.2.4.1 Currículo

La carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo, tiene como objetivo:

> Formar profesionales, eficaces y eficientes, con sustento científico, pedagógico, humanístico y técnico; mediante un proceso académico holístico, didáctico, propositivo e incluyente, para dotar al sistema Educativo Ecuatoriano de profesores especialistas en las áreas del conocimiento, que contribuyan a la resolución de problemas de su ámbito laboral (UNACH, 2019).

Entendiéndose que es una carrera universitaria que forma profesionales en educación, es importar resaltar que, dentro de sus resultados de aprendizaje expuestos en el perfil de salida, se encuentra dos relacionados el desarrollo de este estudio, los mismos que son diseña y elabora materiales educativos en el área de la matemática y física, así como la capacidad para diseñar experimentos, obtener, utilizar e interpretar datos y ser capaces de aplicar estos conocimientos en el sistema educativo (UNACH, 2019).

Por tanto, el área curricular de Matemática es muy importante dentro de la organización del currículo, desarrollando el conocimiento de forma teórica y cognitiva para la comprensión cuantitativa de aspectos cotidianos. En cuanto al escenario matemático que tiene como objeto las formas espaciales y las relaciones cuantitativas del mundo real, es necesario abordar el área de Matemáticas con la certeza de que a través de sus teoremas, leyes y conceptos se cumpla el tratamiento de los principios de la naturaleza y la tecnología.

Mientras tanto, la asignatura de Cálculo de Varias Variables pertenece a la formación profesional, y se encuentra en la malla curricular del sexto semestre de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemáticas y la Física de la Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías; tiene como finalidad desarrollar habilidades y destrezas de desempeño en la definición y comprensión de los conceptos matemáticos para poder resolver problemas que puedan ser modelados de la realidad cotidiana. La asignatura está organizada en cinco unidades: Unidad I: sucesiones y series infinitas; Unidad II: ecuaciones paramétricas y coordenadas polares; Unidad III: funciones vectoriales; Unidad IV: integrales múltiples. Esta asignatura, constituye una base para las materias de especialización de la carrera y contribuye a generar en el estudiante un pensamiento crítico y reflexivo, con capacidad de análisis y síntesis, capacidad innovadora, emprendedora y desarrollando un espíritu investigador, lo que le permitirá construir su proyecto de vida.

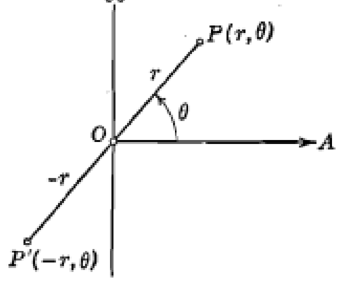
2.2.4.2 El sistema polar y sus coordenadas polares

Por lo general en la escuela y colegio se trabaja los problemas en coordenadas rectangulares o cartesianas, es decir en el plano cartesiano, pues este permite describir geométricamente un punto a partir del eje x, y. Sin embargo, si al mismo punto se lo representa en forma vectorial, representando un vector de magnitud r que parte desde el origen y un ángulo de giro θ, se ha incorporado el mismo punto en otro tipo de coordenadas, las mismas que son denominadas coordenadas polares. Teniendo así que las coordenadas del plano cartesiano son números, que representan la distancia dirigida a partir de dos rectas fijas, las cuales son el eje x (abscisas) y el eje y (ordenadas); por otro lado las coordenadas polares, según el planteamiento de Leithol (1998):

> Las coordenadas polares consisten de una distancia dirigida y la medida de un ángulo en relación a un punto fijo y un rayo fijo (o semirrecta). El punto fijo se denomina polo (u origen) y se representa mediante la letra *O*. El rayo fijo recibe el nombre de eje polar (o recta polar), la cual se denota por *OA*. El rayo OA usualmente se dibuja horizontal y se prolonga indefinidamente a la derecha (p. 752).

Las coordenadas polares de un punto P se indican dentro de un paréntesis (r, θ). Además, es importante indicar que la línea recta que pasa por el polo y es perpendicular a1 eje polar se llama el eje a 90°. El ángulo polar se mide partiendo del eje polar hacia el radio vector; se considera positivo o negativo según el sentido sea opuesto a las manecillas de un reloj o del mismo respectivamente; si bien no existen radios negativos una forma de representar puntos en la parte inferior del plano, es el que se indica en la figura (Lehmann, 1989).

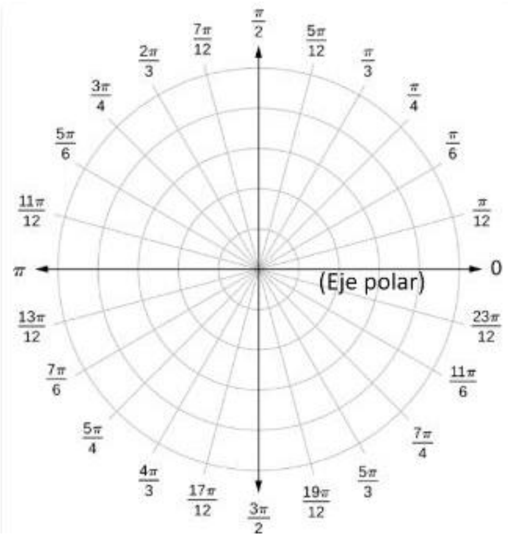
Figura 1
Representación de puntos



Para representar puntos en coordenadas polares, no es necesario transformarlas al sistema conocido del plano cartesiano, pero puede resultar un poco más laborioso si no se tiene un plano que tenga como referencia ángulos y magnitudes. El plano con estas cualidades se lo denomina sistema polar o plano polar, el cual consiste de circunferencias concéntricas, es decir a la misma distancia y con el mismo centro, que es el origen, además posee rectas concurrentes al origen con diferentes ángulos de inclinación, tal como se observa en la figura (Villena, 2013).

Figura 2

Plano polar



Nota. Representación de sistema polar (Rivera & Álvarez, 2020).

2.2.4.3 Ecuaciones y gráficas en coordenadas polares

Por lo general el ángulo de los puntos se mide en radianes, de modo que un conjunto de coordenadas polares de un punto es un par de número reales, y para cada par existe un único punto al que le corresponde el conjunto de coordenadas polares. Por otro lado, si P no es el polo, r y θ se restringen de modo que $r > 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, para que le corresponda un único punto. Para hacer referencia a las coordenadas polares y cartesianas, se utiliza las relaciones de los puntos, con las ecuaciones $x = rcos\theta$ y $y = rsen\theta$, de modo que se cumplen para cualquier cuadrante y r tanto positivo como negativo.

A partir de estas relaciones se puede obtener una ecuación polar de una curva a partir de su ecuación cartesiana rectangular, esta de forma general se representa de la forma $r = f(\theta)$, y para obtener la gráfica de forma básica se obtiene una tabla de valores para ciertos puntos y luego representarlos en el sistema polar (Raichman & Totter, 2016).

Para mayor precisión de las mismas es necesario tener en cuenta la simetría que estas curvas van a tener respectos los diferentes y el polo, por lo que Lehmann (2012) plantea una prueba (resumida en la tabla) para averiguar la simetría de la gráfica polar.

Tabla 1

Análisis de simetría de curvas polares

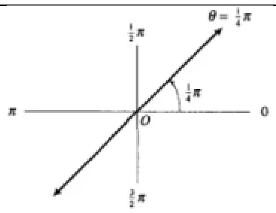
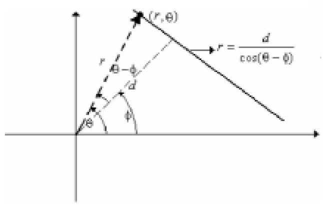
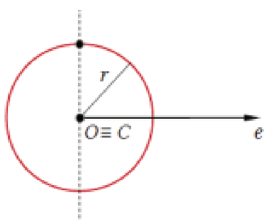
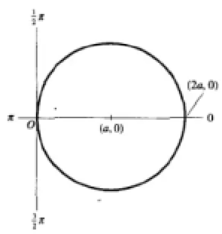
Simetría respecto al	La ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:
Eje polar	a) Se sustituye θ por $-\theta$ b) Se sustituye θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$
Eje a 90°	a) Se sustituye θ por $\pi - \theta$ b) Se sustituye θ por θ y r por $-r$
Polo	a) Se sustituye θ por $\pi + \theta$ b) Se sustituye r por $-r$

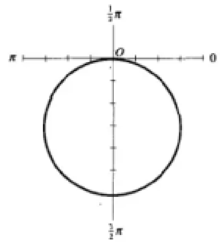
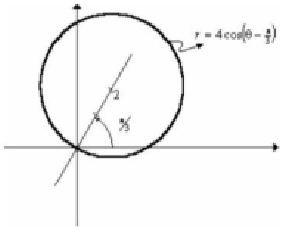
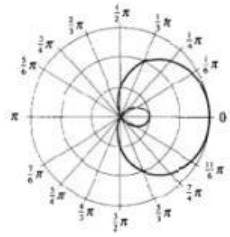
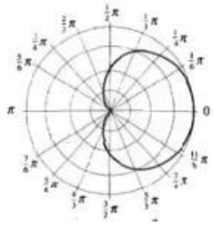
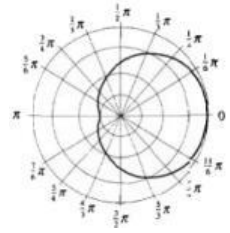
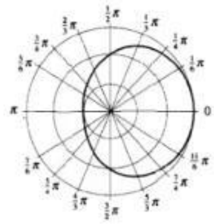
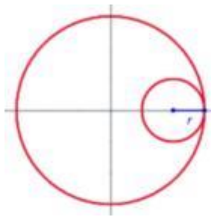
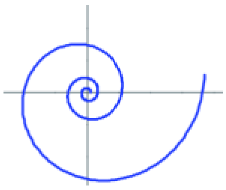
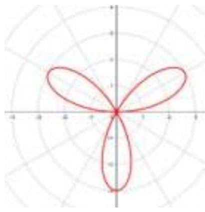
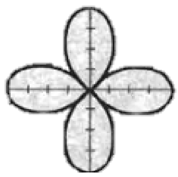
Nota. Tomado de (Lehmann, 2012)

El planteamiento de ecuaciones polares se base en los criterios descritos anteriormente, por lo tanto, de manera general algunos tipos de graficas de las ecuaciones polares se resumen en la tabla, considerando que fue tomado de varios autores, la simbología varía en cada una, sin embargo, el resultado final es el mismo.

Tabla 2

Ecuaciones polares con sus gráficas

Ecuación Polar	Gráfica	Ecuación Polar	Gráfica
$\theta = C \pm k\pi$		$r = \dfrac{d}{\cos(\theta - \emptyset)}$	
$r = a$		$r = 2a\cos\theta$	

$r = 2bsen\theta$		$r = 2a\cos(\theta - \emptyset)$	
$r = a + bcos\theta;$ a<b		$r = a + bcos\theta$ a=b	
$r = a + bcos\theta$ b<a<2b		$r = a + bcos\theta$ $2 \leq \frac{a}{b}$	
$r = a - bcos\theta$		$r = a + b(\theta)$	
$r = \text{asen}(b\theta)$		$r = \text{acos}(b\theta)$	

Nota. Adaptado de (LEITHOL, 1998; Raichman & Totter, 2016; Rivera & Álvarez, 2020; Rivera & Navarro, 2018; Villena, 2013).

2.2.4.4 Desafíos en el aprendizaje de ecuaciones polares

A simple vista los ejemplos de ecuaciones y gráficas polares presentados en la tabla 2 resultan difícil de identificar el tipo, pues muchas ecuaciones se parecen, pero sus representaciones cambian totalmente. Además, la enseñanza de este tópico enfrenta varios desafíos, tales como: predominio del aprendizaje repetitivo, tendencia a memorizar procesos mecánicos para resolver problemas, poco interés en leer y comprender la teoría, falta de motivación, clases socráticas donde el alumno es un receptor pasivo del contenido (Posso et al., 2007).

De igual modo, el estudiante que se está formando como docente en el área de las ciencias exactas aborda desafíos importantes en la comprensión y dominio del tema, los mismos se detallan a continuación:

- Abstracción Matemática: La falta de aplicaciones prácticas hace que los conceptos abstractos se vuelvan difícil de comprender en los estudiantes.
- Representación Gráfica: Dificultad en representar gráficas de las ecuaciones en papel, pues existe confusión en los sistemas de referencia, como es el sistema de coordenadas cartesianas y polares.
- Falta de Visualización: Dificultad en observar con precisión las características propias de las gráficas, pues al realizar manualmente solamente se aproxima su representación.
- Desconexión Teoría y Práctica: No existe explicaciones de las aplicaciones de las ecuaciones polares, por tanto, los estudiantes ven a la teoría como un tópico sin importancia.
- Herramientas Interactivas: Falta de implementación de herramientas como simulaciones y software educativos que permitan a los estudiantes explorar los conceptos, y poner en práctica su construcción, es decir carencia en un aprendizaje activo y significativo.

De allí, resulta transcendental abordar las situaciones de dificultad en el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares, tanto así que Pérez (2014) destaca la importancia de brindar actividades que desarrollen el pensamiento espacial, todo con la finalidad de un correcto análisis de las coordenadas polares. Posterior un modelamiento de fenómenos con las ecuaciones polares y su relación con otras ciencias, tal como la astronomía en la descripción de trayectorias planetarias y la física vectorial.

Cabe decir que los futuros docentes de matemáticas deben experimentar en su formación, es decir, llevar más allá del aula de clase la teoría. Esto se puede lograr con una articulación del conocimiento tecnológico, pedagógico y disciplinar; entendiendo que "la tecnología no es un recurso mágico que soluciona los problemas de aprendizaje ni que debe ser el centro de la clase, sino que es una herramienta más en el proceso de enseñanza-aprendizaje" (Rojas, 2020, p. 133).

2.2.5 Guía Práctica

Una guía práctica es un tipo de guía didáctica, considerada como un documento donde se planea, crea, proporciona u orienta hacia un fin el conocimiento de uno o varios tópicos. Destacando su base a la guía didáctica, la misma que es considerada como un instrumento educativo físico o digital, debidamente organizado y sistematizado, permitiendo al discente un aprendizaje autónomo e interactivo fortaleciendo la participación entre docente y estudiante (Quijada Tipán, 2019).

En la misma línea se considera a una guía como un recurso didáctico, pues "permite orientar y facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje, logrando la interacción dialéctica de los componentes personales (profesores-facilitadores y estudiantes-participantes) y los personalizados (objetivos, contenidos, estrategias metodológicas, recursos didácticos, formas de organización de la docencia y la evaluación" (Pino & Urías, 2020, p. 5). Por lo tanto, una guía permite dirigir o enseñar un tópico hacia un público en específico, pues en este documento se planifica, organiza, facilita u orienta el contenido a enseñar en base a resultados de un diagnóstico, características y nivel académico de los estudiantes, llegando a ser usado como un recurso didáctico a través de actividades desarrolladas y propuestas en la misma.

2.2.5.1 Funciones de la guía práctica

La función de una guía práctica de manera general es que el estudiante aprenda de manera constructivista, es decir realizando y aplicando el conocimiento teórico, por lo que su funcionalidad engloba otros aspectos, los mismos que son parte de las funciones de una guía didáctica, tal como lo plantea Aguilar (2004):

- Función motivadora: Despierta el interés por la asignatura y mantiene la atención durante el proceso de autoestudio, motiva y acompaña al estudiante través de una conversación didáctica guiada.
- Función facilitadora de la comprensión y activadora del aprendizaje: Organiza y estructura la información del texto básico; sugiere técnicas de trabajo intelectual que faciliten la comprensión del texto y contribuyan a un estudio eficaz; sugiere distintas actividades y ejercicios, en un esfuerzo por atender los distintos estilos de aprendizaje. Aclara dudas que previsiblemente pudieran obstaculizar el progreso en el aprendizaje.
- Función de orientación y dialogo: Fomenta la capacidad de organización y estudio sistemático; promueve la interacción con los materiales y compañeros; ofrece sugerencias oportunas para posibilitar el aprendizaje independiente.
- Función evaluadora: Activa los conocimientos previos relevantes, para despertar el interés e implicar a los estudiantes; propone ejercicios recomendados como un mecanismo de evaluación continua y formativa; presenta ejercicios de autocomprobación del aprendizaje para que el alumno controle sus progresos, descubra vacíos posibles y se motive a superar las deficiencias mediante el estudio; realimenta constantemente al alumno, a fin de provocar una reflexión sobre su propio aprendizaje; especifica los trabajos de evaluación a distancia (p. 6).

2.2.5.2 Estructura general de una guía práctica

Una estructura general de una guía, que se acopla en gran medida al desarrollo y ejecución del presente trabajo de investigación referente a la configuración de la guía sobre ecuaciones y construcción de gráficas polares con el software GeoGebra, es la planteada por Pino y Urías (2020, p. 10):

1. Título del tema
2. Breve Introducción
3. Descripción del contenido
4. Objetivos o resultados de aprendizaje: generales de la unidad, específicos de cada tema
5. Tareas docentes a ejecutar específicas por objetivo: estrategia para el aprendizaje
6. Evaluación: heteroevaluación, autoevaluación, coevaluación en el proceso
7. Bibliografía
8. Anexos

CAPÍTULO III. METODOLOGIA.

3.1 Enfoque de la investigación

"El enfoque cuantitativo utiliza la recolección y análisis de datos para contestar preguntas de investigación y probar hipótesis formuladas previamente, además confía en la medición de variables e instrumentos de investigación, con el uso de la estadística descriptiva e inferencial" (Ñaupas et al., 2014, p. 63). Por tal motivo, se consideró un enfoque cuantitativo con el fin de cumplir los objetivos planteados manejando así datos de forma numérica para llegar a conclusiones específicas sobre el uso del software GeoGebra por medio de la estadística.

3.2 Diseño de la investigación

Según Hernández et al. (2014), un estudio no experimental es aquel donde no se genera ninguna situación, sino que se observan situaciones ya existentes, por lo que no se tiene control ni influencia sobre las variables independientes como sus efectos. Por tanto, el diseño de esta investigación fue no experimental, pues se limitó a describir los datos observados en su contexto natural, es decir sin manipular las variables en estudio.

3.3 Nivel de la investigación

La investigación concurrió con carácter descriptivo porque se indagó y describió los datos encontrados sobre el nivel de conocimiento en ecuaciones polares y gráficas y el uso de GeoGebra en los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo.

Los estudios descriptivos pretenden especificar las propiedades, características y perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Es decir, miden o recolectan datos y reportan información sobre diversos conceptos, variables, aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno o problema a investigar (Hernández & Mendoza, 2018, p. 108).

Así mismo, se desarrolló con nivel propositivo porque se elaboró una guía práctica de construcción de las diferentes gráficas de ecuaciones polares mediante el software GeoGebra, tal como lo plantea Daza (2021), la investigación propositiva se caracteriza por partir de un diagnóstico y proponer un producto final a partir de fijarse o determinar metas, diseñando las estrategias necesarias para lograr lo propuesto.

3.4 Tipo de la Investigación

3.4.1 Según el lugar

El desarrollo del trabajo de investigación fue de campo porque la problemática a investigar del uso del software GeoGebra en el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares se desenvolvió en el lugar de estudio de los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo en la Universidad Nacional de Chimborazo. Pues Hernández et al. (2014), plantean que la investigación de campo se refiere a la recolección de datos directo de la realidad en base a un registro sistemático, válido, confiable de comportamientos y situaciones que pueden ser observables.

3.4.2 Según el tiempo

Fue de tipo transversal porque se observó los fenómenos ocurridos con su toma de datos en un solo periodo, tal como lo plantea Hernández (2014) "los diseños de investigación transeccional o transversal recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único y su propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado" (p. 187).

3.5 Población y Muestra

3.5.1 Población

Ñaupas et al. (2014) plantean, el universo de estudio será de acuerdo al tipo de investigación, pues en investigaciones naturales, es el conjunto de objetos, hechos, eventos que se van a estudiarse, por otro lado, en las ciencias sociales la población es el conjunto de individuos o instituciones que son motivo de investigación. Por tal razón, la población del presente trabajo fueron 188 estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo, periodo académico 2022 – 2S, como se detalla a continuación.

Tabla 3
Población del proyecto de investigación

Semestre	Estudiantes
Primero	44
Segundo	36
Tercero	13
Cuarto	20
Quinto	15
Sexto	16
Séptimo	24
Octavo	20
Total	**188**

3.5.2 Muestra

La muestra es un subgrupo de la población que puede elegirse con diversas técnicas de muestreo, pues la finalidad es recolectar los datos necesarios de la investigación para generalizar sus resultados. En este sentido, se aplicó un muestreo no probabilístico intencional, por su rapidez y facilidad de implementación al elegir deliberadamente los individuos de la población, considerando la mayor representatividad de los mismos (Hernández & Mendoza, 2018, p. 197). Por lo que se trabajó con los estudiantes de sexto, séptimo y octavo semestre, con un total de 47 estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las

Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo, que cursaron el periodo académico 2022 – 2S y tienen el conocimiento del tema en estudio, y así evitar sesgos en las respuestas de los instrumentos aplicados.

Tabla 4
Muestra del proyecto de investigación

Semestre	Estudiantes
Sexto	14
Séptimo	21
Octavo	12
Total	**47**

3.6 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

3.6.1 Técnicas

La encuesta es una técnica que permite dar respuestas a problemas en términos descriptivos como de relación de variables, ya que aprueba la recogida de datos de forma organizada y sistemática, con el diseño previamente de un instrumento que valide la recogida de información (Tamayo, 2004). Se eligió esta técnica, visto que permite obtener la información de los objetos de estudio de forma directa, por medio de instrumentos específicos.

3.6.2 Instrumentos

Prueba Objetiva

La prueba de conocimiento u objetiva es un instrumento de evaluación cuyo propósito es reconocer el conocimiento de los y las estudiantes respecto a la disciplina o temática en estudio, la misma que comprende muchos aspectos (conocimientos, actitudes, aptitudes, habilidades, destrezas, estrategias, personalidad), además que para su validación debe cumplir varios aspectos, es decir no cualquier prueba se puede aplicar a los informantes (Ruiz, 2013).

Teniendo así que se aplicó dicho instrumento para saber el nivel de conocimiento que tienen los estudiantes sobre la temática de ecuaciones y gráficas polares, el mismo que estuvo formado de 10 preguntas distribuidas en dos dimensiones (ver anexo 1). La primera de carácter conceptual con 6 preguntas referente a aspectos básicos de coordenadas polares y relación de ecuaciones con sus nombres específicos, la segunda de aplicación procedimental con 4 interrogantes de identificación de ecuaciones polares a gráficas específicas.

Cuestionario - Escala

Considerando que "el instrumento más utilizado para recolectar los datos es el cuestionario. Un cuestionario consiste en un conjunto de preguntas respecto de una o más variables a medir. Debe ser congruente con el planteamiento del problema e hipótesis" (Hernández & Mendoza, 2018, p. 250). Se utilizó el cuestionario de tipo escala (ver anexo

2), el mismo que estuvo elaborado con 12 preguntas cerradas de opción múltiple para obtener información de los estudiantes sobre el uso del software en el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares.

La aplicación de los dos instrumentos dentro de este trabajo investigativo sirvió para cumplir los objetivos específicos de conocer el nivel de utilización del software GeoGebra para el aprendizaje de ecuaciones polares, así mismo para su posterior descripción. Además, se tuvo un sustento directo para la elaboración de la propuesta final y cumplir con la finalidad de la investigación.

3.7 Validación de los instrumentos

De acuerdo a López et al. (2019) "la validación de instrumentos está considerada como un tipo de estudio dentro de los de intervención, es decir, al mismo nivel de los experimentales, cuasi-experimentales, entre otros", por lo que se convierte trascendental verificar el contenido de los instrumentos, proceso que se puede realizar utilizando el juicio de expertos, quienes expresan sus opiniones, y verificaciones con el objetivo de enriquecer los instrumentos y se enfoquen en cumplir los objetivos de las respectivas investigaciones. Para la validación de los instrumentos se requirió de tres docentes expertos de la Universidad Nacional de Chimborazo, ellos con su sabiduría y experiencia en investigación, revisaron y validaron a cada instrumento presentado en este trabajo investigativo.

Tabla 5

Validez de prueba objetiva

	Excelente	**Satisfactorio**	**Necesita mejorar**	**Inadecuado**
Docente UNACH 1	X			
Docente UNACH 2		X		
Docente UNACH 3	X			

Tabla 6

Validez de escala

	Excelente	**Satisfactorio**	**Necesita mejorar**	**Inadecuado**
Docente UNACH 1	X			
Docente UNACH 2	X			
Docente UNACH 3	X			

Cada uno de los docentes en calidad de experto evaluaron de forma independiente (ver anexos 3 al 8) la pertinencia, adecuación en las opciones de respuestas y la claridad de redacción en cada reactivo, asignaron una validez entre excelente y satisfactorio a la prueba objetiva, y excelente al cuestionario tipo escala, por lo tanto, se determinó óptimo cada instrumento para la aplicación y recolección de información de la investigación.

3.8. Métodos de análisis y procesamiento de datos

Para el procesamiento de datos y su respectivo análisis de datos se utilizó el software Rstudio apoyado de Excel, ya que contienen algoritmos que automatizan el método y permite mejorar la presentación de datos para su visualización e interpretación.

3.8.1. Método de análisis

El análisis de la información que forma parte del marco teórico se realizó mediante la búsqueda de documentos académicos actualizados y referentes al objeto de estudio en buscadores como Scopus, Google Scholar, Redalyc, entre otros. Así mismo, artículos en revistas específicas e investigaciones de pregrado en repositorios institucionales que ayudaron a la fundamentación teórica y construcción de los instrumentos de investigación.

Por su parte en la validación de los instrumentos, primero se realizó una operacionalización de las variables para verificar el alcance de los objetivos con las diversas preguntas, luego se seleccionó los expertos en el área de Matemática y se envió la solicitud de apoyo, quienes revisaron y posterior a las correcciones realizadas validaron los instrumentos. En cambio, la recolección de los datos se realizó mediante la aplicación de los instrumentos a los estudiantes de sexto, séptimo y octavo de la carrera de Pedagogía de Matemáticas y la Física.

Aunado a esto, se aplicó el análisis estadístico que describe los datos obtenidos de la prueba objetiva y cuestionario. Por ello, se creó la base de datos en Excel, luego en Rstudio se estableció las frecuencias relativas y porcentuales para cada pregunta, posterior la representación de la prueba objetiva en un diagrama de columnas agrupadas donde se puede visualizar las preguntas y su equivalencia de correctas e incorrectas, además el cuestionario en diagrama de pastel.

3.8.2. Procesamiento de datos

Para el procesamiento de datos se empleó el software estadístico Rstudio, además de realizar el procedimiento siguiente:

- Se organizó los datos en una hoja de cálculo del paquete de Microsoft Excel: en la prueba objetiva se estructuró cada pregunta con sus respuestas en dos valores nominales (correcta e incorrecta), por su parte en el cuestionario se procedió tal como estaba estructurado.
- En el software Rstudio se procedió con la depuración respectiva para crear tablas de doble entrada, la prueba objetiva con número de pregunta y respuesta para las dos dimensiones estudiadas; por otro lado, en el cuestionario se procedió en la tabulación para cada pregunta
- Se graficó los resultados tabulados anteriormente en el software Rstudio.
- Las tablas y gráficas fueron analizadas e interpretadas en el apartado de resultados y discusión.

CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Análisis e interpretación de la prueba objetiva

La prueba objetiva aplicada estuvo constituida por 10 preguntas, donde las primeras 6 corresponden a la dimensión conceptual, por otro lado, las preguntas restantes pertenecen a la dimensión procedimental, por ello se presenta el análisis e interpretación de cada dimensión, apoyándose en tablas y gráficas correspondiente.

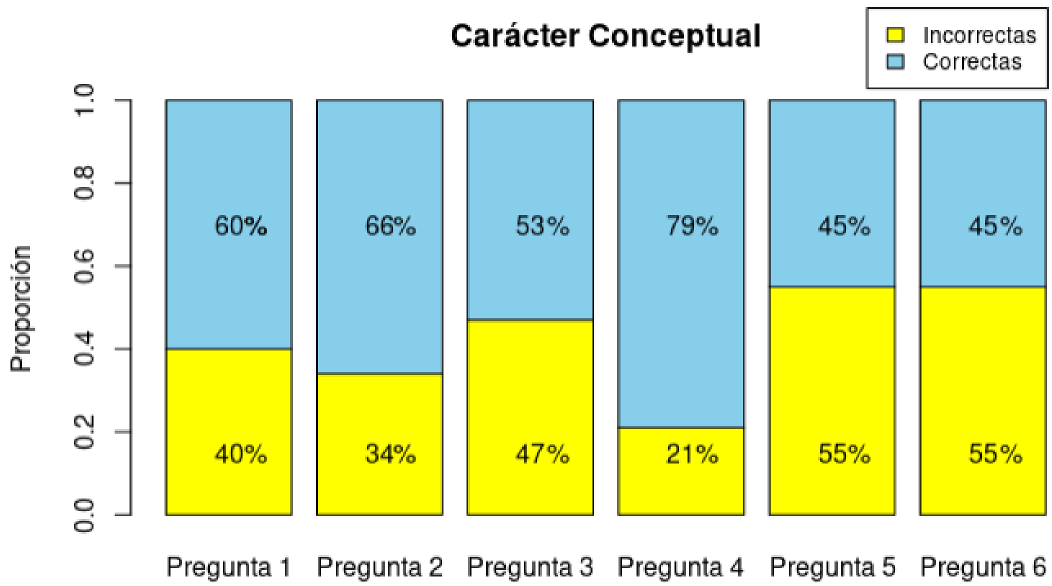
Tabla 7

Resumen de respuestas de dimensión conceptual

Pregunta / Respuesta	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	Pregunta 6
Incorrecta	19	16	22	10	26	26
Correcta	28	31	25	37	21	21
Total	**47**	**47**	**47**	**47**	**47**	**47**

Figura 3

Resumen de respuestas de dimensión conceptual



Análisis e interpretación

Los resultados de la prueba objetiva en la dimensión de carácter conceptual muestran que, en la mayoría de preguntas respondieron la opción correcta. Teniendo que el 60% identifica correctamente las ecuaciones que relacionan la coordenadas polares y cartesianas, por consiguiente, un 66% identifica la representación de un punto P del plano cartesiano en el sistema de coordenadas polares, además 53% se destaca en la tercera pregunta, es decir que pueden relacionar cada elemento de la representación del sistema polar con su nombre respectivo. Del mismo modo en la cuarta pregunta, aproximadamente el 79% respondió correctamente, esto es que conocen una definición general de una gráfica polar. Sin embargo, 55% respondieron incorrectamente las preguntas 5 y 6, eso quiere decir que no identifican la forma general de cada ecuación con su respectivo tipo de gráfica, además del criterio de simetría de una gráfica respecto al eje polar.

Determinando que los estudiantes conocen aspectos básicos del tema de ecuaciones y gráficas polares respondiendo correctamente las preguntas que se relacionan con las bases necesarias del tema en estudio, sin embargo, al mostrar las diferentes formas generales de las ecuaciones polares como rectas, circunferencias, rosas, espirales, caracoles y cónicas presentan dificultad en su identificación y posterior relación; así mismo, existe falencia en la identificación conceptual de la simetría de una gráfica polar. Por lo tanto, es trascendental abordar el tópico diagnosticando los conocimientos del estudiantado, y desarrollarlo de manera desglosada, es decir cada tipo de gráfica con el respectivo concepto teórico de su ecuación general, todo con el fin de lograr aprendizajes significativos.

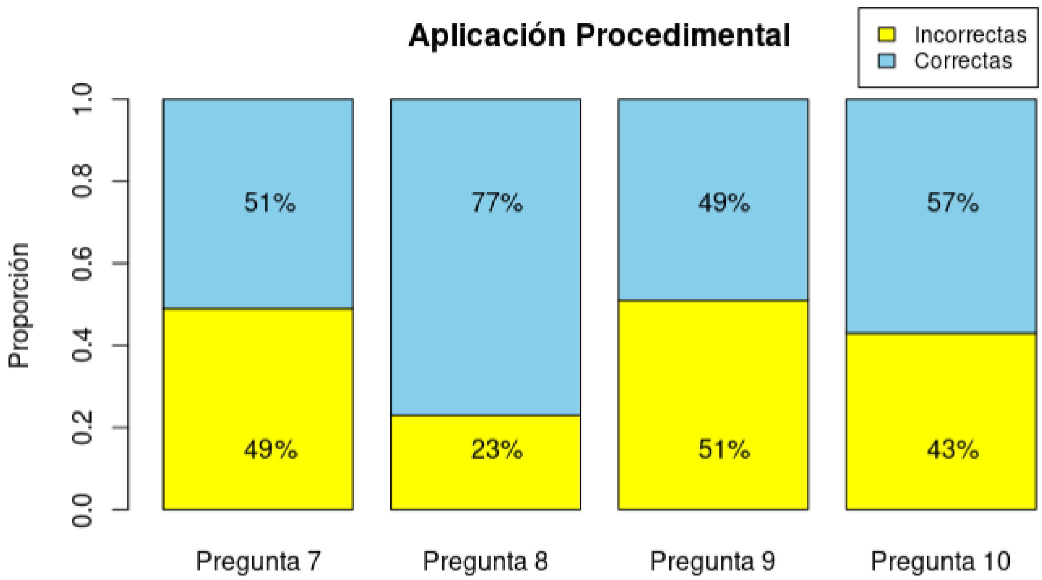
Tabla 8

Resumen de respuestas de dimensión procedimental

Pregunta / Respuesta	Pregunta 7	Pregunta 8	Pregunta 9	Pregunta 10
Incorrecta	23	11	24	20
Correcta	24	36	23	27
Total	**47**	**47**	**47**	**47**

Figura 4

Resumen de respuestas de dimensión procedimental



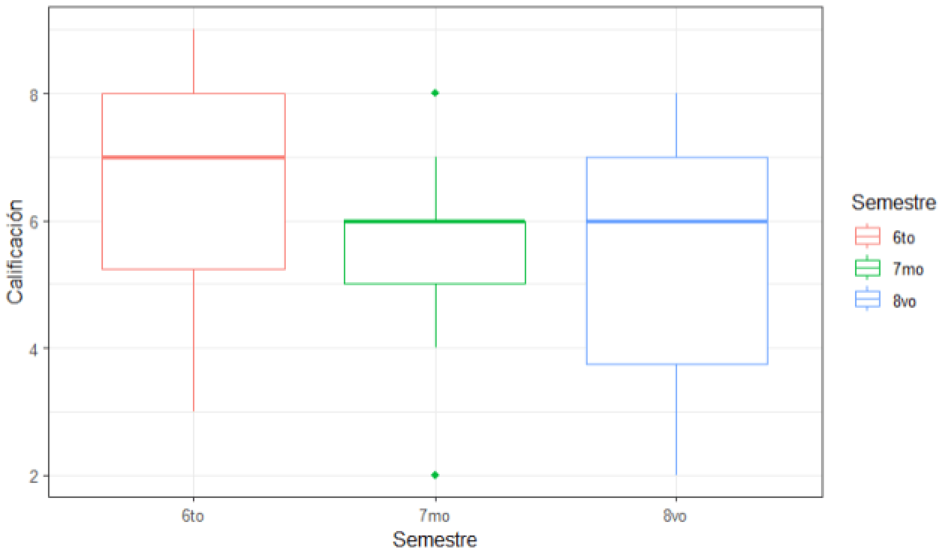
Análisis e interpretación

Los resultados en la dimensión de aplicación procedimental muestran que del total de estudiantes aplicados la prueba, aproximadamente 51% puede transformar una ecuación cartesiana en ecuación polar, así mismo 77% relaciona correctamente las gráficas de tipo caracol con el nombre que le corresponde a cada una, mientras que en la novena pregunta presentan dificultad, pues 51% respondió de manera incorrecta, por último 57% puede identificar la ecuación que le corresponde a una gráfica de rosa polar.

En base al análisis de resultados se determina que existe falencias en la parte procedimental, pues si bien en la dimensión anterior gran porcentaje dominaba los conceptos, se nota que al aplicarlos en ejercicios existe confusión, específicamente en la identificación de las ecuaciones polares que les corresponden a las diferentes gráficas, es decir que al presentarle una gráfica de una circunferencia no pueden identificar sus elementos básicos y ecuación general para reemplazarlos y determinar la ecuación polar específica de dicha gráfica, así mismo existe equivocaciones en la identificación de las rosas polares, por ende abordar ejercicios prácticos es sustancial para lograr aprendizajes significativos de los conceptos teóricos que posee cada uno de los estudiantes.

Figura 5

Comparativa de calificación entre semestres



Por último, se considera necesario realizar una comparativa de las calificaciones obtenidas entre los diferentes semestres, tomando en cuenta que la prueba era de 10 preguntas donde cada una tenía una valoración de un punto, teniendo así que octavo semestre posee su media en 6 puntos con un rango minino de 2 puntos y un máximo de 8, del mismo modo séptimo semestre posee una media de 6 puntos pero con datos que quedan por encima y/o debajo de los extremos de los bigotes, es decir que tiene valores atípicos, pues su mayor concentración de datos está entre 5 y 6 puntos, finalmente el semestre de mayor media es sexto con 7, además que tiene un máximo de 9 y mínimo de 3. Por lo tanto, los estudiantes que cursaron el sexto semestre destacan en el conocimiento de ecuaciones y gráficas polares, sin embargo, esto se debe a que en el periodo 2022-2S estudiaron el tema de ecuaciones y gráficas polares, mientras que los otros semestres ya pasaron un tiempo desde aquel momento de aprendizaje, en conclusión los discentes poseen bases y conceptos de ecuaciones y gráficas polares, pero les falta en su aplicación procedimental, es así que no tienen un aprendizaje significativo que puedan transmitir a sus futuros estudiantes.

4.2 Análisis e interpretación de la escala

La escala estuvo constituida por 12 preguntas, donde las primeras 5 tenían como opción de respuesta la escala: nunca, rara vez, a veces, casi siempre y siempre, por otro lado, las preguntas restantes poseían la escala de percepciones constituida por: totalmente en desacuerdo, en desacuerdo, neutral, de acuerdo y totalmente en acuerdo, por ello se presenta el análisis e interpretación de cada pregunta, apoyándose en tablas y gráficas correspondiente.

Pregunta1. Utilizó el software GeoGebra para el estudio de Cálculo de Varias Variables

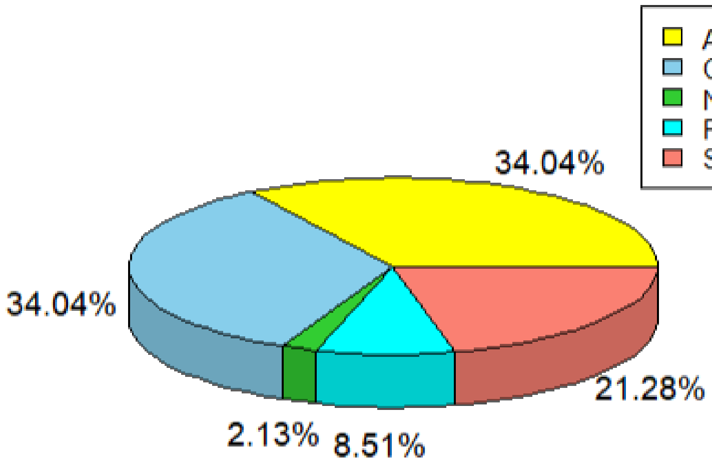
Tabla 9

Uso de GeoGebra en Cálculo de Varias Variables

Opciones	Frecuencia
Nunca	1
Rara vez	4
A veces	16
Casi siempre	16
Siempre	10
Total	47

Figura 6

Uso de GeoGebra en Cálculo de Varias Variables



Análisis e interpretación

De la encuesta aplicada a los estudiantes, 34.04% manifiestan que utilizaron a veces y casi siempre el software GeoGebra para el estudio de Cálculo de Varias Variables, así mismo 21.28% que siempre lo utilizaron, en tal sentido se determina que los estudiantes en gran porcentaje han utilizado GeoGebra para el aprendizaje de algún tópico de la asignatura de Cálculo de Varias Variables, ya sea por requerimiento del docente o intención propia.

Pregunta 2. Utilizó el software GeoGebra para el estudio de ecuaciones y gráficas polares.

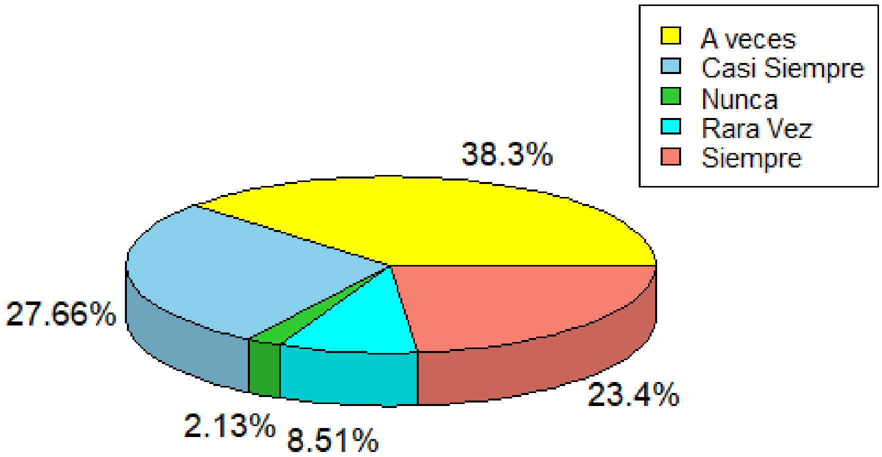
Tabla 10

Uso de GeoGebra en estudio de ecuaciones y gráficas polares

Opciones	Frecuencia
Nunca	1
Rara vez	4
A veces	18
Casi siempre	13
Siempre	11
Total	47

Figura 7

Uso de GeoGebra en estudio de ecuaciones y gráficas polares



Análisis e interpretación

Del total de estudiantes encuestados el 38.3% declara a veces haber usado el software GeoGebra para el estudio de ecuaciones y gráficas polares, además 27.66% y 23.4% casi siempre y siempre respectivamente, aproximadamente 10.64% menciona que rara vez y nunca han utilizado el software para el tópico planteado. Por lo tanto, es factible decir que la mayoría ha usado GeoGebra con una frecuencia alta para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares, ya sea por pedido del docente en el salón de clases o gusto de ellos para entender la temática desde otra perspectiva.

Pregunta 3. Dado el trazo de una gráfica polar en GeoGebra pude usar la escala numerada y las definiciones proporcionadas para obtener su respectiva ecuación.

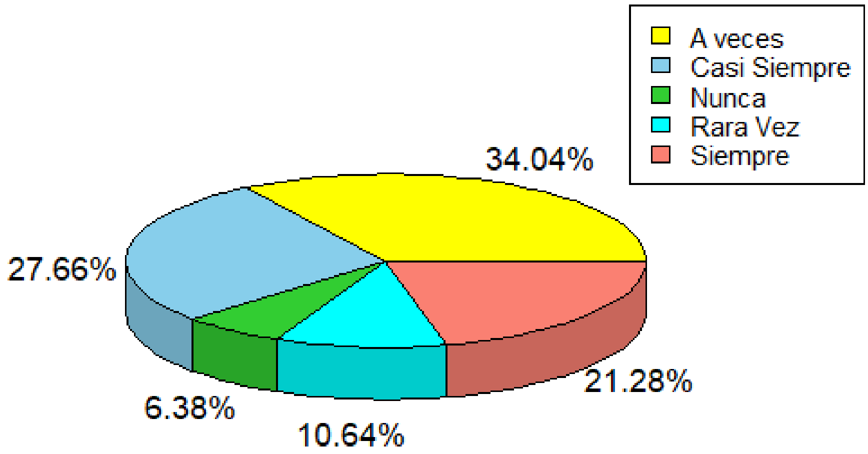
Tabla 11

Obtención de ecuación a partir de la gráfica polar

Opciones	Frecuencia
Nunca	3
Rara vez	5
A veces	16
Casi siempre	13
Siempre	10
Total	47

Figura 8

Obtención de ecuación a partir de la gráfica polar



Análisis e interpretación

De la encuesta aplicada a los estudiantes, 34.04% respondieron que a veces pueden usar la escala numerada y las definiciones proporcionadas para obtener una ecuación dado el trazo de la gráfica, asimismo 27.66% y 21.28% casi siempre y siempre respectivamente. Por tanto, es factible decir que 17% nunca y rara vez identifican la ecuación de una gráfica, esto conlleva a inferir que el aprendizaje que ellos tienen es teórico, y no procedimental, ya que gran porcentaje de los discentes afirman tener dificultad en la obtención de una ecuación a partir de la gráfica polar, tal como se mostraron los resultados en la prueba objetiva, donde más de la mitad respondieron de manera incorrecta las preguntas de identificar la ecuación polar de las gráficas presentadas.

Pregunta 4. Preferí utilizar el software GeoGebra, antes que una hoja de papel, para graficar una ecuación polar.

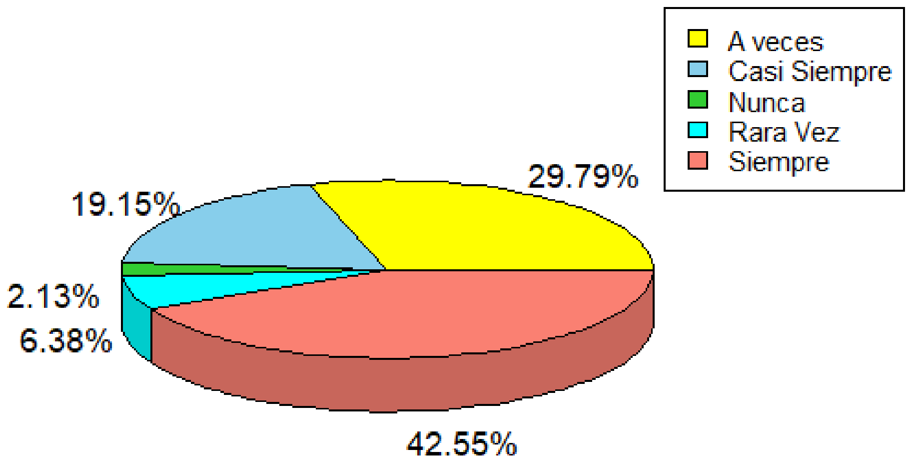
Tabla 12

Preferencia de GeoGebra al graficar una ecuación polar

Opciones	Frecuencia
Nunca	1
Rara vez	3
A veces	14
Casi siempre	9
Siempre	20
Total	47

Figura 9

Preferencia de GeoGebra al graficar una ecuación polar



Análisis e interpretación

De acuerdo a los datos obtenidos, 42.55% prefiere siempre GeoGebra antes que una hoja de papel, para graficar una ecuación polar, además 19.15% y 29.79% casi siempre y a veces respectivamente, por lo que se evidencia que los estudiantes sienten ese gusto por el software GeoGebra para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares, pues este ahorra tiempo y facilita el trazo de las curvas polares, además que permite visualizar correctamente sus elementos en comparación con la realización manual, donde la no continuidad de trazo (puntos correctos) hace que se diverge el resultado final, además se dificulta entender la simetría de cada una respecto a los ejes de graficación.

Pregunta 5. Utilizó el software GeoGebra para reforzar los conocimientos adquiridos en clase sobre ecuaciones y gráficas polares.

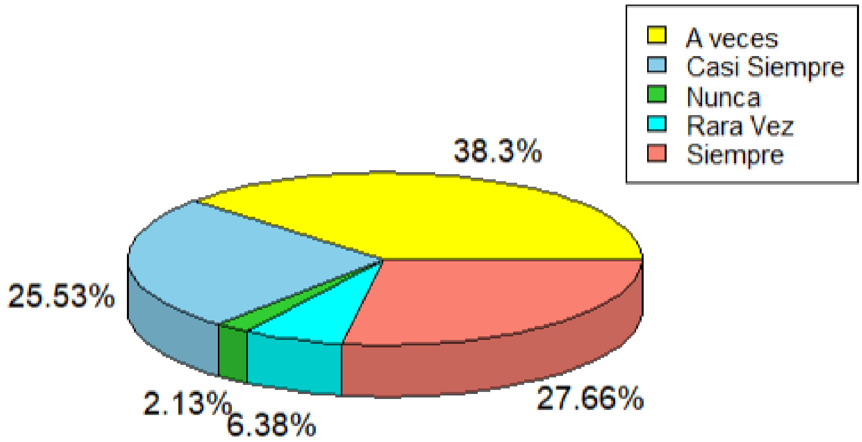
Tabla 13

Utilización de GeoGebra para reforzar conocimientos

Opciones	Frecuencia
Nunca	1
Rara vez	3
A veces	18
Casi siempre	12
Siempre	13
Total	47

Figura 10

Utilización de GeoGebra para reforzar conocimientos



Análisis e interpretación

Del total de encuestados 27.66% y 25.53% afirmaron que siempre y casi siempre respectivamente, utilizaron el software GeoGebra para reforzar los conocimientos adquiridos en clase sobre ecuaciones y gráficas polares, mientras que 38.3% a veces. Determinando que la mayoría de discentes utilizan GeoGebra en sus hogares, esto se debe a la interactividad del mismo, además de permitir la retroalimentación y poner en práctica lo aprendido, pues cada estudiante puede realizar representaciones animadas de las curvas con las ecuaciones dadas, identificando el tipo y elementos de cada una de ellas.

Pregunta 6. El software GeoGebra presenta un ambiente de trabajo dinámico y es de fácil manejo.

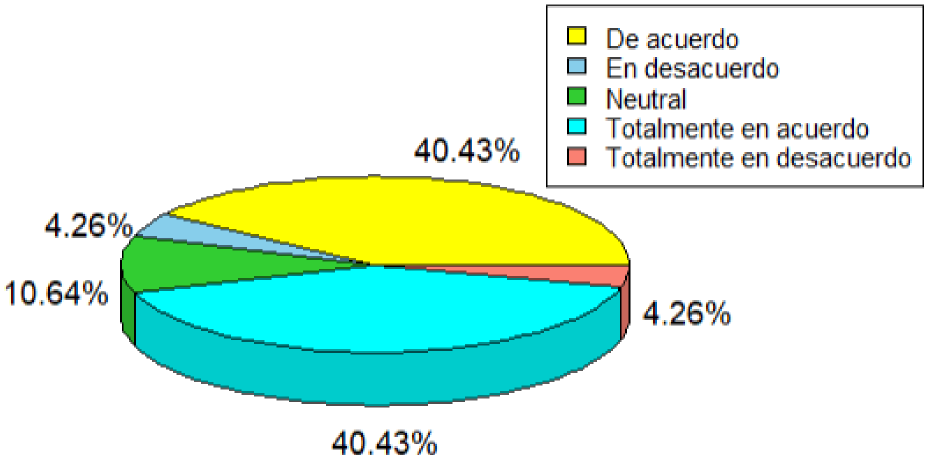
Tabla 14

Facilidad de manejo de GeoGebra

Opciones	Frecuencia
Totalmente en desacuerdo	2
En desacuerdo	2
Neutral	5
De acuerdo	19
Totalmente en acuerdo	19
Total	47

Figura 11

Facilidad de manejo de GeoGebra



Análisis e interpretación

Según los datos 80.86% de los encuestados afirmaron estar de acuerdo y totalmente de acuerdo con la afirmación de que el software GeoGebra presenta un ambiente de trabajo dinámico y es de fácil manejo, adicionalmente 10.64% se considera neutral en criterio de respuesta a la pregunta planteada. En resumidas cuentas, GeoGebra facilita la construcción de objetos matemáticos de manera dinámica a partir de sus pantallas que dispone la interfaz, tanto sus menús y herramientas como vista gráfica, en la cual se puede manipular sus elementos, permitiendo al estudiante comparar minuciosamente los contenidos matemáticos en menor tiempo, y lograr aprendizajes más significativos con un excelente logro de aprendizaje.

Pregunta 7. El uso del software GeoGebra facilita la diferenciación del tipo de gráfica de una ecuación polar con mayor rapidez.

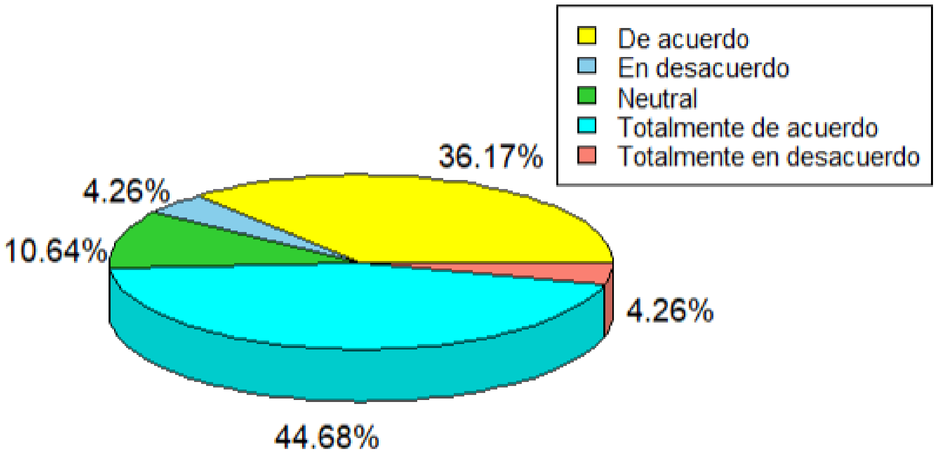
Tabla 15

GeoGebra facilita diferenciar el tipo de gráfica

Opciones	Frecuencia
Totalmente en desacuerdo	2
En desacuerdo	2
Neutral	5
De acuerdo	17
Totalmente en acuerdo	21
Total	47

Figura 12

GeoGebra facilita diferenciar el tipo de gráfica



Análisis e interpretación

De la encuesta aplicada a los estudiantes, 44.68% y 36.17% mencionaron estar totalmente de acuerdo y de acuerdo respectivamente, con el planteamiento de que usar el software GeoGebra facilita la diferenciación del tipo de gráfica de una ecuación polar con mayor rapidez, mientras que 10.64% manifiesta una postura neutral ante la afirmación dada. Por lo tanto, en el proceso de aprendizaje de ecuaciones y gráficas es recomendable utilizar el software GeoGebra, ya que este puede facilitar la identificación de los tipos de gráficas, por ejemplo, los tipos de caracoles de Pascal mediante la relación de la razón a/b, así mismo las rosas polares, circunferencias, rectas por medio del modelamiento parametrizado de sus ecuaciones ya sea generalizadas u específicas de cada ejercicio planteado.

Pregunta 8. El software GeoGebra permite observar directamente la formación de las gráficas polares de una manera óptima y precisa.

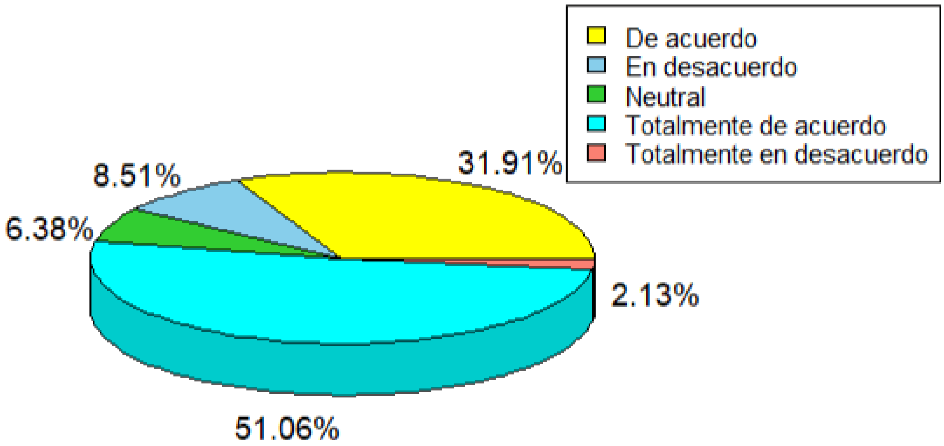
Tabla 16

GeoGebra permite observar la formación de las gráficas polares

Opciones	Frecuencia
Totalmente en desacuerdo	1
En desacuerdo	4
Neutral	3
De acuerdo	15
Totalmente en acuerdo	24
Total	47

Figura 13

GeoGebra permite observar la formación de las gráficas polares



Análisis e interpretación

Del total de encuestados 51.06% destaca estar totalmente de acuerdo que el software GeoGebra permite observar directamente la formación de las gráficas polares de una manera óptima y precisa, además 31.91% está de acuerdo al planteamiento. Es decir, aproximadamente 83% resalta al software GeoGebra como una herramienta digital que permite el aprendizaje de las gráficas polares de una manera óptima y precisa, sin embargo, existe un 10.64% no estar de acuerdo, esto puede deberse al no manejo del software con frecuencia o la forma de construcción de las gráficas polares teniendo como base su ecuación respectiva.

Pregunta 9. La utilización de un software como GeoGebra facilita el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares de manera autónoma por parte del estudiante.

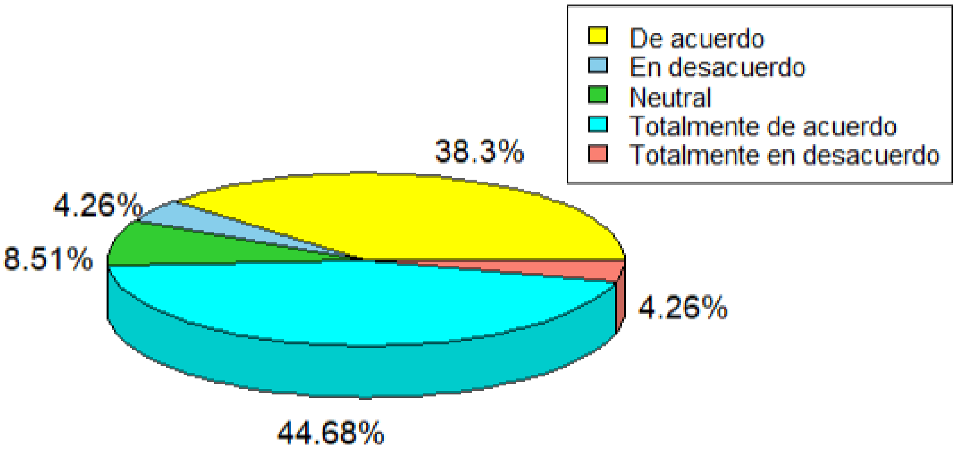
Tabla 17

GeoGebra facilita el aprendizaje autónomo

Opciones	Frecuencia
Totalmente en desacuerdo	2
En desacuerdo	2
Neutral	4
De acuerdo	18
Totalmente en acuerdo	21
Total	47

Figura 14

GeoGebra facilita el aprendizaje autónomo



Análisis e interpretación

De los 47 estudiantes encuestados, 38.3% y 44.68% declaran estar de acuerdo y totalmente de acuerdo con el planteamiento de la utilización de un software como GeoGebra facilita el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares de manera autónoma por parte del estudiante, y 8.51% mantienen la postura neutral ante la pregunta criterial propuesta. El software GeoGebra facilita el aprendizaje autónomo, ya que fomenta la creatividad y edifica el conocimiento propio al retar al discente a aplicar los conocimientos y habilidades que posee, llegando incluso a obtener nuevos conocimientos con la participación en actividades que dispone el docente u se encuentran en la web.

Pregunta 10. Una guía práctica es de gran utilidad para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares.

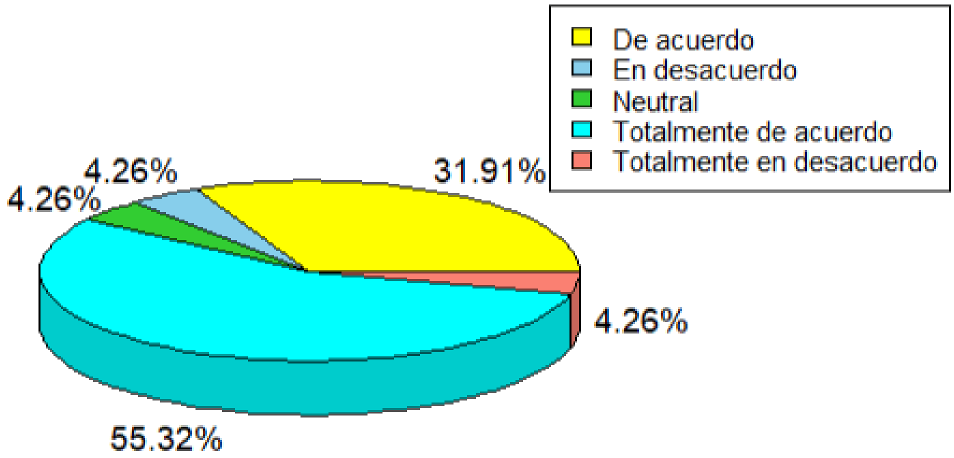
Tabla 18

Una guía es útil en el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares

Opciones	Frecuencia
Totalmente en desacuerdo	2
En desacuerdo	2
Neutral	2
De acuerdo	15
Totalmente en acuerdo	26
Total	47

Figura 15

Una guía es útil en el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares



Análisis e interpretación

De la encuesta aplicada la mayoría de estudiantes consideran útil una guía, puesto que 31.91% y 55.32% respondieron estar de acuerdo y totalmente de acuerdo con la afirmación de que una guía práctica es de gran utilidad para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares. Evidentemente, una guía en cualquier tópico dinamiza el proceso de aprendizaje, permitiendo al estudiante organizar y jerarquizar la información para tener un ambiente de aprendizaje dinámico y eficiente, es por ello que en el tema de estudio los estudiantes creen factible una guía.

Pregunta 11. Una guía práctica sobre el uso del software GeoGebra favorece el aprendizaje en la construcción de gráficas polares.

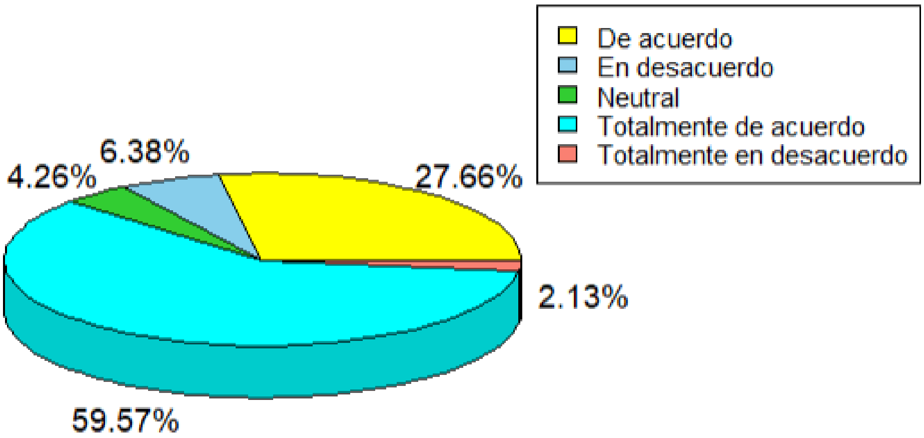
Tabla 19

Una guía práctica y aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares

Opciones	Frecuencia
Totalmente en desacuerdo	1
En desacuerdo	3
Neutral	2
De acuerdo	13
Totalmente en acuerdo	28
Total	47

Figura 16

Guía práctica y aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares



Análisis e interpretación

De la encuesta aplicada a los estudiantes, 59.57% están totalmente de acuerdo con la afirmación de que una guía práctica sobre el uso del software GeoGebra favorece el aprendizaje en la construcción de gráficas polares, además 27.66% manifiesta estar de acuerdo y 4.26% prefiere mantener un criterio neutral ante tal planteamiento. Adicionalmente solo 8.51% declara estar en desacuerdo y totalmente en desacuerdo, esto es una minoría respecto a los que apoyan la idea de la guía práctica. De este modo se determina que los dicentes tienen criterio para utilizar una guía práctica, pues consideran que puede favorecer el aprendizaje, pues esta es considerada como un recurso para la instrucción con pertinencia a los contenidos, ya que permite la autonomía y autoevaluación del educando logrando una reflexión sobre su aprendizaje.

Pregunta 12. Me gustaría contar con una guía práctica para la construcción de gráficas polares mediante el software GeoGebra.

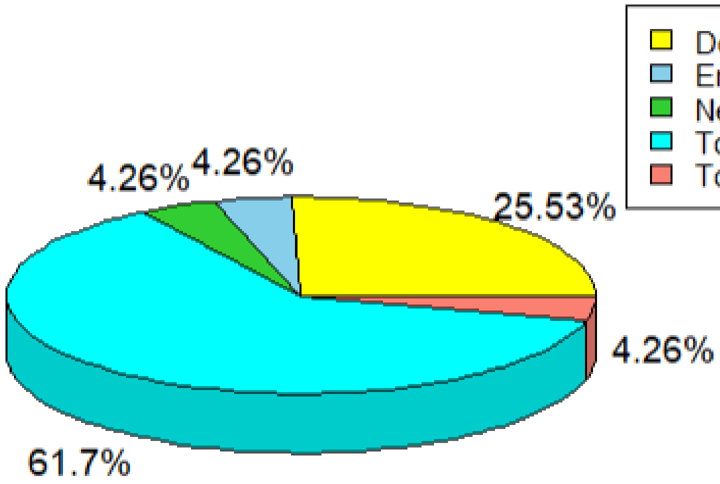
Tabla 20

Gusto sobre guía práctica con GeoGebra

Opciones	Frecuencia
Totalmente en desacuerdo	2
En desacuerdo	2
Neutral	2
De acuerdo	12
Totalmente en acuerdo	29
Total	47

Figura 17

Gusto sobre guía práctica con GeoGebra



Análisis e interpretación

Del total de estudiantes encuestados, aproximadamente 87% les gustaría contar con una guía práctica para la construcción de gráficas polares mediante el software GeoGebra, pues ellos respondieron estar de acuerdo y totalmente de acuerdo en la afirmación planteada, por lo tanto, es factible proponer y realizar una guía práctica sobre el tema de ecuaciones y gráficas polares, pues tendrá la aceptación de los estudiantes encuestados, así como otros estudiantes que forman parte de la población en estudio.

4.3 Discusión

Aquise et al. (2019) resalta que el aprendizaje de los diversos tópicos de matemática resulta difícil, pues incluyen conceptos, propiedades, teoremas y su aplicación procedimental. Esto aún persiste en la actualidad, pues en base a los resultados obtenidos en la investigación, se muestra que los estudiantes poseen bases teóricas de ecuaciones y gráficas polares, pero tienen falencias en su aplicación procedimental; por lo tanto, abordar la temática desde otra perspectiva donde se implemente recursos tecnológicos, para que el estudiante construya y fortalezca su aprendizaje de forma autónoma e interactiva, resulta significativo en su formación y podría facilitar la enseñanza a sus futuros alumnos.

Por ende, aprender matemáticas en la etapa universitaria es trascendental e importante su desarrollo y mejoramiento, con acceso a internet y softwares gratuitos que desplieguen su capacidad de razonamiento analítico-matemático, uno de ellos es el aplicativo GeoGebra que incrementa el rendimiento por su contribución al aprendizaje significativo de los conceptos y aplicaciones de esta ciencia exacta (Cenas et al., 2021).

Tal como lo destacaron los estudiantes en sus respuestas, han utilizado el software para matemáticas, pero en menor medida en el estudio de las ecuaciones y gráficas polares, a pesar que en las preguntas relacionadas sobre GeoGebra destacan sus cualidades y beneficios que este puede dar. Schreiberova y Moravkova (2023) enfatizan el potencial de interacción con sus características dinámicas de manipulación simple de los objetos u otros controles, además de observar los cambios de forma directa; así mismo Cenas et al. (2021) resalta que es sencillo de utilizar y presenta grandiosos aportes para el estudiante universitario en el área de la matemática.

En tal virtud, es significativo emplear el software GeoGebra como recurso mediado por las TIC y más si se encuentra plasmado en un documento que tengan al alcance para su aprendizaje, pues 87% de la muestra destaca que es útil contar con una guía, por lo cual resulta la propuesta de una guía práctica con GeoGebra para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares. Sin embargo, se trata de un proceso complejo por las cuestiones de puesta en práctica durante la vida universitaria y los recursos tecnológicos que se tiene al alcance.

No obstante, Aray et al. (2020) considera que una apropiación conceptual con procesos de innovación y de forma continua hace que los discentes sean excelentes profesionales en el futuro, además que contar con una guía permite estudiar en cualquier ambiente, ya sea el aula de clase u hogar. En este orden Padilla (2022) establece que una guía es "un recurso ideal para llevar a cabo el seguimiento del trabajo del alumno de manera ordenada", brindando información pertinente y práctica para una asimilación eficaz de la información compartida por el docente.

CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

Acorde al análisis de los datos de la investigación, el conocimiento por parte de la muestra seleccionada, tanto en la dimensión conceptual como procedimental, mostró una deficiencia dado que alrededor del 40% no domina los conceptos básicos y esenciales en el estudio de ecuaciones polares, por consiguiente, al 50% se le dificulta aplicar contenidos teóricos en ejercicios prácticos. Estos resultados mixtos proporcionan una visión de la preparación y entendimiento de los estudiantes en este tópico específico de las matemáticas, con una atención adicional en el desarrollo de habilidades procedimentales necesarias y de forma sólida para resolver ejercicios y trazar gráficas polares con precisión.

El nivel de utilización del software GeoGebra en los estudiantes corresponde al 52%, es decir que existe una adopción considerable en el aprendizaje de los conceptos matemáticos relacionados a ecuaciones y gráficas polares, no obstante, la mayoría presenta desafíos importantes en la identificación de ecuaciones a partir de la gráfica, por lo que existen áreas de mejora. Por otro lado, 81% de los encuestados enfatizan en las cualidades que ofrece el software, como facilidad de manejo, aprendizaje autónomo y representación visual efectiva; estas percepciones positivas motivan a seguir utilizando GeoGebra de forma directa y práctica por medio de una guía, ya que ellos mismos manifiestan la disposición de contar con una para lograr aprendizajes significativos y aplicables en su labor docente.

La guía práctica elaborada radica en la compresión de ecuaciones y gráficas polares agrupadas en cinco unidades, abordando la base de coordenadas polares y las posteriores ecuaciones, facilitando el aprendizaje con su enfoque de aplicación directa del software GeoGebra para la construcción de las gráficas, preparando a los estudiantes de manera significativa y que posean un recurso para enseñar con confianza este tópico en su futuro labor, además de destacar cómo la tecnología educativa enriquece la formación de los educadores del mañana.

5.2 Recomendaciones

Para lograr aprendizajes significativos, tanto los docentes como los estudiantes deberían buscar métodos y estrategias apoyados de las TIC para reforzar las habilidades matemáticas, desafiando el dominio conceptual y proporcionando mayor énfasis en las actividades procedimentales de manera visual y práctica.

Basándose en el estudio, es recomendable utilizar GeoGebra para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares, y otras temáticas de la Matemática; pues los mismos estudiantes destacan sus potenciales y aporte al aprendizaje, esto por ser un software que facilita la comprensión de conceptos abstractos de manera visual e interactiva.

Difundir la guía práctica diseñada sobre ecuaciones y gráficas polares con el uso de GeoGebra para fortalecer su aprendizaje, la misma se esté accesible a los estudiantes, además de recopilar opiniones de docentes y discentes para identificar áreas de mejora y realizar los ajustes necesarios en base a las necesidades del estudiantado.

CAPÍTULO VI. PROPUESTA

6.1 Título de la propuesta

Guía Práctica: Ecuaciones y Gráficas Polares con GeoGebra

6.2 Justificación de la propuesta

En el campo de la educación de las ciencias exactas, es esencial proporcionar a los estudiantes herramientas y recursos efectivos que fomenten la comprensión de los conceptos abstractos. En este orden de ideas, en matemáticas es sustancial el conocimiento de recursos que faciliten el aprendizaje y la participación activa de los alumnos, siendo GeoGebra el software de mayor relevancia académica, ya que proporciona un entorno interactivo y dinámico que facilita la exploración y experimentación de las ecuaciones polares.

En virtud de las dificultades encontradas en la muestra estudiada respecto al aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares, se propone el diseño de una guía práctica con el uso del software GeoGebra, pues los resultados de la investigación realizada muestran que la mitad de los estudiantes presentaron dificultad en responder la parte conceptual como procedimental, es decir, que se les dificultó la distinción de las diferentes ecuaciones, además de la identificación de las mismas a ejemplos de gráficas presentadas, por lo que GeoGebra es una herramienta que fortalece los conocimientos de manera autónoma e interactiva, y la mayoría de los consultados lo considera factible por su facilidad de uso.

La creación de esta guía práctica no solo responde a la necesidad de fortalecer el aprendizaje de los discentes, sino que también se alinea con la demanda de competencias digitales que debe tener un docente de la era tecnológica. Es así que la propuesta radica en el aprendizaje constructivista de las ecuaciones y gráficas polares usando GeoGebra, por medio de ejemplos detallados de creación de applets de graficación de las misma y diferenciación de sus características específica. Por eso, al diseñar esta guía no solo se está brindando una comprensión más profunda del tema, sino que también el desarrollo de habilidades prácticas e invaluables en su formación docente.

6.3 Fines de la guía

La creación de esta guía práctica sobre ecuaciones y gráficas polares con GeoGebra se proyecta al fortalecimiento de la educación matemática, promoviendo el aprendizaje activo en estudiantes de pedagogía para el desarrollo de las competencias matemáticas necesarias en su futura labor docente. De este modo, será una valiosa contribución a la comunidad educativa, pues mejorará la comprensión de las ecuaciones y gráficas polares, además de desarrollar habilidades matemáticas con el uso de GeoGebra.

De esta manera, se espera que los discentes que utilicen la guía eleven su rendimiento académico, desarrollen mayor apreciación por las matemáticas y la relevancia de las ecuaciones y gráficas polares, así mismo aborden problemas matemáticos relacionados al tema en estudio con mayor confianza y habilidad.

6.4 Objetivos de la propuesta

6.4.1 Objetivo general de la propuesta

Favorecer el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares en los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física mediante el uso del software GeoGebra

6.4.2 Objetivos específicos de la propuesta

- Identificar los conceptos fundamentales de las ecuaciones y gráficas polares
- Promover el uso efectivo de GeoGebra para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares
- Proporcionar ejemplos detallados y paso a paso de la creación de applets para la graficación de ecuaciones polares específicas

6.5 Enfoque teórico y contenidos de la guía

La guía se fundamenta en los enfoques constructivista y conectivista, es decir una compresión sólida de las ecuaciones polares y su representación gráfica por medio de lo práctico y participativo de los estudiantes a través del uso de GeoGebra.

Se detalla lo relevante respecto a los contenidos de la guía práctica:

- ➢ La guía comenzará con instrucciones detalladas sobre cómo instalar, configurar y utilizar GeoGebra para estos propósitos, además se presentará una breve introducción a la interfaz del software, destacando sus elementos y herramientas principales.
- ➢ La guía tendrá explicaciones teóricas concisas de los conceptos fundamentales de las ecuaciones polares, partiendo desde las coordenadas polares, así como su conversión, representación y relación entre el sistema cartesiano y polar.
- ➢ Se proporcionará ejemplos concretos para ilustrar los conceptos teóricos, asegurando una comprensión significativa por parte de los estudiantes.
- ➢ Promoverá el uso de GeoGebra como herramienta interactiva para la visualización de gráficas en coordenadas polares.
- ➢ Se incluirá ejemplos paso a paso de la creación de applets en GeoGebra para cada tipo de ecuación polar: rectas, circunferencias, caracoles de Pascal, rosas y cónicas.
- ➢ Los ejemplos guiarán a los estudiantes el proceso de construcción y configuración de parámetros, además se incluirá ejercicios propuestos y evaluaciones cortas para verificación de lo prendido en cada tipo de ecuación polar.

6.6 Recursos utilizados

A continuación, se detallan los recursos utilizados para la creación de la propuesta.

Recursos humanos
- Autor/ Editor: Persona que elaborará la guía práctica
- Docente experto: Persona que revise la redacción y edición del material

Recursos tecnológicos
- Computadora: Laptop con acceso a internet y software de edición de texto
- Software GeoGebra: Acceso al programa de escritorio para crear los de recursos
- Plataforma en línea: Sitio web donde se alojará el/los recursos creados

Otros recursos
- Financiamiento: Rubro necesario para cubrir los costos de impresión
- Tiempo: Compromiso de tiempo y esfuerzo para desarrollar la guía

Finalmente, para explorar la guía en su totalidad e iluminar el camino hacia la comprensión de las fascinantes expresiones matemáticas como son las ecuaciones polares y sus representaciones gráficas, dirigirse al anexo 9. En las páginas adjuntas, se presenta la guía práctica con el uso del software GeoGebra como herramienta que facilita la comprensión de manera dinámica los conceptos abstractos.

BIBLIOGRÁFIA

Aguilar, R. (2004). La Guía Didáctica, un material educativo para promover el aprendizaje autónomo. Evaluación y mejoramiento de su calidad en la modalidad abierta y a distancia de la UTPL. *RIED-Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, *7*(1–2), 179–192. https://doi.org/10.5944/RIED.7.1-2.1082

Alabdulaziz, M. S., Aldossary, S. M., Alyahya, S. A., & Althubiti, H. M. (2021). The effectiveness of the GeoGebra Programme in the development of academic achievement and survival of the learning impact of the mathematics among secondary stage students. *Educ Inf Technol*, *26*, 2685–2713.

Alcívar, C., Vargas, V., Calderón, J., Triviño, C., & Santillan, S. (2019). El uso de las TIC en el proceso de enseñanza- aprendizaje de los docentes en las Universidades del Ecuador. *Espacios*, *40*(02). https://www.revistaespacios.com/a19v40n02/19400227.html

Aquise Escobedo, S., Cuadros Paz, L., Delgado Sarmiento, Y., & Meza Campos, L. (2019). Aprendizaje del Cálculo con visualización interactiva. *Revista Iberica de Sistemas e Tecnologias de Informacao*, *21*, 254–267. http://www.risti.xyz/issues/ristie21.pdf

Aray, C., Alcívar, G., Palma, M., & Ampuero, N. (2020). La Superficialidad en la Enseñanza de la Trigonometría en el Bachillerato y su Incidencia en el Aprendizaje del Cálculo en el Nivel Universitario. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuso)*, *5*(2), 62–69.

Araya, V., Alfaro, M., & Andonegui, M. (2007). CONSTRUCTIVISMO: ORIGENES Y PERSPECTIVAS. *Laurus*, *13*(24), 76–92. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76111485004

Arteaga, E., Del Sol, J., & Medina, J. (2019). El Geogebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Conrado*, *15*(70), 102–108. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442019000500102

Asanza, J., Huerta, S., & Acosta, M. (2020). El uso de las TICs en la enseñanza de las matemáticas universitarias. *Revista Universidad de Guayaquil*, *130*(1), 17–27. https://doi.org/10.53591/RUG.V130I1.1366

Baptista, F. (2017). *O Ensino de coordenadas polares através do software GeoGebra* [Universidade Estadual de Campinas]. https://doi.org/https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2017.985856

Basurto, S., Velásquez, A., Moreira, J., & Rodriguez, M. (2021). O vídeo educativo como recursos didáctico inclusivo na prática pedagógica atual. *Polo Del Conocimiento*, *6*(54), 234–252. https://doi.org/10.23857/pc.v6i1.2134

Benavides, G., Benavides, N., & Jumbo, C. (2016). *USO DE GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA EL ESTUDIO, LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN EL AULA*. https://www.pedagogia.edu.ec/public/docs/3d0d8e28687965d22d16dad72b37b692.pdf

Bolaño, O. (2020). El constructivismo: Modelo pedagógico para la enseñanza de las matemáticas. *Revista EDUCARE - UPEL-IPB - Segunda Nueva Etapa 2.0*, *24*(3), 488–502. https://doi.org/10.46498/reduipb.v24i3.1413

Campaña, M. (2019). *GUÍA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA UTILIZANDO GEOGEBRA EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO DE BACHILLERATO* [Universidad Nacional de Chimborazo]. http://repositorio.uisrael.edu.ec/handle/47000/2308

Carvajal, L. J., Covarrubias, J. M., González, J. de J., & Uriza, J. J. (2019). Uso De

Tecnología en El Aprendizaje De Matemáticas Universitarias. *RITI Journal*, *7*(13), 77–82. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7107348.pdf

Castillo, D. (2020). Las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje desarrollados por maestros tutores de Educación Primaria en la Región de Murcia. *RiiTE Revista Interuniversitaria de Investigación En Tecnología Educativa*, *9*, 1–14. https://doi.org/10.6018/RIITE.432061

Cenas, F., Blaz, F., Gamboa, L., & Castro, W. (2021). Geogebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios. *Horizontes. Revista de Investigación En Ciencias de La Educación*, *5*(18), 382–390. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v5i18.181

Chau, N., & Sánchez, R. (2010). Coordenadas polares: curvas maravillosas. *En Blanco y Negro*, *1*(1), 1–27. https://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro/article/view/2191

Coloma, M., Labanda, M., Michay, G., & Espinosa, W. (2020). Las Tics como herramienta metodológica en matemática. *Espacios*, *41*(11). https://revistaespacios.com/a20v41n11/a20v41n11p07.pdf

Coronel, F., Guilcapi, J., & Vargas, J. (2018). Uso De Geogebra Y Su Incidencia En El Proceso Enseñanza- Aprendizaje De Grafica De Funciones En El Nivel Superior. *European Scientific Journal, ESJ*, *14*(21). https://doi.org/10.19044/ESJ.2018.V14N21P1

Corral, I., Castro, R., & Corral, Y. (2018). Dificultades de aprendizaje de la matemática: cómo ayudar al estudiante / Difficulties of math learning: how to help the student. *Revista ARJÉ Edición Especial*, *12*(23), 49–59. http://www.arje.bc.uc.edu.ve/arje23e/art05.pdf

Cruz, M., Pozo, M., Aushay, H., & Arias, A. (2019). Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como forma investigativa interdisciplinaria con un enfoque intercultural para el proceso de formación estudiantil. *E-Ciencias de La Información*, *9*(1). https://doi.org/10.15517/eci.v1i1.33052

Cueva, J. L., García, A., & Martínez, O. A. (2020). La influencia del conectivismo para el uso de las tic en el proceso de enseñanza aprendizaje. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, *2*(21). https://doi.org/10.46377/DILEMAS.V32I1.1975

Daza, S. (2021). Estrategias para el pensamiento crítico , según el enfoque metacognitivo de John Flavell , en Estudiantes Universitarios. *JOURNAL OF SCIENCE AND RESEARCH*, *6*(3), 407–426. https://doi.org/https://doi.org/10.5281/zenodo.5660330

Farinango, A., & Vila, J. (2022). *Modelo constructivista para la enseñanza de las matemáticas en los estudiantes del 5to año de EGB. de la unidad educativa "17 de Julio" en Ibarra, periodo febrero-julio del 2021* [Universidad Técnica del Norte]. http://repositorio.utn.edu.ec/handle/123456789/11912

Gónzalez, A. F. (2019). *Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de coordenadas, mediante el uso de un software interactivo* [Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/77240

Guallichico, M. (2022). *GeoGebra en el proceso virtual de enseñanza-aprendizaje de la Unidad 3. Cónicas en la asignatura de Geometría Analítica Plana para los estudiantes de tercer semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, Matemática y Física, período 2021-2021* [Quito : UCE]. http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/26433

Guerra, J. (2020). El constructivismo en la educación y el aporte de la teoría sociocultural de Vygotsky para comprender la construcción del conocimiento en el ser humano. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, *VII*(2). https://doi.org/10.46377/DILEMAS.V32I1.2033

Haro, F. (2020). *Aplicación del Software Libre Geogebra en el Aprendizaje de Sólidos de Revolución en Cálculo Integral para los Estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, Matemática y Física de la Universidad Central del Ecuador* [Trabajo de Grado, Universidad Central del Ecuador]. http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/22494

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta.). McGrawHill. http://journal.um-surabaya.ac.id/index.php/JKM/article/view/2203

Hernández, R., & Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* (1ra.). McGRAW-HILL Interamericana. http://repositorio.uasb.edu.bo:8080/bitstream/54000/1292/1/Hernández- Metodología de la investigación.pdf

Jadán, W. (2022). *GUÍA DIDÁCTICA PARA EL USO DE GEOGEBRA APLICADO A PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LA ASIGNATURA DE CALCULO DIFERENCIAL*. [Trabajo de Grado, Universidad de Cuenca].

Jiménez, D. (2019). Herramientas digitales para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica. [Posgrado, Especialización en Multimedia para la Docencia, Universidad Cooperativa de Colombia]. In *A*. https://repository.ucc.edu.co/handle/20.500.12494/11110

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica* (13va.). Limusa. https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Lehmann]Geometria Analitica.pdf

Lehmann, C. (2012). Coordenadas Polares. In *Geometría Analítica* (p. 237). Limusa. https://lya.fciencias.unam.mx/gfgf/ga20101/material/ChapXLehmann.pdf

LEITHOL, L. (1998). *El Cálculo* (7ma ed.). Oxford University Press-Harla México.

López, E., & Escobedo, F. (2021). Conectivismo, ¿un nuevo paradigma del aprendizaje? *Desafios*, *12*(1), 67–73. https://doi.org/10.37711/DESAFIOS.2021.12.1.259

López, R., Avello, R., Sánchez, S., Quintana, M., & Palmero, D. (2019). Validación de instrumentos como garantía de la credibilidad en las investigaciones científicas. *Revista Cubana de Medicina Militar*, *48*(2), 441–450. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0138-65572019000500011

Marcillo, P., & Nacevilla, C. (2021). *La teoría del conectivismo de siemens en la educación* [Quito: UCE]. http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/22856

Martínez, J., Cachuput, J., Chamarro, H., & López, J. (2019). Geo-gebra como herramienta didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, y su incidencia en el rendimiento académico en los estudiantes de la carrera de ingeniería agronómica. *Explorador Digital*, *3*(3.1), 204–223. https://doi.org/10.33262/exploradordigital.v3i3.1.881

Morales, L., Zuta, L., Solis, B., Otoya, F., & García, M. (2023). A The use of GeoGebra software in learning mathematics: systematic review. *Referencia Pedagógica RP*, *11*(1), 2–13. https://orcid.org/0000-0003-0971-335X

Ñaupas, H., Mejía, E., Novoa, E., & Villagomez, A. (2014). *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis* (4ta.). Ediciones de la U.

Ortega, H. (2022). *Principales Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Básica Primaria, Consecuencias y Posibles Tratamiento* [Universidad Nacional Abierta y a Distancia]. https://repository.unad.edu.co/bitstream/handle/10596/48658/hdortegag.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ortiz, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophía*, *19*(19), 93–110. https://doi.org/10.17163/SOPH.N19.2015.04

Padilla Chicaiza, R. M. (2022). *Guía Didáctica Interactiva Para La Enseñanza De Leyes De*

Newton En La Asignatura De Físicadirigida a Estudiantes De Segundo Año De Bachillerato En La Unidad Educativa Fiscal Eloy Alfaro En El Año Lectivo 2021 – 2022. PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR.

Perez, U. (2014). *Estrategia didactica para introducir las coordenadas polares y sus aplicaciones en la representacion y analisis de la parabola y la elipse* [Universidad Nacional de Colombia]. http://www.bdigital.unal.edu.co/48870/

Pino, R., & Urías, G. (2020). Guías didácticas en el proceso enseñanza-aprendizaje: ¿Nueva estrategia? *Revista Scientific*, *5*(18), 371–392. https://doi.org/10.29394/SCIENTIFIC.ISSN.2542-2987.2020.5.18.20.371-392

Posso, A., Gómez, J., & Uzuriaga, V. (2007). Dificultades que aparecen en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática al pasar del bachillerato. *Scientia Et Technica*, *13*(14), 495–500.

Preiner, J. (2008). *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra* [University of Salzburg]. https://www.researchgate.net/publication/315689337_Introducing_Dynamic_Mathematics_Software_to_Mathematics_Teachers_the_Case_of_GeoGebra

Quijada Tipán, J. E. (2019). *Guía didáctica para el aprendizaje de fracciones para sexto año de educación general básica mediante herramientas de autor* [Quito, Ecuador : Universidad Tecnológica Israel]. http://repositorio.uisrael.edu.ec/handle/47000/2343

Raichman, S., & Totter, E. (2016). *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*. Universidad Nacional de Cuyo. https://bdigital.uncu.edu.ar/objetos_digitales/7224/librogeoing.pdf

Reyes, J. (2020). Reducción de obstáculos de aprendizaje en matemáticas con el uso de las TIC. *IE Revista de Investigación Educativa de La Rediech*, *11*, 1–16. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v11i0.697

Rivera, J., & Álvarez, E. (2020). *Cálculo Vectorial- Parte I*. Fondo Editorial Pascual Bravo. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Calculo_III/index.html?page=2

Rivera, J., & Navarro, J. (2018). *Curvas y superficies paramétricas*. Fondo Editorial Pascual Bravo. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Curvas_y_Superficies_Parametricas/index.html

Rojas, R. (2020). Introducción del GeoGebra en el proceso de enseñanza–aprendizaje de Geometría a docentes en formación. *Revista Caribeña de Investigación Educativa*, *4*(1), 124–134. https://doi.org/10.32541/recie.2020.v4i1.pp124-134

Ruiz, C. (2013). *Instrumentos y Tecnicas de Investigacion Educativa* (3ra.). DANAGA Training and Consulting. https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/57894592/Instrumentos_y_Tecnicas_de_Investigacion_Educativa_-_Carlos_Ruiz-Bolivar-libre.pdf?1543619884=&response-content-disposition=attachment%3B+filename%3DInstrumentos_y_Tecnicas_de_Investigacion.pdf&Expires=165845

Sánchez, P., Galindo, R., & Ortiz, M. (2021). Herramientas tecnológicas en la planeación didáctica en educación media superior. *Revista Electrónica Sobre Cuerpos Académicos y Grupos de Investigación*, *8*(16). https://www.cagi.org.mx/index.php/CAGI/article/view/242

Sánchez, R., Costa, Ó., Mañoso, L., Novillo, M., & Pericacho, F. (2019). Orígenes del conectivismo como nuevo paradigma del aprendizaje en la era digital. *Educación y Humanismo*, *21*(36), 121–136. https://doi.org/10.17081/edu

Sarmiento, P., & Toledo, C. (2022). GeoGebra aplicado como estrategá metodológica en el área de Matemática. *Polo Del Conocimiento*, *7*(8), 625–640.

https://doi.org/10.23857/pc.v7i8
Schreiberova, P., & Moravkova, Z. (2023). The Use of Geogebra in Technical Mathematics. *MM Science Journal*, *2023-March*, 6368–6374. https://doi.org/10.17973/MMSJ.2023_03_2022112
Solórzano, F., & García, A. (2016). Fundamentos del aprendizaje en red desde el conectivismo y la teoría de la actividad. *Revista Cubana de Educación Superior*, *35*(3), 98–112. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0257-43142016000300008&lng=es&nrm=iso&tlng=pt
Tamayo, M. (2004). *El proceso de Investigación Científica*. LIMUSA. https://es.scribd.com/doc/286815058/El-Proceso-de-La-Investigacion-Cientifica-Mario-Tamayo-y-Tamayo-4-Edicion-2004
UNACH. (2019). *LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPEIMENTALES , MATEMÁTICA Y LA FÍSICA*. https://www.unach.edu.ec/licenciatura-en-pedagogia-de-las-matematicas-y-la-fisica-ele/
Vicent, R., Granado, F., & Pariche, A. (2019). Propuesta para la enseñanza/aprendizaje de las coordenadas polares con GeoGebra. In Universidad de Meddelín (Ed.), *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/35/267
Villena, M. (2013). *Coordenadas Polares*. ESPOL.

ANEXOS

Anexo 1

Instrumento: Prueba Objetiva

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS
PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA

El siguiente instrumento es exclusivamente con fines académico para el desarrollo del trabajo de titulación, el mismo que tiene como objetivo recolectar información sobre el nivel de conocimiento en ecuaciones y gráficas polares de los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.

Edad: ___________

Sexo: ____ H _____M

Semestre (Periodo 2022-2S): ____6to ____7mo _____8vo

Instrucciones:

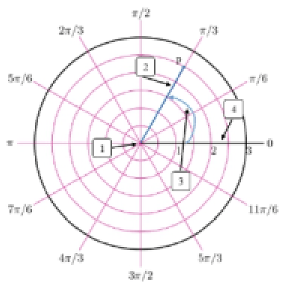
- Lea detenidamente cada una de las preguntas antes de seleccionar la respuesta correcta.
- Encierre en un círculo el literal de la respuesta correcta.
- En las preguntas 7, 8, 9 y 10 deberá seleccionar la respuesta correcta e indicar el proceso de resolución del ejercicio.
- La resolución del instrumento tendrá una duración de 45 minutos.
- Responda las preguntas en base a su conocimiento…. ¡¡Éxitos!!

Dimensión: Carácter Conceptual

1. Identifique las ecuaciones que relacionan la coordenadas polares y cartesianas.
   a) $r = f(\theta);\ y = r\ sen\theta;\ r^2 = \sqrt{x^2 + y^2};\ \tan\theta = \frac{y}{x}$
   b) $r = f(\theta);\ y = r\ sen\theta;\ r = \sqrt{x^2 + y^2};\ \tan\theta = \frac{x}{y}$
   c) $x = rcos\ \theta;\ y = r\ sen\theta;\ r^2 = x^2 + y^2;\ \tan\theta = \frac{y}{x}$
   d) $x = rcos\ \theta;\ y = r\ sen\theta;\ r = x^2 + y^2;\ \tan\theta = \frac{x}{y}$

2. ¿Cuál es la representación de un punto P del plano cartesiano, en el sistema de coordenadas polares?
   a) (x, y)
   b) (r, θ)
   c) $(r, N\theta S)$
   d) $(P_x\vec{i} + P_y\vec{j})$

3. Relacione cada elemento de la representación del sistema polar con su nombre



Elemento	Nombre
1	A) Medida del ángulo (θ)
2	B) Eje polar
3	C) Distancia no dirigida (r)
4	D) Polo u origen (O)

a) 1B, 2C, 3D, 4A
b) 1D, 2B, 3A, 4C
c) 1C, 2D, 3A, 4B
d) 1D, 2C, 3A, 4B

4. ¿Cómo se define una gráfica polar?
   a) Al conjunto de puntos y sólo aquellos puntos, que tienen al menos dos pares de coordenadas polares que satisfacen una ecuación polar.
   b) Al conjunto de puntos y sólo aquellos puntos, que tienen al menos un par de coordenadas polares que satisfacen una ecuación polar.
   c) A un punto expresado en coordenadas polares que satisface una única ecuación polar.
   d) A un punto expresado en coordenadas polares que no satisface una única ecuación polar.

5. Relacione la forma general de cada ecuación con su respectivo tipo de gráfica.

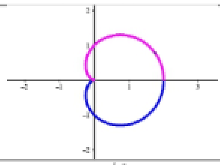
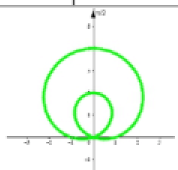
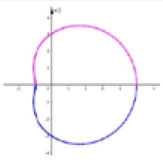
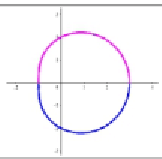
Ecuación	Tipo de gráfica
1) $\boldsymbol{r = C; r = 2a\cos\theta ; r = 2bsen\theta}$	A) Rectas
2) $\boldsymbol{\theta = k; rsen\ \theta = b ; rcos\theta = a}$	B) Espirales
3) $\boldsymbol{r = a + b\theta}$	C) Rosas
4) $\boldsymbol{r = a + b\cos\theta}$	D) Caracoles
5) $\boldsymbol{r = a\cos(b\theta) ; r = a\ sen(b\theta)}$	E) Circunferencias
6) $\boldsymbol{r = \frac{e*d}{1\pm e\ cos\theta}; r = \frac{e*d}{1\pm e\ sen\theta}}$	F) Cónicas

a) 1A, 2E, 3D, 4B, 5F, 6C
b) 1D, 2E, 3B, 4C, 5D, 6F
c) 1E, 2A, 3B, 4D, 5C, 6F
d) 1B, 2C, 3D, 4E, 5F, 6ª

6. Identifique el enunciado que relaciona el criterio de simetría de una gráfica respecto al eje polar
   a) Es simétrica respecto al eje polar si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, r-\theta)$ o $(-r, -\theta)$
   b) Es simétrica respecto al eje polar si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, -\theta)$ o $(-r, r-\theta)$
   c) Es simétrica respecto al eje polar si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(-r, \theta)$ o $(-r, r+\theta)$
   d) Es simétrica respecto al eje polar si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, -\theta)$ o $(-r, r+\theta)$

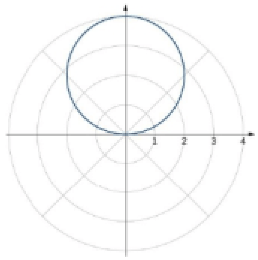
Dimensión: Aplicación Procedimental

7. Transforme la ecuación cartesiana $3x - y = 2$, en ecuación polar
   a) $r = \frac{2}{3cos\theta - sen\theta}$
   b) $r = \frac{2}{3(cos\theta - sen\theta)}$
   c) $r = \frac{2+sen\theta}{3cos\theta}$
   d) $r = \frac{2}{3sen\theta - cos\theta}$
8. Relacione las siguientes gráficas de tipo caracol con el nombre que le corresponde.

Gráfica Polar		Nombre	
1)		A)	Caracol con rizo
2)		B)	Cardiode
3)		C)	Caracol con lazo
4)		D)	Caracol convexo

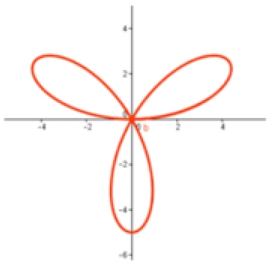
a) 1A, 2B, 3C, 4D
b) 1B,2C, 3A, 4D
c) 1B, 2C, 3D, 4A
d) 1A, 2C, 3B, 4D

9. Identifique la ecuación que le corresponde a la siguiente gráfica.



a) $r = \frac{4}{sen\theta}$
b) $r = \frac{4}{cos\theta}$
c) $r = 4 * sen\theta$
d) $r = 4 * cos\theta$

10. Identifique la ecuación que le corresponde a la siguiente gráfica.



a) $r = 4 + cos\ (3\theta)$
b) $r = 5\ cos\ (3\theta)$
c) $\boldsymbol{r} = 4 + \text{sen}(3\theta)$
d) $\boldsymbol{r} = 5\,\text{sen}(\,3\theta)$

Gracias por su colaboración y apoyo en el desarrollo de mi trabajo de investigación. ¡Éxitos!

Anexo 2

Instrumento: Escala

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS
PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA

El siguiente instrumento es exclusivamente con fines académico para el desarrollo del trabajo de titulación, el mismo que tiene como objetivo recolectar información sobre la utilización del software GeoGebra en el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares en los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física.

Edad: ___________

Sexo: ____ H ____M

Semestre (Periodo 2022-2S): ____6to ____7mo ____8vo

Instrucciones:

- Lea cuidadosamente las interrogantes que a continuación se platean y marque con una (x) la opción que usted considere.
- A partir de la pregunta 1 hasta la 5 se utilizará la siguiente escala valorativa:

Nunca	Rara Vez	A Veces	Casi Siempre	Siempre
N	RV	AV	CS	S
0	1	2	3	4

1) Utilizó el software GeoGebra para el estudio de Cálculo de Varias Variables.

N		RV		AV		CS		S	

2) Utilizó el software GeoGebra para el estudio de ecuaciones y gráficas polares.

N		RV		AV		CS		S	

3) Dado el trazo de una gráfica polar en GeoGebra pude usar la escala numerada y las definiciones proporcionadas para obtener su respectiva ecuación.

N		RV		AV		CS		S	

4) Preferí utilizar el software GeoGebra, antes que una hoja de papel, para graficar una ecuación polar.

N		RV		AV		CS		S	

5) Utilizó el software GeoGebra para reforzar los conocimientos adquiridos en clase sobre ecuaciones y gráficas polares.

N		RV		AV		CS		S	

- A partir de la pregunta 6 hasta la 12 se utilizará la siguiente escala valorativa:

Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Neutral	De acuerdo	Totalmente en acuerdo
TD	ED	N	DA	TA
0	1	2	3	4

6) El software GeoGebra presenta un ambiente de trabajo dinámico y es de fácil manejo.

TD		ED		N		DA		TA	

7) El uso del software GeoGebra facilita la diferenciación del tipo de gráfica de una ecuación polar con mayor rapidez.

TD		ED		N		DA		TA	

8) El software GeoGebra permite observar directamente la formación de las gráficas polares de una manera óptima y precisa.

TD		ED		N		DA		TA	

9) La utilización de un software como GeoGebra facilita el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares de manera autónoma por parte del estudiante.

TD		ED		N		DA		TA	

10) Una guía práctica es de gran utilidad para el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares.

TD		ED		N		DA		TA	

11) Una guía práctica sobre el uso del software GeoGebra favorece el aprendizaje en la construcción de gráficas polares.

TD		ED		N		DA		TA	

12) Me gustaría contar con una guía práctica para la construcción de gráficas polares mediante el software GeoGebra.

TD		ED		N		DA		TA	

Gracias por su colaboración y apoyo en el desarrollo de mi trabajo de investigación. ¡Éxitos!

Anexo 3

Ficha de validación de prueba objetiva - Docente UNACH 1

CRITERIOS A EVALUAR																					Observaciones (considerar si debe eliminarse o modificarse, por favor especificar)
PREGUNTA	ADECUACIÓN															PERTINENCIA					
	Claridad en la redacción y lenguaje adecuado al nivel del informante					Opciones de respuesta adecuadas					Opciones de respuesta en orden lógico					Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					X					X					X					X	
2					X					X					X					X	
3					X					X					X					X	
4					X					X					X					X	
5					X					X					X					X	
6					X					X					X					X	
7					X					X					X					X	
8					X					X					X					X	
9					X					X					X					X	
10					X					X					X					X	

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	X		
La secuencia de ítems es adecuada.	X		
El número de ítems es suficiente.	X		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
	X			

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: Luis Fernando Pérez Chávez		Firma: LUIS FERNANDO PEREZ CHAVEZ
Cargo: Personal Académico Titular	Fecha: 30 de mayo de 2023	
C.I. 0602160137	Cel. 0998621873	

Anexo 4

Ficha de validación de escala - Docente UNACH 1

CRITERIOS A EVALUAR																					Observaciones (considerar si debe eliminarse o modificarse, por favor especificar)
PREGUNTA	ADECUACIÓN															PERTINENCIA					
	Claridad en la redacción y lenguaje adecuado al nivel del informante					Opciones de respuesta adecuadas					Opciones de respuesta en orden lógico					Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					X					X					X					X	
2					X					X					X					X	
3					X					X					X					X	
4					X					X					X					X	
5					X					X					X					X	
6					X					X					X					X	
7					X					X					X					X	
8					X					X					X					X	
9					X					X					X					X	
10					X					X					X					X	

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	X		
La secuencia de ítems es adecuada.	X		
El número de ítems es suficiente.	X		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
	X			

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: Luis Fernando Pérez Chávez		Firma: Firmado electrónicamente por: LUIS FERNANDO PEREZ CHAVEZ
Cargo: Personal Académico Titular	Fecha: 30 de mayo de 2023	
C.I. 0602160137	Cel. 0998621873	

Anexo 5

Ficha de validación de prueba objetiva - Docente UNACH 2

CRITERIOS A EVALUAR																					Observaciones (considerar si debe eliminarse o modificarse, por favor especificar)
PREGUNTA	ADECUACIÓN															PERTINENCIA					
	Claridad en la redacción y lenguaje adecuado al nivel del informante					Opciones de respuesta adecuadas					Opciones de respuesta en orden lógico					Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					X					X					X					X	
2					X					X					X					X	
3					X					X					X					X	
4					X					X					X					X	
5					X					X					X					X	
6					X					X					X					X	
7					X					X					X					X	
8					X					X					X				X		
9					X					X					X				X		
10					X					X					X				X		

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	X		
La secuencia de ítems es adecuada.	X		
El número de ítems es suficiente.	X		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
		X		

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: MsC. Jhonny Ilbay		Firma: JHONNY PATRICIO ILBAY CANDO
Cargo: Docente del área de Matemática	Fecha: 30-05-2023	
C.I. 0604650762	Cel. 0980613029	

Anexo 6

Ficha de validación de escala - Docente UNACH 2

PREGUNTA	CRITERIOS A EVALUAR																				Observaciones (considerar si debe eliminarse o modificarse, por favor especificar)
	ADECUACIÓN															PERTINENCIA					
	Claridad en la redacción y lenguaje adecuado al nivel del informante					Opciones de respuesta adecuadas					Opciones de respuesta en orden lógico					Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					X					X					X					X	
2					X					X					X					X	
3					X					X					X					X	
4					X					X					X					X	
5					X					X					X					X	
6					X					X					X					X	
7					X					X					X					X	
8					X					X					X					X	
9					X					X					X					X	
10					X					X					X					X	

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	X		
La secuencia de ítems es adecuada.	X		
El número de ítems es suficiente.	X		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
	X			

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: MsC. Jhonny Ilbay		Firma: JHONNY PATRICIO ILBAY CANDO
Cargo: Docente del área de Matemática	Fecha: 30-05-2023	
C.I. 0604650762	Cel. 0980613029	

Anexo 7

Ficha de validación de prueba objetiva - Docente UNACH 3

CRITERIOS A EVALUAR																					Observaciones (considerar si debe eliminarse o modificarse, por favor especificar)
PREGUNTA	ADECUACIÓN															PERTINENCIA					
	Claridad en la redacción y lenguaje adecuado al nivel del informante					Opciones de respuesta adecuadas					Opciones de respuesta en orden lógico					Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					x					x					x					x	
2					X					X					X					X	
3					X					X					X					X	
4					X					X					X					X	
5					X					X					X					X	
6					X					X					X					X	
7					X					X					X					X	
8					X					X					X					X	
9					X					X					X					X	
10					X					X					X					X	

ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	X		
La secuencia de ítems es adecuada.	X		
El número de ítems es suficiente.	X		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
	x			

IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: Roberto Salomón Villamarín Guevara		**Firma:** Firmado electrónicamente por: ROBERTO SALOMON VILLAMARIN GUEVARA
Cargo: Docente	**Fecha:** 01 junio 2023	
C.I. 0602882912	**Cel.** 09979196869	

Anexo 8

Ficha de validación de escala - Docente UNACH 3

PREGUNTA	CRITERIOS A EVALUAR																				Observaciones (considerar si debe eliminarse o modificarse, por favor especificar)
	ADECUACIÓN															PERTINENCIA					
	Claridad en la redacción y lenguaje adecuado al nivel del informante					Opciones de respuesta adecuadas					Opciones de respuesta en orden lógico					Relación con el/los objetivo/s que se pretende estudiar					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1					x					x					x					x	
2					X					X					X					X	
3					X					X					X					X	
4					X					X					X					X	
5					X					X					X					X	
6					X					X					X					X	
7					X					X					X					X	
8					X					X					X					X	
9					X					X					X					X	
10					X					X					X					X	

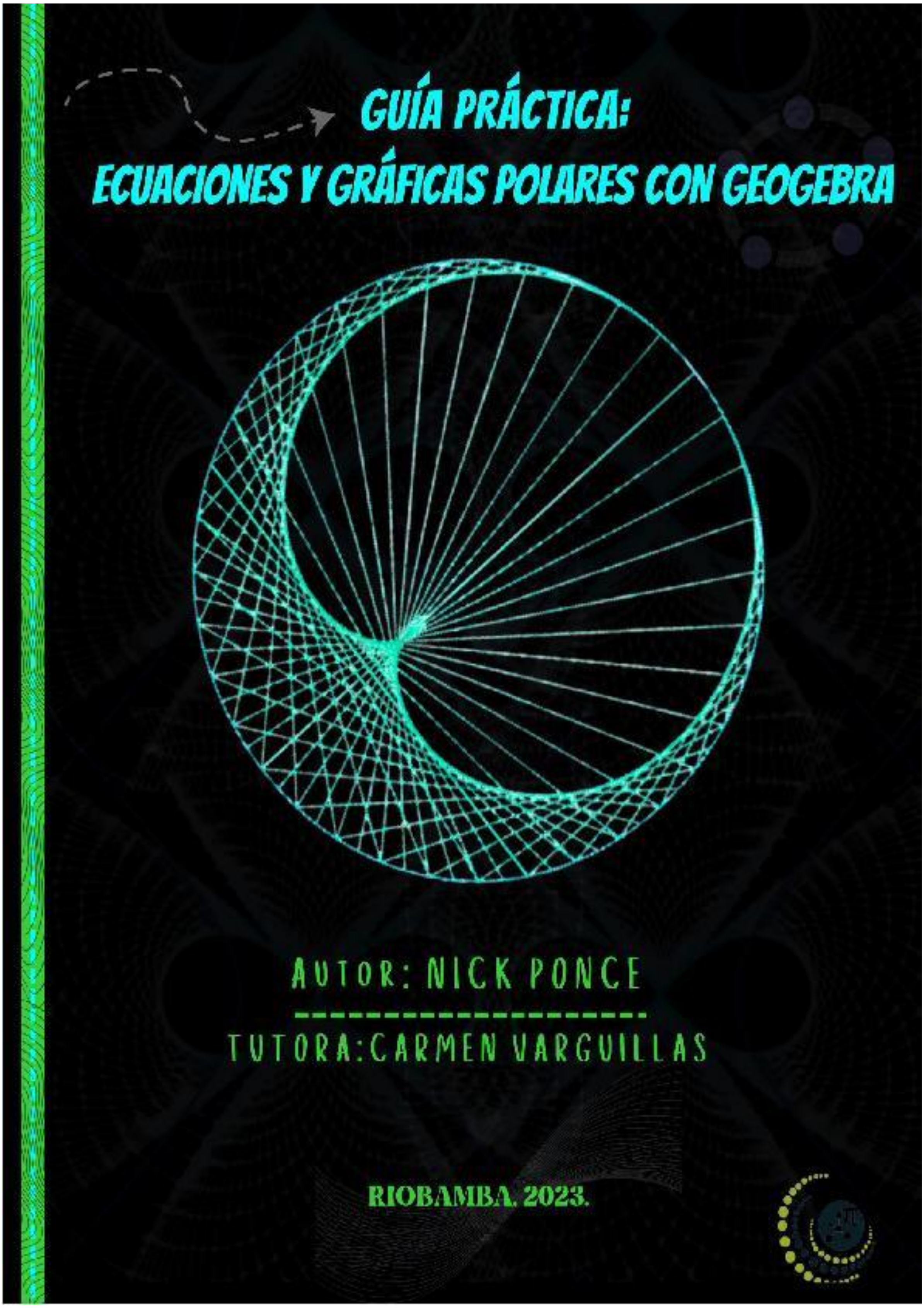
ASPECTOS GENERALES	SI	NO	Observaciones
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la prueba.	x		
La secuencia de ítems es adecuada.	x		
El número de ítems es suficiente.	x		

EVALUACIÓN GENERAL				
Validez del instrumento	Excelente	Satisfactorio	Necesita mejorar	Inadecuado
	x			

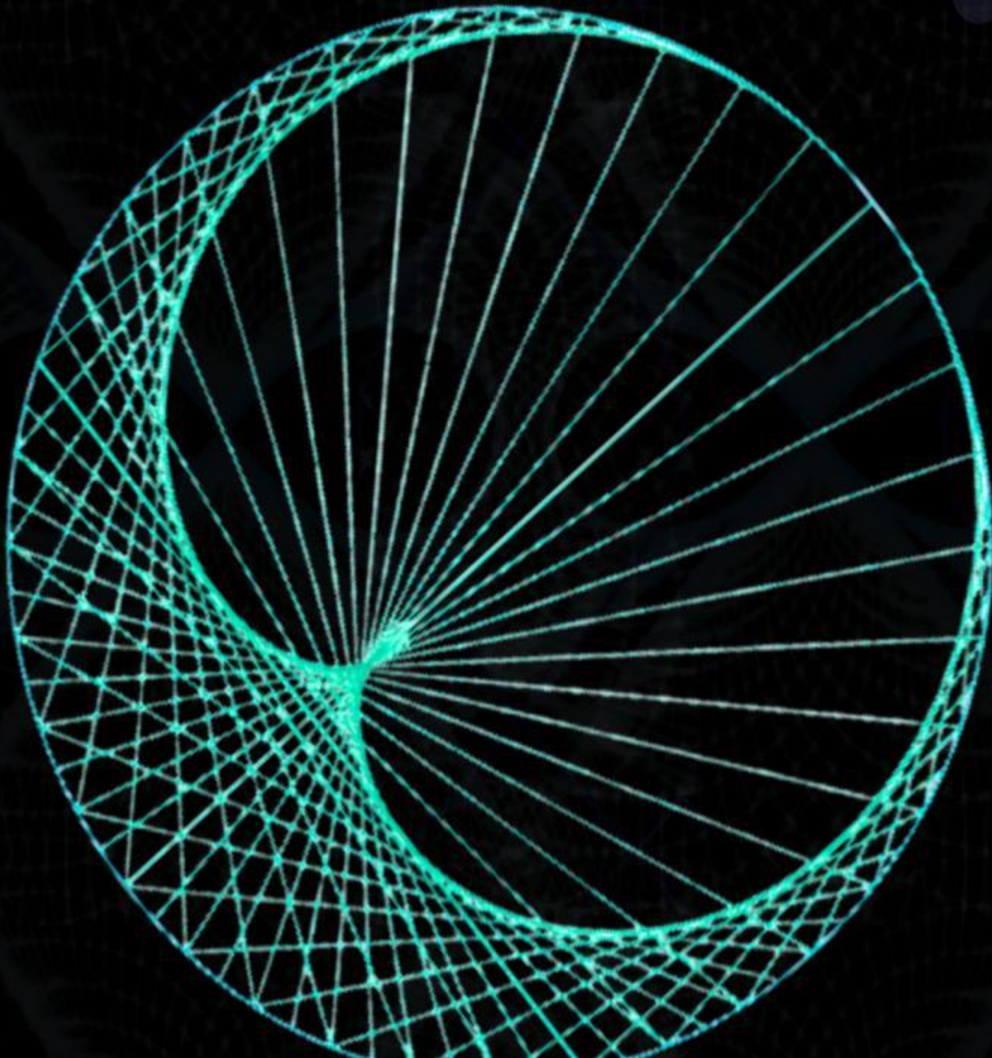
IDENTIFICACIÓN DEL EXPERTO		
Validado por: Roberto Salomón Villamarín Guevara		**Firma:** Firmado electrónicamente por: ROBERTO SALOMON VILLAMARIN GUEVARA
Cargo: Docente	**Fecha:** 03 junio 2023	
C.I. .0602882912	**Cel.** 0997916869	

Anexo 9

Guía Práctica



GUÍA PRÁCTICA:
ECUACIONES Y GRÁFICAS POLARES CON GEOGEBRA



AUTOR: NICK PONCE

TUTORA: CARMEN VARGUILLAS

RIOBAMBA, 2023.

GUÍA PRÁCTICA: ECUACIONES Y GRÁFICAS POLARES CON GEOGEBRA

AUTOR: Nick Eduardo Ponce Ortiz, Estudiante Universidad Nacional de Chimborazo
TUTORA: Carmen Varguillas Carmona, Docente Universidad Nacional de Chimborazo

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO I. GENERALIDADES

1.1 Introducción

La formación en el campo de las ciencias exactas consta de varios procesos implícitos, que se apoyan en teorías propias de la ciencia en estudio, además de otras como el constructivismo y el conectivismo, este último permite conectar diferentes nodos de datos y establecer técnicas para garantizar un aprendizaje duradero mediante el uso de las tecnologías de la información y comunicación (Tic), sin embargo, no es una labor fácil pero con esfuerzo, dedicación y motivación se puede alcanzar una educación de calidad con aprendizajes significativos en los estudiantes.

El uso de las TIC en el amplio campo de la educación ha evolucionado a lo largo de los años sustentándose en teorías y prácticas pedagógicas, pues estas herramientas tienen gran valor, siempre y cuando tengan un fundamento y objetivo específico como el potencializar el aprendizaje de los estudiantes, específicamente el software libre GeoGebra implementado en Cálculo y Matemática, donde contribuye al aprendizaje de varias temáticas, en este caso concretamente en Ecuaciones y Gráficas Polares, pues su utilización genera un ambiente dinámico, productivo y autónomo en el discente.

El presente documento proyecta un aprendizaje autónomo y significativo del alumno con una visión estratégica de la aplicación de un software educativo (GeoGebra), pues la educación debe ir de la mano del avance tecnológico, ya que al fusionar estos dos campos se genera acciones positivas en las necesidades de aprendizaje de la sociedad, mediante la construcción del conocimiento, ya que el estudiante desarrolla su formación continua, es decir dentro y fuera del establecimiento educativo, por lo cual aplica el principio constructivista donde él construye sus cimientos en base a competencias teóricas, procedimentales, actitudinales y tecnológicas.

La Guía Práctica: Ecuaciones y Gráficas Polares con GeoGebra consta de seis unidades, partiendo desde el conocimiento básico del software y cada uno de los temas específicos de ecuaciones polares desarrolladas como un apoyo para el aprendizaje de los estudiantes de Sexto Semestre de la asignatura de Cálculo de Varias Variables. Cada unidad fomenta el desarrollo de fundamento teórico y destrezas prácticas, las cuales permiten observar el perfeccionamiento de los estudiantes y valorar su aprendizaje a través de ejercicios propuestos haciendo uso del software GeoGebra. Esta guía pretende el uso del software matemático en la formación, para resolver e ilustrar problemas de ecuaciones polares, alcanzando en los estudiantes habilidades que permitan mejorar su aprendizaje.

1.2 Justificación

Los estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física, en el contexto histórico presentan un grado alto de dificultad en la asignatura de Cálculo de Varias Variables, lo que hace que se busque nuevos caminos o métodos prácticos que fortalezcan y agilicen el proceso de aprendizaje, por lo que en términos generales la finalidad de esta guía es formular un aprendizaje más práctico en la temática específica de ecuaciones y gráficas polares, apoyando el proceso de formación en el software GeoGebra.

Esto sostenido en los resultados de la investigación realizada donde alrededor del 50% de los estudiantes presentaron dificultad al contestar el instrumento de prueba objetiva, tanto en la parte conceptual como procedimental, es decir que se les dificultó la diferenciación de las diferentes ecuaciones, además de la identificación de las mismas a ejemplos de gráficas presentadas, por lo que GeoGebra puede convertirse en una herramienta que fortalezca los conocimientos de manera autónoma, ya que 81% lo considera factible por su facilidad en el manejo del mismo.

Al mismo tiempo en la búsqueda de alternativas al proceso de aprendizaje de esta temática, el desarrollo de la guía se considera factible, por lo expuesto por los estudiantes, donde 87% les gustaría contar con una guía práctica al afirmar que apoyados con el software GeoGebra pueden fortalecer el aprendizaje de ecuaciones y gráficas polares, obteniendo aprendizajes más significativos. En virtud de las dificultades que se encontraron en la investigación y las limitantes inherentes, se propone el diseño del recurso basado en la utilización de GeoGebra para la construcción de gráficas de las diferentes ecuaciones polares y comprender cada una de ellas, con el objetivo de robustecer el logro de las capacidades cognoscitivas y procedimentales en el discente para la cátedra en estudio.

Motivado en la utilización de las TIC en el aprendizaje de los estudiantes de Matemáticas, y por todo lo expuesto, se propone el recurso de Guía Práctica: Ecuaciones y Gráficas Polares con Geogebra, la misma que beneficiará de forma directa a los estudiantes, y por qué no a los docentes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemática y la Física de la Universidad Nacional de Chimborazo, aportando un granito de arena en la generación de profesionales competentes en el área del conocimiento.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general de la guía

Proporcionar una guía práctica usando el software GeoGebra para un aprendizaje sólido e interactivo de las ecuaciones y gráficas polares.

1.3.2 Objetivos específicos de la guía

- Exponer los conceptos claves relacionados a ecuaciones polares para trabajar de manera efectiva con GeoGebra.
- Proporcionar ejemplos detallados de creación de gráficas de las ecuaciones polares en GeoGebra aplicando los conceptos aprendidos.

1.4 Fundamentación Teórica de la Guía

La guía Ecuaciones y Gráficas Polares con GeoGebra se basa en el conectivismo y constructivismo como teorías pedagógicas que fortalecen el aprendizaje de manera efectiva y autónoma. El conectivismo se enfatiza en la adquisición de conocimientos aprovechando las conexiones, redes y recursos que se tiene al alcance apoyándose de las TIC, tomando en cuenta que el estudiante no sea solo consumidor de la información, sino más bien productor del conocimiento; siendo este el fundamento primordial del constructivismo, ya que cada persona aprende en base al desarrollo de actividades, es decir la construcción activa del conocimiento con sentido y cimentación de la realidad.

En este contexto la guía propone diseñar actividades con ejemplos y ejercicios que permitan a los estudiantes explorar y experimentar con las ecuaciones y gráficas polares haciendo uso del software GeoGebra, aprovechando las capacidades del mismo. Al mismo tiempo, le brinda la oportunidad de enriquecer su comprensión a través de la práctica y resolución de problemas. En tal sentido, el constructivismo y conectivismo se ostenta desde las primeras unidades desarrolladas aprendiendo las funcionalidades básicas de GeoGebra, y explorando las coordenadas polares a través de la representación de puntos en el plano polar y construyendo paso a paso ejemplos en el software para facilitar la comprensión de la relación de coordenadas rectangulares y polares.

Además de utilizar recursos y documentos ejecutados en un navegador web (applet) explorando y experimentando con las ecuaciones para verificar como cambian las gráficas polares al variar sus parámetros propios, por lo tanto, en cada unidad se aplica el conectivismo y constructivismo enriqueciendo la experiencia de aprendizaje. Ambos enfoques promueven la interacción activa del discente, conjuntamente con el aprendizaje autónomo, ya que los estudiantes desarrollan las gráficas por sí mismos y pueden estudiar de manera independiente y en cualquier ámbito, por lo que resulta un documento interactivo que contribuye al aprendizaje significativo de las ecuaciones y gráficas polares.

Unidad 1. Conociendo GeoGebra

Resultado de aprendizaje:
Reconoce la interfaz, elementos, herramientas y funcionalidades del software GeoGebra.

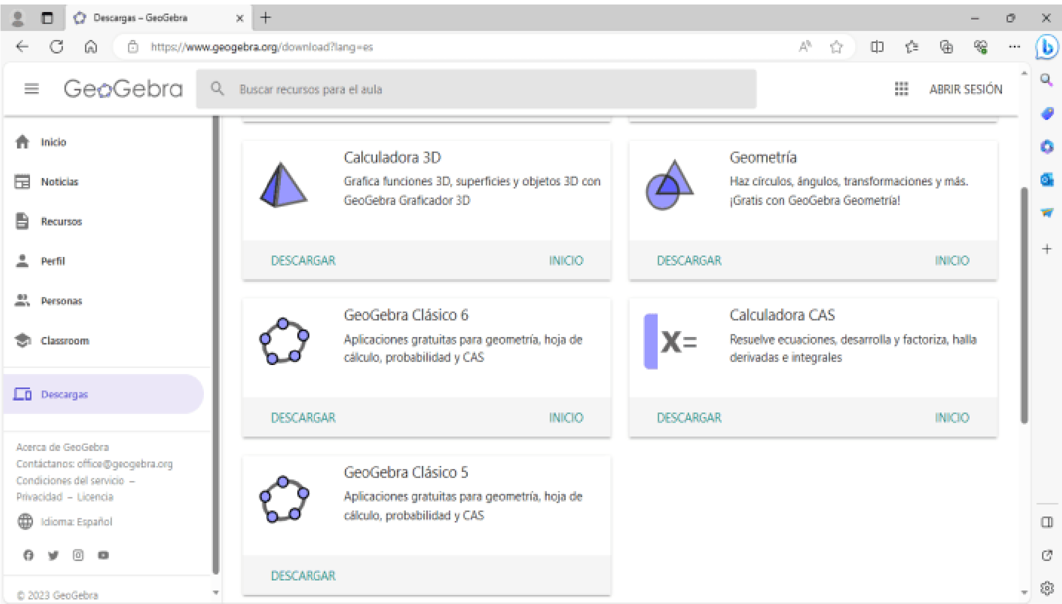
¿Cómo obtener GeoGebra?

El software GeoGebra es una de las herramientas más útiles en el aprendizaje de la Matemática, pues este al ser un software dinámico, ofrece diferentes potencialidades en los diferentes niveles educativos, haciendo una formación atractiva y más dinámica. Combina diferentes ramas de la Matemática como: la geometría, álgebra, análisis numérico y estadística, pues ofrece perspectivas diferentes de lo que se crea, gracias a su vista gráfica, algebraica, 3D, hojas de cálculo, cálculo simbólico y probabilidad; se debe recalcar que se puede activar todas las vistas, pero obtendremos resultados favorables en los campos de estudio donde se utilice todas las vistas, sino con las predeterminadas (algebraica y gráfica) es suficiente para el desarrollo de muchas de las temáticas de esta ciencia.

Para obtener GeoGebra en nuestro computador es relativamente sencillo, primero se debe ingresar al navegador de su preferencia y buscar "descargar GeoGebra" o ingresar el link (https://www.geogebra.org/download?lang=es), luego ya dentro de esta página, elegir la versión de su preferencia, ya sea clásico 5 o 6 (se trabajará con la versión 6 en la presente guía), posteriormente dar clic en descargar.

Figura 1

Portal de descarga de GeoGebra



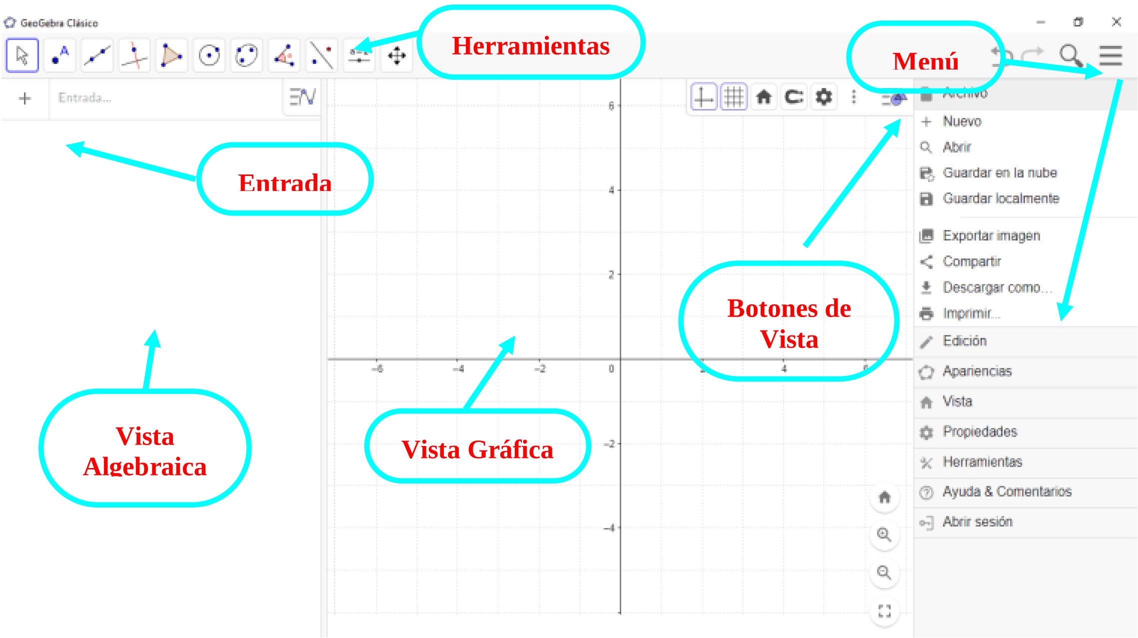
Esperar que se complete la descarga y dirigirse a la carpeta de descargas en su computador y abrir el instalador. Dependiendo de su computador se debe permitir que la aplicación haga cambios en el dispositivo, posteriormente seleccionar el idioma en el cual se va a trabajar (español), dando clic en siguiente y aceptar las condiciones de uso, finalmente dar clic en instalar y se termina el proceso de instalación.

¿Cuáles son las vistas de GeoGebra?

Una vez abierto el programa se muestra esta pantalla de trabajo de GeoGebra conocido como el interfaz, donde se detalla algunos de los elementos generales:

Figura 2

Vistas de GeoGebra

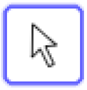


La vista gráfica de GeoGebra se la puede editar para darle aspecto relevante y requerido al contenido de trabajo, para ello se debe dar clic en el botón de vista y seleccionar la rueda, permitiendo abrir una ventana emergente donde se puede editar: "Básico" con dimensiones de los ejes x e y, así mismo si mostrarlos o no, el estilo de trazo con color y tipo de letra, además de mostrar o no la barra de navegación por pasos de construcción de los objetos, así como el color de fondo de la vista gráfica; "Eje X y Eje Y" donde se puede elegir si se muestra o no cada eje específico, gradaciones, etiquetas y asignar unidad de medida, además de decidir si se muestra solo la dirección positiva del eje y su respectiva intersección; "Cuadrícula" se puede decidir si se muestra o no y su tipo de cuadrícula, así como la distancia en los ejes con su estilo de trazo de las líneas y su color de la cuadrícula.

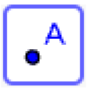
Para trabajar en GeoGebra es fundamental la vista algebraica que por defecto ocupa la parte izquierda de la pantalla conjuntamente con la barra de entrada, es el espacio donde se muestra la expresión algebraica de los objetos que se insertan en la entrada ya sean objetos libres, dependientes o auxiliares, todo esto para las versiones de escritorio; además es el ambiente donde se irá insertando y visualizando cada elemento en la formación del conocimiento matemático.

Elementos y herramientas de GeoGebra

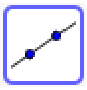
La barra de herramientas aparece por defecto en el margen superior, cada botón se activa haciendo clic sobre él y permite desplegar todos los botones que tienen funciones similares al principal que se muestra como primera opción.



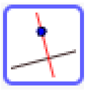
En este elemento están las herramientas de flecha (mueve) que permiten mover elementos, figura a mano alzada y lápiz.



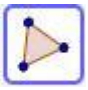
En este elemento se construye el punto básico (libres), de intersección y medios, así como los extremos y raíces de una función.



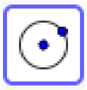
Aquí se encuentran todos los botones para construir objetos rectos, tales como rectas, semirrectas, segmentos, vectores.



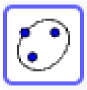
Esta herramienta permite construir rectas perpendiculares, paralelas, mediatriz, bisectriz, tangentes, ajuste lineal y lugares geométricos.



Esta herramienta se puede construir polígonos regulares e irregulares, vectoriales y rígidos.

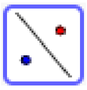


Este elemento permite crear todo lo relacionado con circunferencias, así como algunos de sus elementos arcos y sectores circulares.

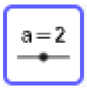


Este elemento se puede construir las tres cónicas: elipse, parábola e hipérbola, además de cualquier cónica dados 5 puntos.

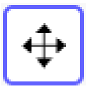
En esta herramienta están los botones que nos permiten medir ángulos, distancias, áreas, además de la pendiente y relación entre dos objetos.



En esta herramienta se puede realizar simetría axial, central, así como inversión, rotación, traslación y homotecia.



En este elemento se encuentran las herramientas de controles como: deslizador, casilla de control y entrada, además de ingresar texto e imagen.



Esta herramienta se encuentran las opciones gráficas: ocultar y mostrar objetos y etiquetas, alegar y acercar (zoom), y desplazar la vista gráfica.

Unidad 2. Coordenadas Polares

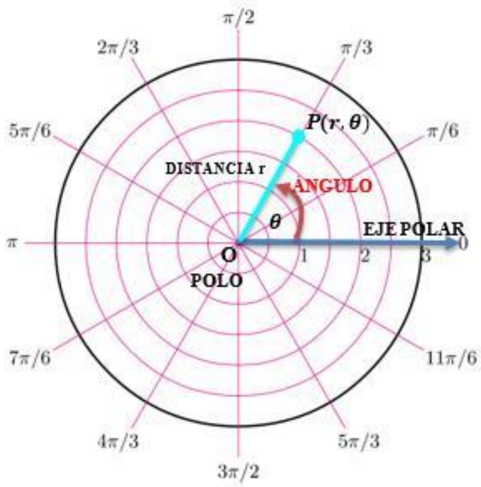
Resultado de aprendizaje:
Reconoce, localiza y convierte puntos en un plano utilizando coordenadas rectangulares y polares.

Descripción Teórica

Representación de un punto en coordenadas polares

Las coordenadas son la representación de la posición de un punto respecto a un marco de referencia, la forma más utilizada es la de coordenadas rectangulares (o cartesianas), las cuales son números (x, y) que representan la distancia dirigida a partir de dos rectas fijas (abscisa y ordenada), por su parte las *coordenadas polares* están definidas por un punto fijo O, llamado polo u origen, y una semirrecta llamada eje polar, la cual tiene origen en O y se prolonga indefinidamente a la derecha (coincide con el eje x positivo). Por lo tanto, un punto cualesquiera P tiene un segmento de línea no dirigida con valor de distancia desde el polo hasta P denominado r u distancia radial, además el valor del ángulo θ (ángulo polar) medido desde el eje polar hasta el punto P, llegando así a la denotación de un punto en coordenadas polares es (r, θ), tal como se muestra en la figura la representación del sistema polar.

Figura 3
Representación del sistema polar



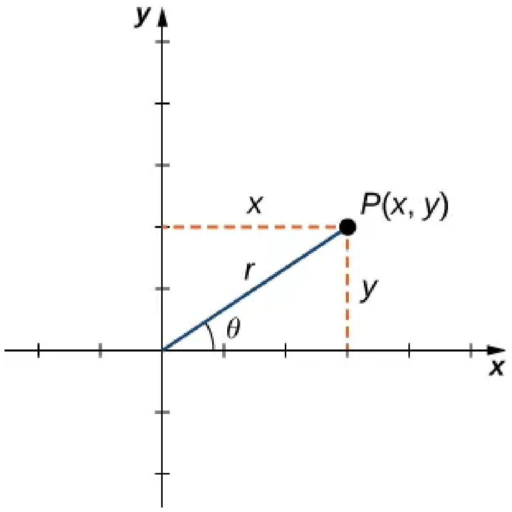
El ángulo polar (θ) es positivo cuando se mide en sentido antihorario y negativo si el giro es medido en sentido horario, además en la gráfica anterior es importante notar que el sistema polar tiene una red de circunferencias concéntricas cortadas por rectas radiales que parten del polo, esto nos sirve para localizar un punto P, donde r es el valor de radio de la circunferencia donde está oscilando dicho punto, dependiendo del ángulo.

Relación entre coordenadas rectangulares y polares

Teniendo en cuenta que cada punto en coordenadas rectangulares tiene dos valores (x, y) conformándose así un par ordenado, en el sistema de coordenadas polares no es la excepción dado por (r, θ), por lo que de manera general un punto P cualesquiera, y tomando en consideración el eje x positivo como el eje polar queda representado de la forma particular como se observa en la figura.

Figura 4

Representación de un punto en coordenadas polares



Recurriendo a la trigonometría del triángulo rectángulo que se forma, se tiene que la hipotenusa $(es\ r)$, los catetos $(son\ x, y)$, y las funciones trigonométrica que son verdaderas para el punto P son:

$$sen\theta = \frac{y}{r} \quad despejando\ y\ se\ tiene \quad \boldsymbol{y = r * sen\theta} \tag{1}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} \quad despejando\ x\ se\ tiene \quad \boldsymbol{x = r * cos\theta} \tag{2}$$

Además, aplicando los conceptos del Teorema de Pitágoras:

$$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2} \tag{3}$$

También,

$$\boldsymbol{tan\theta = \frac{y}{x}} \tag{4}$$

Las ecuaciones encontradas son las utilizadas para convertir de coordenadas rectangulares a polares y viceversa, teniendo en cuenta que el valor del ángulo polar en el cuadrante correcto lo determinará los signos de los catetos (x, y), a su vez que se restringe las soluciones a valores entre $0 < \theta \leq 2\pi$.

Transformar un punto de un sistema de coordenadas a otro es sencillo, encontrar la solución requerida conociendo las ecuaciones descritas anteriormente de forma manual es solamente aplicarlas y calcular sus valores, tal como se detalla en los ejemplos 1 y 2, sin embargo en el ejemplo 3 se irá más allá utilizando el software GeoGebra para construir un archivo (applet) que permita transformar puntos según el sistema de requerimiento del estudiante, además de su representación en el sistema de plano utilizado.

Ejemplo 2.1. *Convierta el punto P dado como $(-3{,}4)$ en coordenadas polares.*

Utilizando la ecuación 3, se obtiene el siguiente valor del radio

$$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$

$$r = \sqrt{9 + 16}$$

$$\mathbf{r = 5}$$

Utilizando la ecuación 4, se obtiene los siguientes resultados

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{y}{x}}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right)$$

$$\theta = -53.13° \rightarrow \boldsymbol{\theta = 306.87}\,°$$

Respuesta: El punto P de coordenadas rectangulares $(-3{,}4)$ a polares es $(5, 306.87°)$.

Ejemplo 2.2. *Convierta el punto Q dado como $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ en coordenadas rectangulares.*

Si bien en coordenadas polares es usual trabajar en radianes, para fines prácticos y por la familiarización que los estudiantes tienen con los grados, se lo transformará a grados multiplicando por $180°/\pi$, esto para unanimidad y generalización de la presente guía.

$$\frac{\pi}{3} * \frac{180°}{\pi} = 60°$$

Utilizando la ecuación 1 y la ecuación 2, se obtiene los siguientes resultados:

$$\boldsymbol{x = r * \cos(\theta)}$$

$$x = 3 * \cos(60°)$$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$$

$$\boldsymbol{y = r * \sin(\theta)}$$

$$y = 3 * \sin(60°)$$

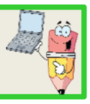
$$\boldsymbol{y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.60}$$

Respuesta: El punto Q de coordenadas polares $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ a rectangulares es $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

PUNTO DE CONTROL

Convierta el punto S dado como $(5\sqrt{3}, -5)$ en coordenadas polares.

Convierta el punto T dado como $(5, 75°)$ en coordenadas rectangulares.

Utiliza el software 

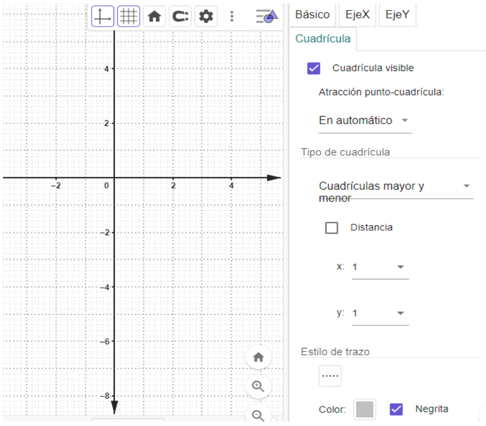
Para construir un archivo paso a paso en GeoGebra de cómo transformar coordenadas rectangulares a polares y viceversa, se realiza el ejemplo que se presenta a continuación.

Ejemplo 2.3. *Utilice los valores de los ejemplos 2.1 y 2.2, además del software GeoGebra para convertir de coordenadas rectangulares a polares y viceversa.*

Paso 1. Una vez ingresado al software, primeramente, se le dará un aspecto de plano polar a la vista gráfica, es decir se modificará la cuadrícula. Para esto se dirige al ícono de configuración (rueda o engranaje) de la parte superior derecha y dar clic, una vez realizado se cambia el aspecto de los ejes al gusto, además en la ventana de cuadrícula se dirige a tipo y seleccionar polar.

Figura 5

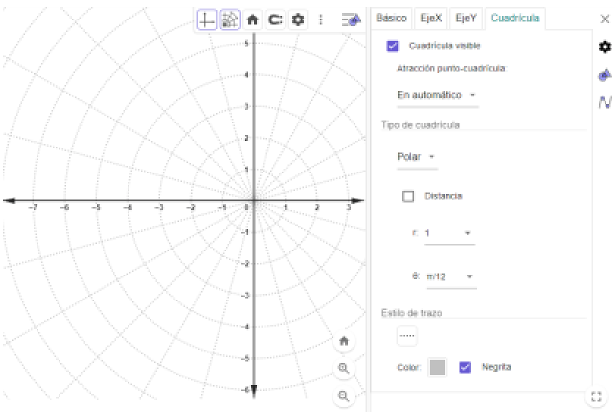
Configuración del espacio de trabajo



Paso 2. Después de seleccionar polar en la parte posterior se habilita la opción de distancia pero en base a lo específico de polar (radio y ángulo), se selecciona $r: 1$ y $\theta: \pi/12$, además del estilo de trazo líneas entrecortadas y el color de preferencia.

Figura 6

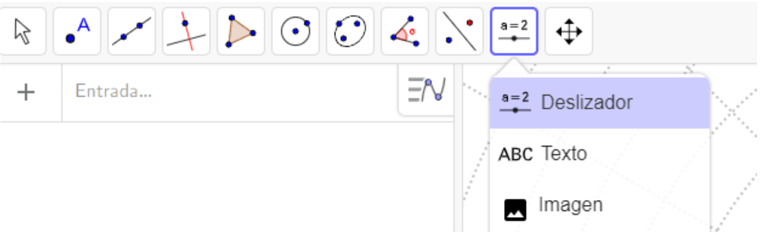
Configuración de radio y ángulo polar



Paso 3. Una vez realizado la configuración de aspecto, se dirige al ícono correspondiente de la barra de herramientas como se muestra en la figura, y seleccionar deslizador.

Figura 7

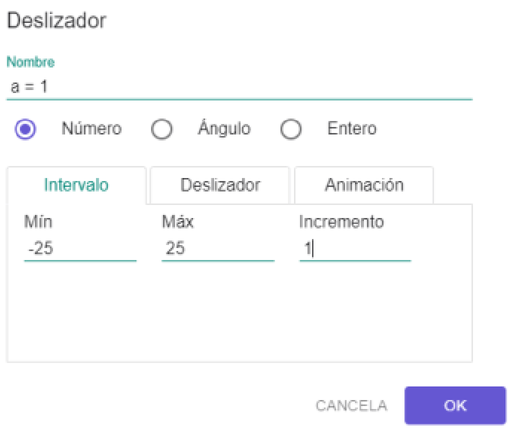
Selección de herramienta "deslizador"



Paso 4. Se abrirá una ventana para delimitar el número a, como en la figura, en este caso se ingresa el rango de $-25 \leq a \leq 25$, con incremento de 1.

Figura 8

Configuración del rango de un deslizador



Paso 5. Dar clic en OK.

Paso 6. Para el segundo control deslizante (b), simplemente haga clic en el mismo ícono nuevamente y repita el procedimiento anterior.

Paso 7. Ahora se ocultará los deslizadores de la vista gráfica, para ello se dirige a la parte izquierda de la pantalla (vista algebraica) y el círculo de color negro que está en el elemento (a) se da clic para ocultarlo, y desaparecerá de la vista gráfica tal como se observa en la imagen, así mismo repetir con el deslizador b.

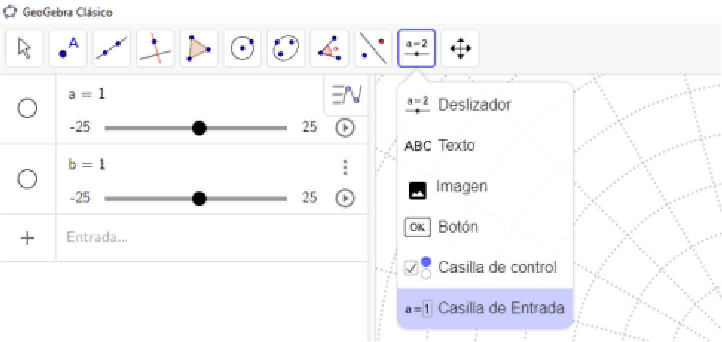
Figura 9

Ocultar deslizador de vista gráfica

Paso 8. Posterior se dirige al mismo icono de herramienta, pero esta vez seleccionar casilla de entrada, elemento que permitirá ingresar cualquier valor que necesite en los puntos que desee convertir.

Figura 10

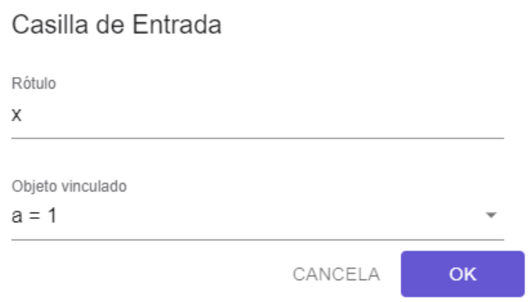
Selección de herramienta "casilla de entrada"



Paso 9. Dar clic en la pantalla donde se quiera que sea la posición de ese botón (luego se puede modificar), y se abrirá una ventana emergente. En esta ventana en rótulo asignar el nombre de “x” y en objeto vinculado será el deslizador que se vinculará (este caso el deslizador “a”), finalmente dar clic en “ok”.

Figura 11

Configuración de la casilla de entrada



Paso 10. Se dará un aspecto diferente al predeterminado, para lo cual dar clic derecho sobre el objeto y dirigirse a propiedades, posterior se abrirá una ventana en parte derecha,

hay que recalcar que este proceso se puede hacer para cualquier objeto donde se puede cambiar los aspectos de forma del objeto seleccionado.

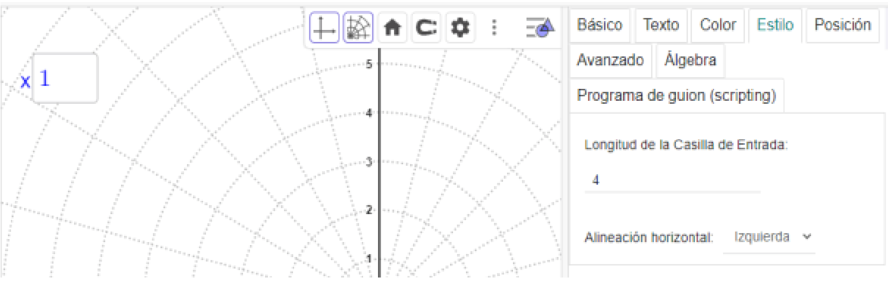
Figura 12

Selección del elemento propiedades

Paso 11. Ahí modificar según su preferencia, en este caso será el texto en tamaño mediano, color "azul", y en estilo se modifica la longitud de la casilla escribiendo "4", quedando el objeto de la forma como se observa en la imagen.

Figura 13

Configuración de las propiedades de un objeto

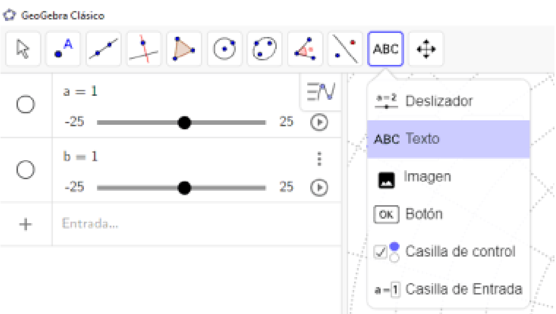


Paso 12. Repetir los pasos anteriores (9 al 11), pero con rótulo "y" y vinculando el deslizador "b".

Paso 13. Dirigirse al mismo ícono de las herramientas que se está trabajando y ahora seleccionar la opción de texto, luego dar clic en la pantalla donde se quiere que vaya el texto.

Figura 14

Selección de herramienta "texto"



Paso 14. En la ventana emergente se procede a seleccionar en la parte superior “Fórmula látex”, después en el recuadro siguiente se escribe el texto “r = \sqrt{}” (lenguaje latex para ingresar una raíz), posteriormente dar clic en avanzado y vista previa, lo ingresado queda tal como se observa en la imagen.

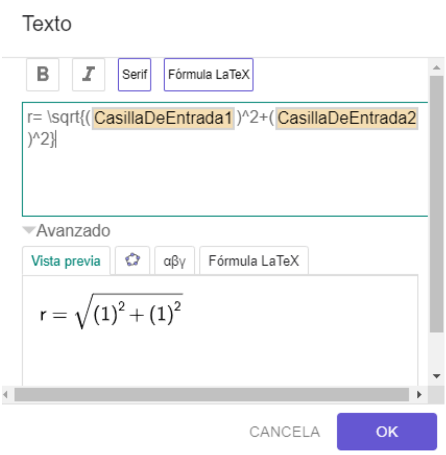
Figura 15

Escribir texto en modo látex

Paso 15. Dar clic en el ícono de GeoGebra (segundo de la parte inferior) y seleccionar “CasillaDeEntrada1”, regresar al primer recuadro y elevar al cuadrado “^2” dicho elemento (si desea le coloca paréntesis), después poner el signo más “+” y repetir el paso con la “CasillaDe Entrada2”, tal como se observa en la imagen para finalmente dar en “Ok”; lo que se está ingresando es la ecuación $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ pero con elementos que se puede modificar según los valores que ingrese en las diferentes casillas.

Figura 16

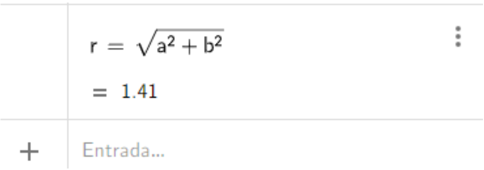
Vincular casilla de entrada en texto



Paso 16. En la parte de entrada con ayuda del teclado que se activa se ingresa la ecuación “$r = \sqrt{a^2 + b^2}$” que es la relación de radio (r) pero con las letras a y b (deslizadores asociados con los valores de las casillas de entrada).

Figura 17

Calcular valores asociados a entradas



Paso 17. Ingresar un nuevo texto, esta vez en el primer recuadro escribir “r=”, luego en avanzado seleccionar el ícono de GeoGebra y dar clic en el elemento r (resultado asociado al paso anterior), finalmente dar en “Ok”, tal como se observa en la imagen.

Figura 18

Texto asociado a un resultado

Paso 18. Ahora se ingresará el despeje del ángulo de la ecuación 4 en un nuevo texto. En el primer recuadro se expondrá “$\theta = \arctan()$", luego dentro del paréntesis en avanzado seleccionar el ícono de GeoGebra y dar clic en el elemento b dividido para el elemento a (relacionado con los valores de “y” y “x” de ingreso), finalmente dar en “Ok”.

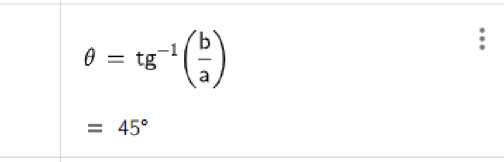
Figura 19

Configuración de texto en modo avanzado

Paso 19. En la parte de entrada con ayuda del teclado que se activa se ingresa la ecuación "$\theta = \arctan(b/a)$" que es la relación del ángulo pero con las letras b y a (deslizadores asociados con los valores de las casillas de entrada).

Figura 20

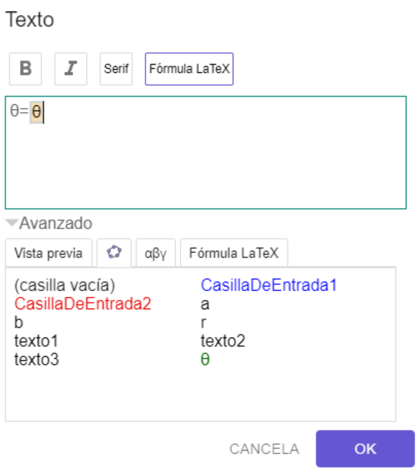
Calcular valor asociado a deslizadores



Paso 20. Ingresar un nuevo texto, esta vez en el primer recuadro escribir "$\theta =$", luego en avanzado seleccionar el ícono de GeoGebra y dar clic en el elemento θ (resultado asociado al paso anterior), finalmente dar en "Ok", tal como se observa en la imagen.

Figura 21

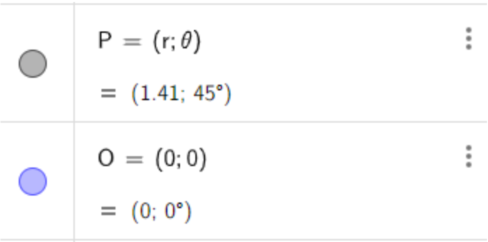
Texto asociado a un resultado



Paso 21. Ahora se construirá su representación gráfica, primero en la parte de entrada se ingresará un punto "$P = (r; \theta)$", que es el punto convertido de coordenadas rectangulares a coordenadas polares, así mismo se ingresará otro punto que será el polo "$O = (0; 0)$".

Figura 22

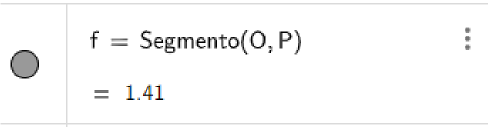
Ingresar un punto en coordenadas polares



Paso 22. Ahora se construirá el segmento de r, para ello se puede hacer de dos formas: la primera es dirigiéndose al tercer elemento de la barra de herramientas, dar clic y seleccionar segmento, luego irse a la vista gráfica y dar clic en el punto O y P; la segunda opción es dirigirse a la parte de entrada e ingresar el comando “Segmento(O,P)” que permite crear el segmento desde el punto inicial (O) hasta el punto final (P).

Figura 23

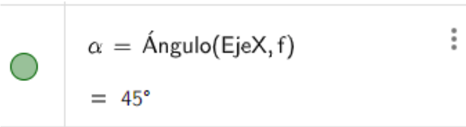
Ingresar elemento gráfico "segmento"



Paso 23. Posterior se representará el ángulo polar ingresando el comando “Ángulo(EjeX,f)” , donde el eje x es el eje polar y f es la distancia radial creada con el segmento del paso anterior.

Figura 24

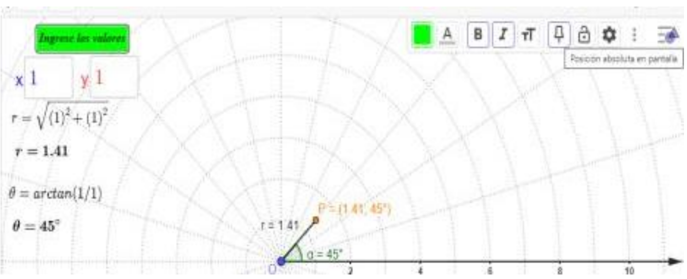
Ingresar elemento gráfico "ángulo"



Paso 24. Modificar los ejes como en el paso 1, después seleccionar el punto P en la vista gráfica, dar clic derecho y seleccionar propiedades, luego en la ventana emergente en básico, seleccionar en etiqueta “nombre y valor”, así mismo con el segmento f designarle un rótulo “r” y en etiqueta seleccionar “rótulo y valor”, finalmente los elementos de texto en pantalla dar clic y fijarlos con el ícono que se habilita y dice posición absoluta en pantalla.

Figura 25

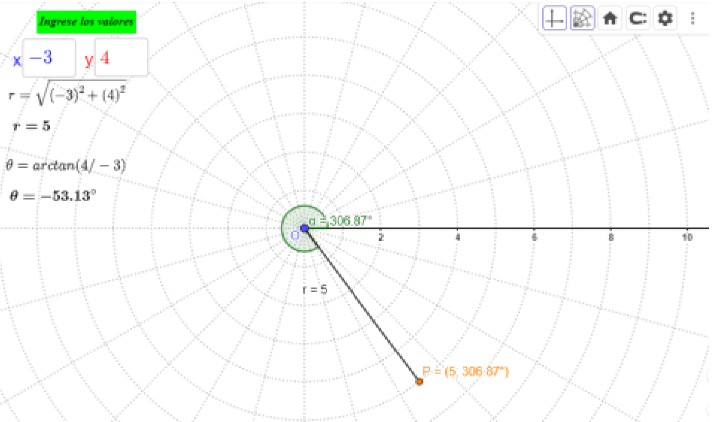
Configuración aspecto de forma a varios objetos



Paso 25. Finalmente ingresar los valores de x e y del punto P del ejemplo 2.1 “(-3, 4)”, quedando la respuesta encontrada manualmente, además de su representación gráfica tal como se observa en la imagen.

Figura 26

Comprobación de resultados con varios valores



Paso 26. En el mismo elemento de la barra de herramientas ahora elegir “casilla de control”, luego dar clic en la pantalla (vista gráfica) donde se quiera mostrar dicha casilla.

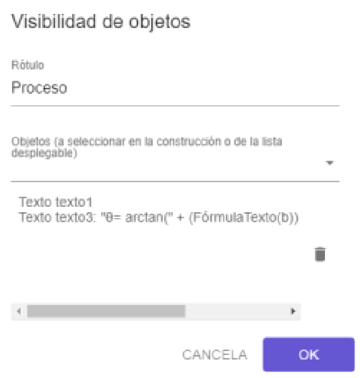
Figura 27

Selección herramienta "casilla de control"

Paso 27. En la ventana emergente en rótulo escribir “Proceso”, en los objetos de la lista desplegable elegir “texto1 y texto3” (los relacionados con las ecuaciones utilizadas), luego dar clic en ok.

Figura 28

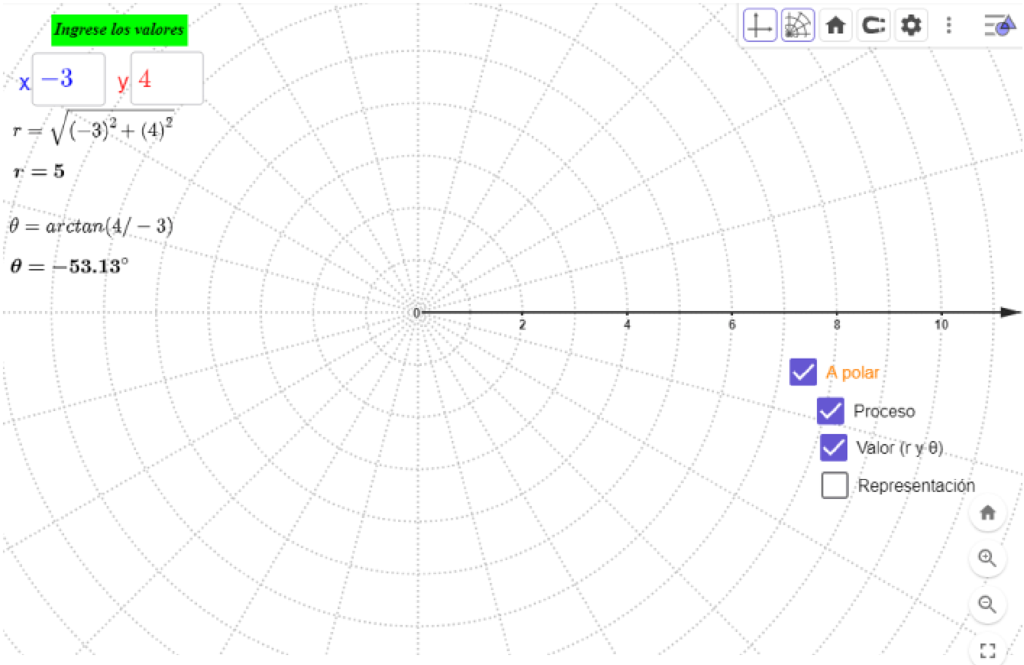
Configuración de casilla de control



Paso 28. Repetir el procedimiento con rótulo "Valor (r y θ)" y objetos seleccionados "texto2 y texto4", luego otra casilla con rótulo "Representación" y objetos que construyen la gráfica "Punto O y P, Segmento f, y Ángulo α", finalmente una nueva casilla de control con nombre "A polar" y objetos seleccionados "Valor lógico c, d, e, además CasillaDeEntrada1 y 2, así como Texto5". Las casillas permiten ocultar o mostrar los objetos que se eligió en cada casilla, tal como se muestra en la imagen.

Figura 29

Configuración casilla de control vinculada a otras



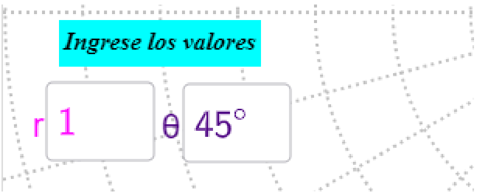
Ahora se construirá en el mismo archivo el modelo de transformar de polares a rectangulares utilizando los valores del ejemplo 2.2, el punto es $Q\ (3, \pi/3)$.

Paso 29. Ingresar un deslizador de número con nombre h desde -25 hasta 25, además de uno nuevo de ángulo con rango $-25 \leq \beta \leq 25$, posterior ocultarlos.

Paso 30. Elegir casilla de entrada, colocarle de rótulo "r" con el objeto de la lista "h", así mismo una nueva con rótulo "θ" y objeto seleccionado "β" (deslizadores ingresados paso anterior), además darles aspectos de forma tal como los paso 10 y 11.

Figura 30

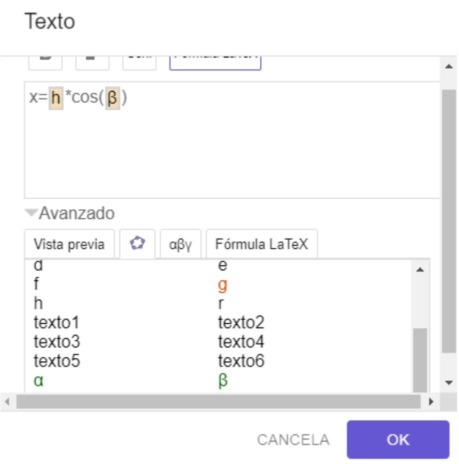
Elección nuevas casillas de entrada



Paso 31. Ingresar un nuevo texto en la parte superior ingresar “x=”, dar clic en el ícono de GeoGebra y seleccionar “h”, regresar al primer recuadro y multiplicar “*cos” y ahora seleccionar “β”, tal como se observa en la imagen para finalmente dar en “Ok”; lo que se está ingresando es la ecuación $x = r * \cos(\theta)$.

Figura 31

Calcular un valor de ecuación



Paso 32. Repetir el paso anterior ahora con “y=” multiplicando “*sin”, es decir ingresar la relación de r con y, dada por “$y = r * \sin(\theta)$”

Paso 33. En la barra de entrada ingresar para calcular el resultado de x e y, el comando “$i = h * \cos(\beta)$”, además de “$j = h * \sin(\beta)$”.

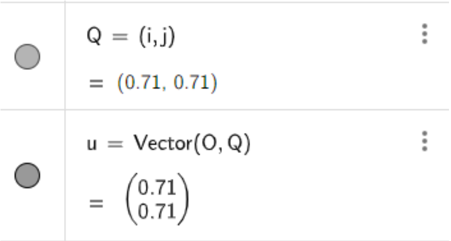
Paso 34. Ingresar un nuevo texto, esta vez en el primer recuadro escribir “x=”, luego en avanzado seleccionar el ícono de GeoGebra y dar clic en el elemento i (resultado asociado al paso anterior), así mismo ingresar otro con “y=” y seleccionando “j”.

Paso 35. Ahora se construirá su representación gráfica, primero en la parte de entrada se ingresará un punto “$Q = (i, j)$”, que es el punto convertido a coordenadas rectangulares. Nótese que en GeoGebra un punto utiliza “;” pero en coordenadas cartesianas “,”.

Paso 36. Ahora en la parte de entrada ingresar el comando “Vector(O,Q)” que permite crear el vector (segmento dirigido) desde el punto inicial (O) hasta el final (Q).

Figura 32

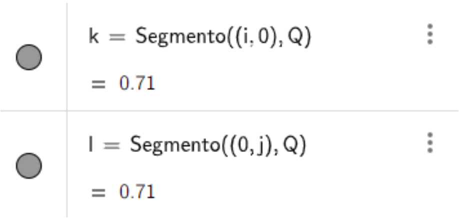
Ingresar elemento gráfico "vector"



Paso 37. Construir las prolongaciones del punto respecto al eje x e y, ingresando segmento con los comandos "Segmento((i,0),Q)" y "Segmento((0,j), Q)".

Figura 33

Ingresar segmento en forma manual

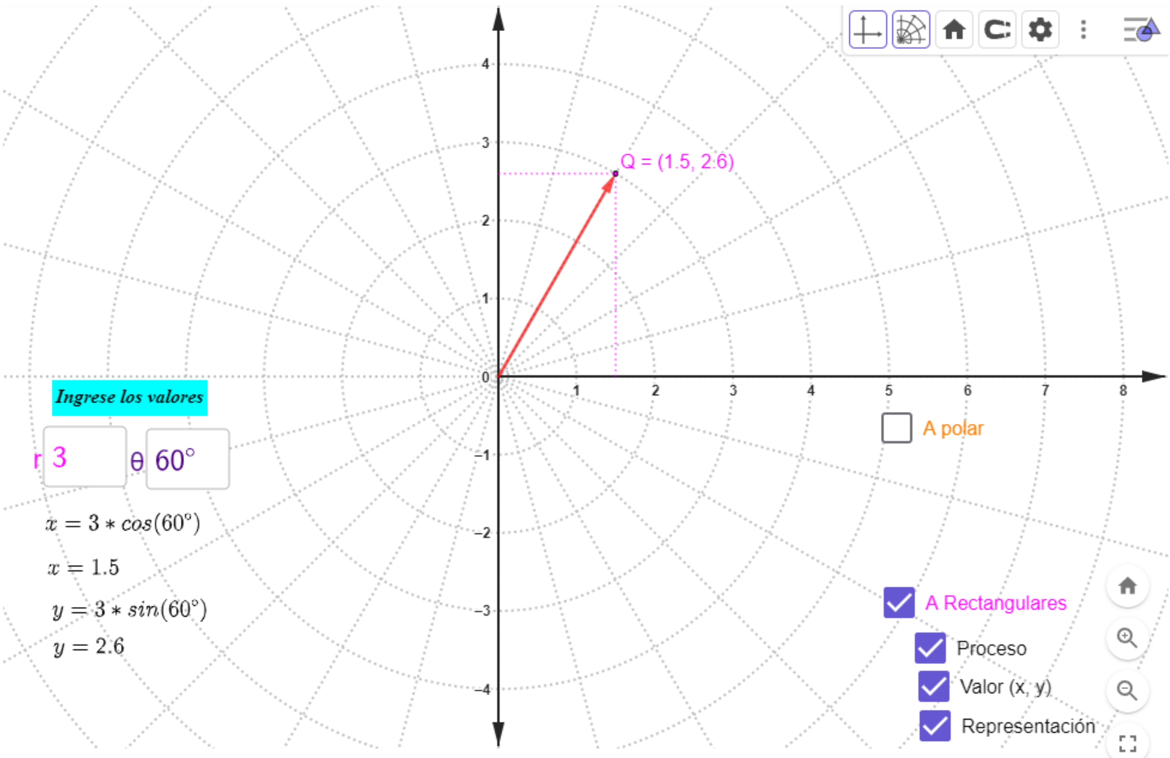


Paso 38. Elegir "casilla de control", luego en rótulo escribir "Proceso", en los objetos de la lista desplegable elegir "texto7 y texto8", luego dar clic en ok. Así mismo, otro con rótulo "Valor $(x\,, y)$" y objetos seleccionados "texto9 y texto10", luego otra casilla con rótulo "Representación" y objetos que construyen la gráfica "Punto Q, Segmento k y l, y Vector u", finalmente una nueva casilla de control con nombre "A Rectangulares" y objetos seleccionados "Valor lógico m, n, o, además CasillaDeEntrada3 y 4, así como Texto6".

Paso 39. Finalmente ingresar los valores de r y θ del punto Q del ejemplo 2.2 "$(3, 60°)$", darle aspectos de forma y activar los ejes, quedando la respuesta encontrada manualmente, además de su representación gráfica tal como se observa en la imagen.

Figura 34

Comprobación de valores del ejemplo 2.2



El archivo que se ha diseñado permite transformar de polares a rectangulares y viceversa, todo esto manejando los control es decir activando y desactivando las casillas colocadas (Proceso, Valor, Representación, Polar y Rectangulares) elementos que se identifican con facilidad en la gráfica. Para visualizar, utilizar el archivo online y verificar los comandos utilizados, escanee el código adjunto.

DESCRÚBEME

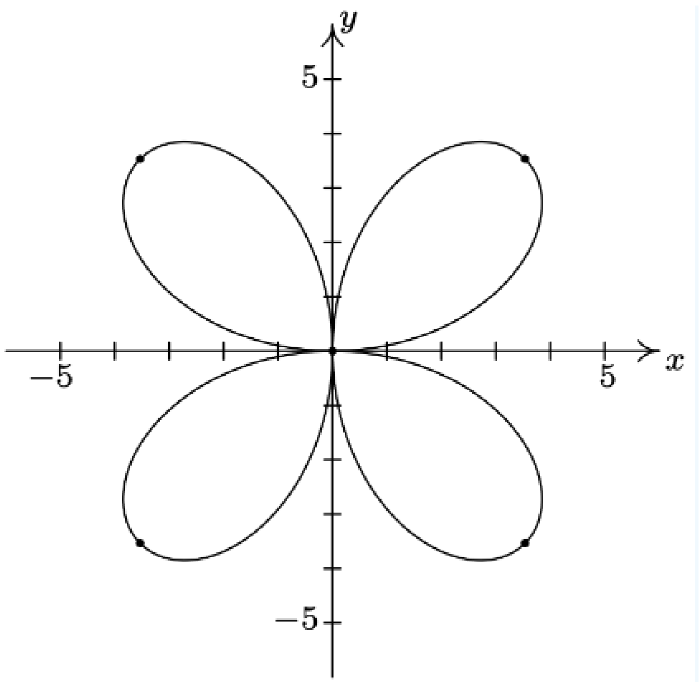
Ecuaciones y gráficas polares

Cuando se trabaja en coordenadas cartesianas, una función $y = f(x)$ es graficada creando una curva en el plano cartesiano. En forma análoga se puede graficar una curva generada por una función $r = f(\theta)$, proveniente de una ecuación polar, pues está descrita en coordenadas polares siendo θ la variable independiente y r la dependiente.

La idea de graficar una función en coordenadas polares es igual que en coordenadas rectangulares, es decir representar algo en el plano específico, tomando en cuenta que una gráfica polar es el conjunto de puntos y sólo aquellos puntos, que tienen al menos un par de coordenadas polares que satisfacen una ecuación polar; las ecuaciones son diversas por lo que en las unidades siguientes se trataran las más trabajadas como: rectas y circunferencias, caracoles de pascal, rosas polares y cónicas.

Figura 35

Ejemplo de gráfica generada a partir de ecuación polar



Nota. Tomada de LibreTextsEspañol (Stitz&Zeager, 2023).

Practica lo aprendido

Preguntas rápidas de Verdadero-Falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Explique por qué o dé un ejemplo para argumentar su posición.

a- Las coordenadas polares son una forma alternativa de representar punto en un plano, donde se utiliza la distancia al origen y el ángulo respecto al eje $\pi/2$.

b- En coordenadas polares, un ángulo de 90 grados se representa como $\pi/2$ radianes.

c- Las ecuaciones que relacionan las coordenadas polares y cartesianas son

$$x = rcos(\theta); \quad y = rsen(\theta); \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad \tan(\theta) = y/x$$

d- Dos puntos que están a la misma distancia del origen y tienen el mismo ángulo no pueden tener las mismas coordenadas polares.

e- La coordenada polar $(2\sqrt{2}; \pi/4)$ es equivalente a la coordenada cartesiana $(2,2)$.

Ejercicios

Responda cada una de las preguntas argumentando su respuesta. Verifique su respuesta utilizando el software GeoGebra.

1-3 Encuentre las coordenadas polares de los puntos dados en coordenadas cartesianas

1. $(4,5)$ **2.** $(2,-2)$ **3.** $\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{5}\right)$

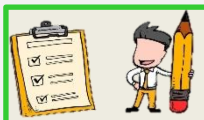
4-7 Trace los puntos en el plano polar dados por las coordenadas polares

4. $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ **5.** $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ **6.** $\left(\frac{9}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$ **7.** $\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$

8-9 Calcula las coordenadas cartesianas de los puntos dados en polares

8. $(-3,\ 120°)$ **9.** $(5, 30°)$

10- Grafique las coordenadas polares $I = \left(5, \frac{\pi}{6}\right)$ y $J = (5, \frac{5\pi}{6})$, luego describe cómo difieren las gráficas y que representan en el sistema de coordenadas polares.



Comprueba lo Aprendido

https://www.geogebra.org/m/hb2qhdke

ESCANÉAME

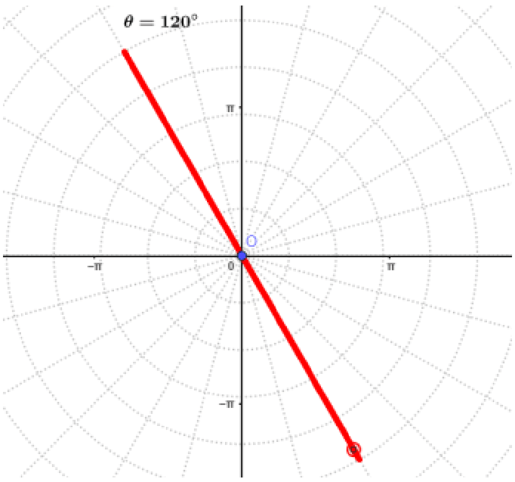
Resultado de aprendizaje:
Reconoce e identifica las gráficas de ecuaciones de rectas y circunferencias en coordenadas polares.

Descripción Teórica

Ecuación de una Recta

En las rectas se analizará tres casos en coordenadas polares: las primeras son las que contienen al polo (pasan por el origen), las otras son paralelas y perpendiculares al eje polar. La ecuación $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{K}$ representa todos los puntos cuyas coordenadas polares son (r, K) que constituye la recta que pasa por el polo formando un ángulo θ con el eje polar, además de manera general la recta está representada por $\theta = K \pm n\pi$, esto es la prolongación de la recta en todo el plano polar, pues sino se nota solo que parte desde el polo, sin embargo la recta pasa por el polo, tal como se observa en la imagen.

Figura 36
Recta que pasa por el polo



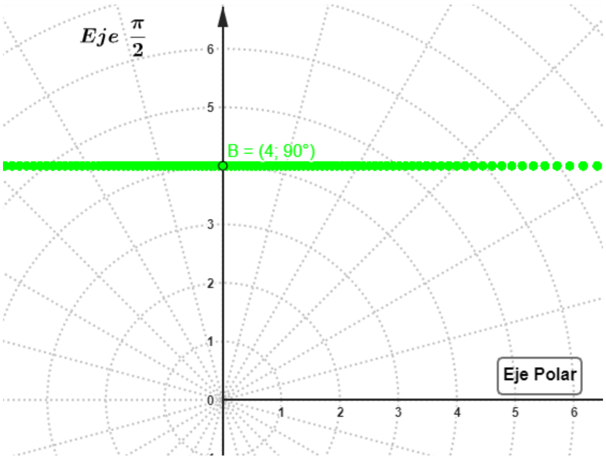
En coordenadas rectangulares se tiene que una recta paralela al eje x tiene como punto de corte en $(0, b)$ al otro eje con ecuación $y = b$. Sustituyendo dicha expresión con las ecuaciones que relacionan ambos sistemas de coordenadas, se tiene que:

$$\boldsymbol{rsen(\theta) = b} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r = \frac{b}{sen(\theta)}} \qquad (5)$$

Esta ecuación corresponde a cualquier recta paralela al eje polar (horizontal), pues todo punto P(r, θ) el valor de $rsen(\theta)$ será b, así cortará al eje $\frac{\pi}{2}$ en el punto $(b, 90°)$. Algo importante a considerar para identificar la gráfica es ver su orientación: sí $b > 0$ la recta está sobre el eje polar, y si $b < 0$ la recta estará debajo del eje polar.

Figura 37

Recta paralela al eje polar



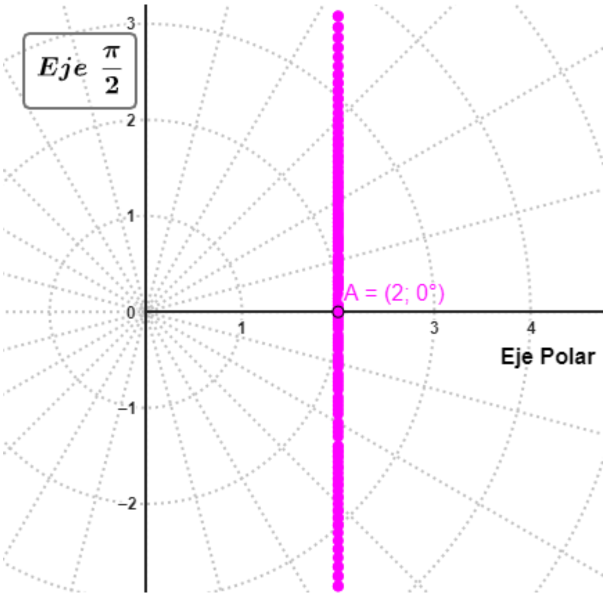
Así mismo se tiene que una recta paralela al eje $\frac{\pi}{2}$ tiene como punto de corte en $(a, 0)$ al otro eje con ecuación $x = a$. Sustituyendo dicha expresión con las ecuaciones que relacionan ambos sistemas de coordenadas, se tiene que:

$$\boldsymbol{rcos(\theta) = a \rightarrow r = \frac{a}{cos(\theta)}} \tag{6}$$

Esta ecuación corresponde a cualquier recta paralela al eje $\frac{\pi}{2}$ (vertical), pues todo punto $\mathrm{P}(r, \theta)$ el valor de $rcos(\theta)$ será a, así cortará al eje polar en el punto $(a, 0°)$. Algo importante a considerar para identificar la gráfica es ver su orientación: sí $a > 0$ la recta está a la derecha del eje vertical, y si $a < 0$ la recta estará a la izquierda del eje $\frac{\pi}{2}$.

Figura 38

Recta paralela al eje π /2



Ejemplo 3.1. *Identifique a qué eje es paralela la recta y su orientación dado por la ecuación $rcos(\beta) = 5$ en coordenadas polares.*

Realizando el despeje de r, la ecuación queda como $r = \frac{5}{\cos(\beta)}$ por lo tanto la recta es paralela al eje $\pi/2$, y debido a que $b = 5\ es > 0$ entonces estará su gráfica a la derecha del eje vertical $(\pi/2)$; además el punto de corte con el otro eje (polar) es $B(5; 0°)$ o $B(5; 360°)$.

Ecuación de una Circunferencia

La ecuación de una circunferencia en coordenadas cartesianas de forma ordinaria viene dada por $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, ahora si esta misma ecuación se considera que tiene centro en (a, b) y contenga al origen, es decir que $r^2 = a^2 + b^2$, se tiene que:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = a^2 + b^2 - a^2 - b^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$

Ahora se hace uso de las relaciones de coordenadas rectangulares y polares $x = \mathrm{r}\cos(\theta)\,; y = rsen(\theta); r^2 = x^2 + y^2$ la ecuación se convierte en:

$$r^2 - 2a(rcos\theta) - 2b(rsen\theta) = 0$$

$$r\big(r - 2\,a\cos(\theta) - 2bsen(\theta)\big) = 0$$

$$r = 0 \quad ; \quad r - 2\,a\cos(\theta) - 2bsen(\theta) = 0$$

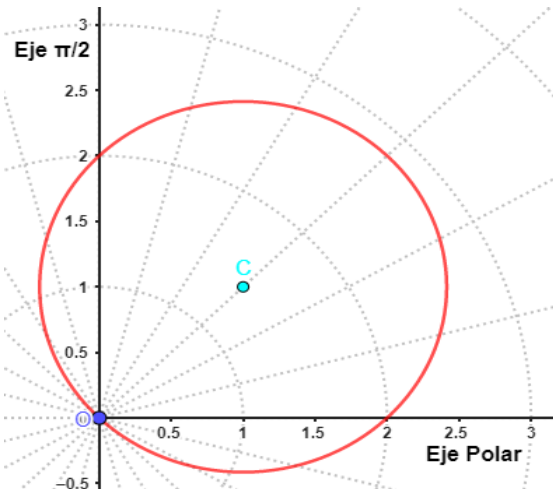
Donde r viene a ser el polo, la ecuación general en coordenadas polares de una circunferencia es:

$$\boldsymbol{r = 2\,a\cos(\theta) + 2bsen(\theta)} \qquad (7)$$

Donde pasa algún punto por el origen más no forma parte de su centro, es así que tiene centro en (a, b).

Figura 39

Circunferencia con centro fuera del origen



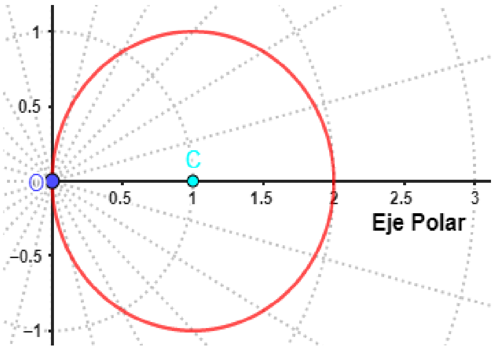
Cuando $b = 0$ la ecuación anterior se transforma en:

$$\boldsymbol{r = 2\,\mathrm{acos}(\theta)} \tag{8}$$

La misma que corresponde a una circunferencia tangente al eje $\pi/2$ con radio $|a|$ y centro sobre el eje polar, además si $a > 0$ circunferencia a la derecha del polo con centro en $(a, 0)$, en cambio si $a < 0$ la circunferencia estará a la izquierda del polo con centro en (a, π), en la imagen a la izquierda se observa una circunferencia con centro en $(1,0)$.

Figura 40

Circunferencia tangente al eje π/2



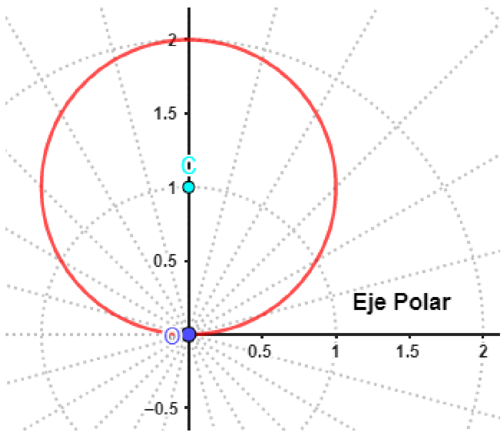
Cuando $a = 0$ la ecuación anterior se transforma en:

$$\boldsymbol{r = 2\,\mathrm{bsen}(\theta)} \tag{9}$$

La misma que corresponde a una circunferencia tangente al eje polar con radio $|b|$ y centro sobre el eje $\pi/2$, además si $b > 0$ circunferencia encima del polo con centro en $(b, \pi/2)$, en cambio si $b < 0$ la circunferencia estará debajo del polo con centro en $(b, 3\pi/2)$, tal como se observa en la gráfica del ejemplo de lado derecho.

Figura 41

Circunferencia tangente al eje polar



También se tiene a la circunferencia que tiene centro en el polo con radio $|C|$, llegando a la ecuación:

$$\boldsymbol{r = C} \tag{10}$$

Esta circunferencia tiene todos los puntos (r, θ) para los de que el radio es $|C|$ sin importar el valor de θ.

Utiliza el software

Graficar rectas en coordenadas polares en un cuaderno es relativamente fácil, pero demanda tiempo construir punto a punto, por lo cual se diseñará un archivo paso a paso en GeoGebra de su graficación, permitiendo identificar la orientación de las mismas, tal como se presenta en el ejemplo.

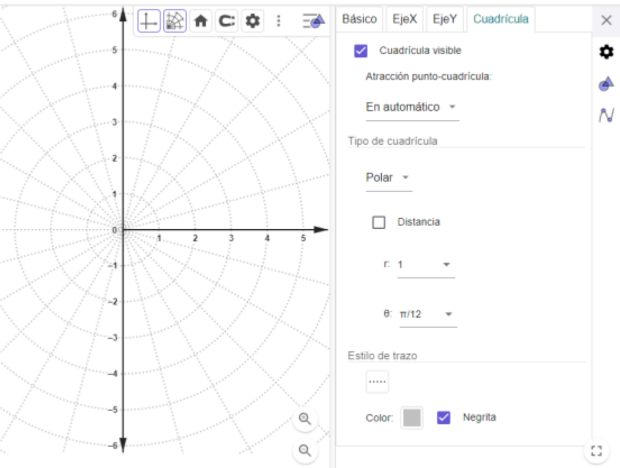
Ejemplo 3.2. *Utilice el software GeoGebra para graficar las ecuaciones dadas por* $rcos(\alpha) = 5$ *y* $rsen(\beta) = -2$, *además identifique su orientación y a qué ejes son paralelas.*

Paso 1. Una vez ingresado al software, primeramente, se le dará un aspecto de plano polar a la vista gráfica, es decir se modificará la cuadrícula. Para esto se dirige al ícono de configuración (rueda o engranaje) de la parte superior derecha y dar clic, una vez realizado se cambia el aspecto de los ejes al gusto, además en la ventana de cuadrícula se dirige a tipo y seleccionar polar.

Paso 2. Después de seleccionar polar en la parte posterior se habilita la opción de distancia pero en base a lo específico de polar (radio y ángulo), se selecciona $r{:}\,1$ y $\theta{:}\,\pi/12$, además del estilo de trazo líneas entrecortadas y el color de preferencia.

Figura 42

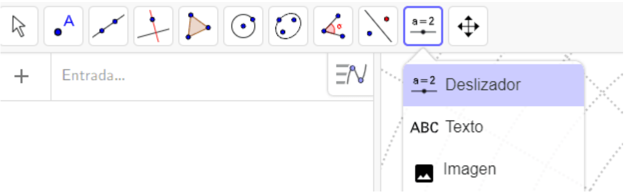
Configuración de vista gráfica en sistema polar



Paso 3. Una vez realizado la configuración de aspecto, se dirige al ícono correspondiente de la barra de herramientas como se muestra en la figura, y seleccionar deslizador.

Figura 43

Selección de deslizador



Paso 4. Se abrirá una ventana para delimitar el número a, como en la figura, en este caso se ingresa el rango de $-10 \leq a \leq 10$, con incremento de 1, finalmente dar clic en OK.

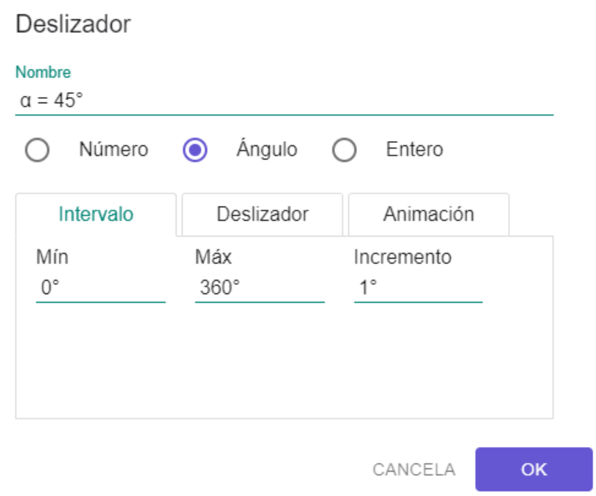
Figura 44

Configuración rango de deslizador

Paso 5. Ahora otro deslizador pero con ángulo α como en la figura, con rango $0° \leq \alpha \leq 360°$, luego dar clic en ok, después ocultarlo de la vista gráfica.

Figura 45

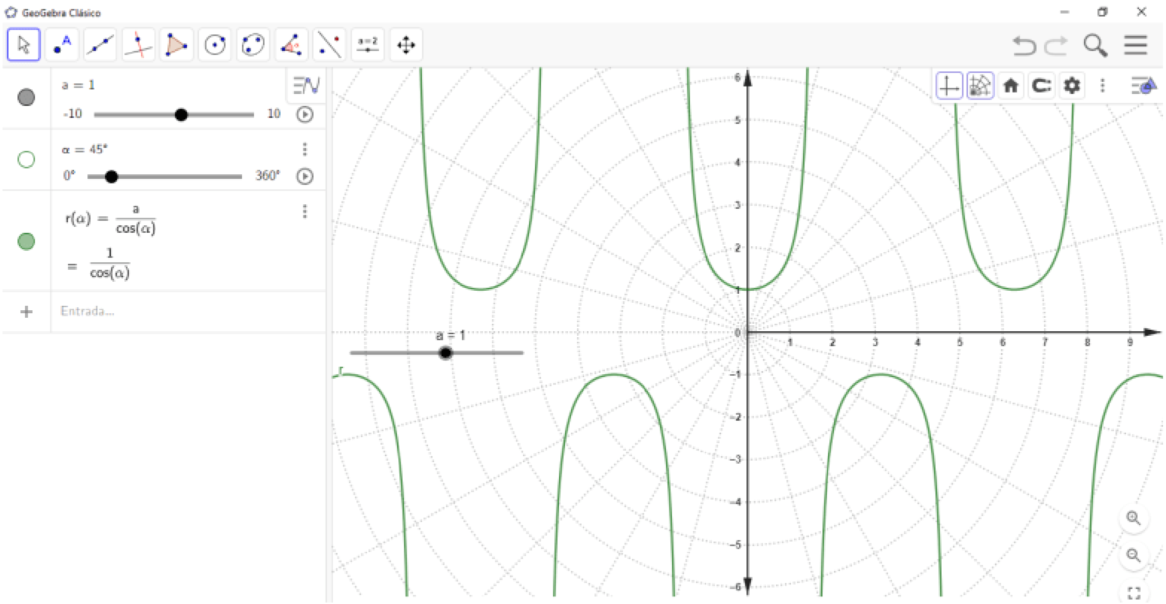
Deslizador con valor de ángulo



Paso 6. En la parte de entrada escriba el comando "$r(\alpha) = \frac{a}{\cos(\alpha)}$", luego al presionar enter, la función $r(\theta)$ aparecerá en la pantalla de GeoGebra, haga clic en el punto de color en la ventana algebraica a la izquierda de la pantalla para "ocultar" la función en la vista gráfica.

Figura 46

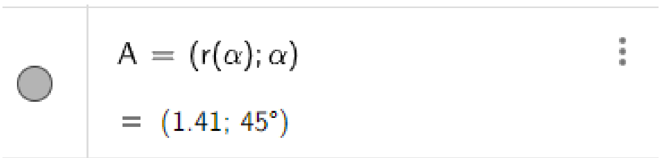
Insertar función manual



Paso 7. Construya un punto en la entrada digitalizando el comando "$A = (r(\alpha); \alpha)$", luego dar clic en los tres puntos y elegir propiedades, en la ventana emergente en básico activar la casilla "Mostrar rastro" y en etiqueta visible "Nombre y valor", además elija el color de su preferencia.

Figura 47

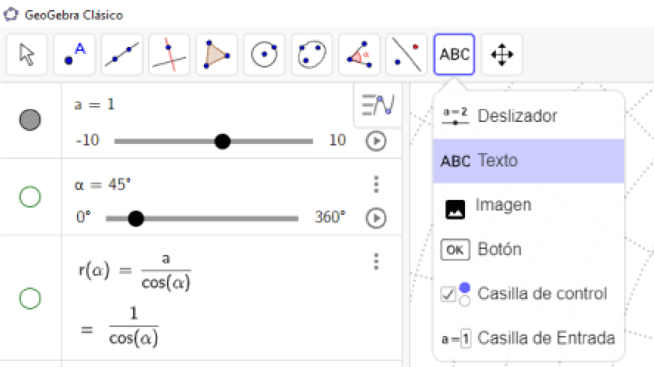
Configuración de punto con aspecto diferente



Paso 8. Ahora se dirige a la décima casilla de herramientas y elija texto, luego dar clic en la pantalla donde quiere que se muestre el texto.

Figura 48

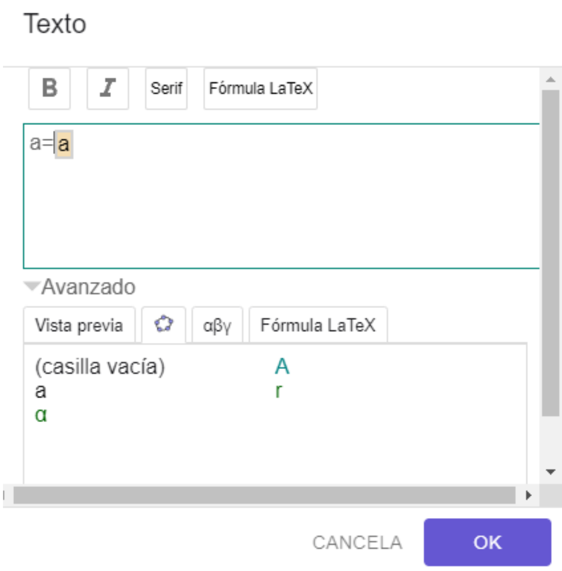
Selección de herramienta "texto"



Paso 9. Se habilita una ventana emergente, en la parte superior ingresar “a=”, luego dirigirse a avanzado y dar clic en el ícono de GeoGebra y seleccionar “a”, tal como se observa en la imagen para finalmente dar en “Ok”.

Figura 49

Texto vinculado a deslizador

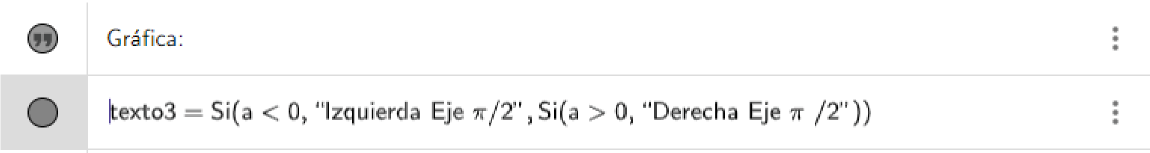


Paso 10. Ingresar un nuevo texto simple que diga “Gráfica”, y otro que diga “Paralela al eje π/2”, luego cambie el aspecto de forma en sus propiedades a su preferencia.

Paso 11. En la casilla de entrada ingrese el comando “Si(a<0,"Izquierda Eje π/2",Si(a>0,"Derecha Eje π /2"))”, luego cámbiele los aspectos de forma. Este comando condicional nos permite identificar la orientación que tendrá la gráfica cuando la constante a sea mayor o menor que cero.

Figura 50

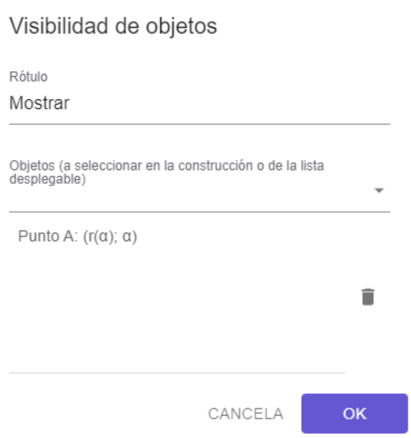
Texto con condicionales



Paso 12. En el mismo ícono de herramientas que se está trabajando, ahora elija casilla de control. Dar clic en la vista gráfica y se habilitará una ventana emergente, de ahí en la parte de rótulo "Mostrar" y en la lista desplegable elegir "Punto A", finalmente dar en "Ok".

Figura 51

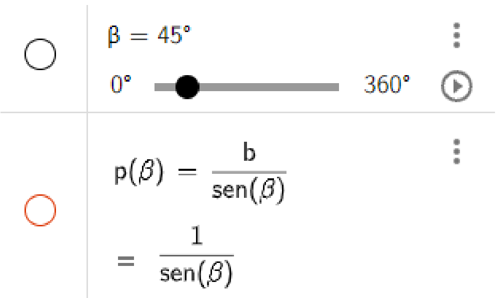
Configuración de casilla de control



Paso 13. Repita los pasos 3 al 5, pero con deslizador número b, y el otro con ángulo β, además en la parte de entrada escriba el comando "$p(\beta) = \frac{b}{\text{sen}(\beta)}$", luego haga clic en el punto de color en la ventana algebraica a la izquierda de la pantalla para "ocultar" la función y el ángulo de la vista gráfica.

Figura 52

Ocultar elementos de vista gráfica



Paso 14. Construya un nuevo punto "$B = (r(\beta); \beta)$", luego active la casilla "Mostrar rastro" y en etiqueta visible "Nombre y valor", cámbiele de color, tal como el paso 7.

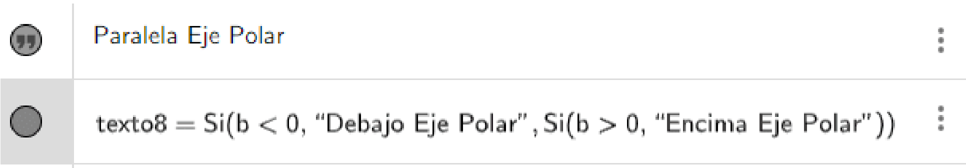
Paso 15. Ahora cree un nuevo texto, ingresando en la parte superior “b=”, luego dirigirse a avanzado y dar clic en el ícono de GeoGebra y seleccionar “b”, finalmente dar en “Ok”, tal como el paso 8 y 9.

Paso 16. Ingresar un nuevo texto simple que diga “Gráfica”, y otro que diga “Paralela Eje Polar”, luego cambie el aspecto de forma en sus propiedades a su preferencia.

Paso 17. En la casilla de entrada ingrese el comando “Si(b<0,"Debajo Eje Polar",Si(b>0,"Encima Eje Polar"))”, luego cámbiele los aspectos de forma. Este comando condicional nos permite identificar la orientación que tendrá la gráfica cuando la constante a sea mayor o menor que cero.

Figura 53

Texto con condicionales

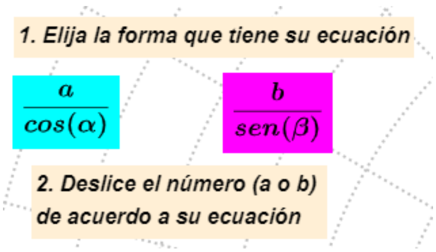


Paso 18. Elija una nueva casilla de control de ahí en la parte de rótulo “Mostrar” y en la lista desplegable elegir “Punto B”, finalmente dar en “Ok”.

Paso 19. Ahora daremos aspecto de instrucciones para usar el archivo, en texto simple escribir “1. Elija la forma que tiene su ecuación”, otro texto con “$\frac{a}{\cos(\alpha)}$” y uno nuevo “$\frac{b}{\text{sen}(\beta)}$”, además darles aspectos de forma. Así mismo otro texto que diga “2. Deslice el número (a o b) de acuerdo a su ecuación”.

Figura 54

Texto con estilo personalizado



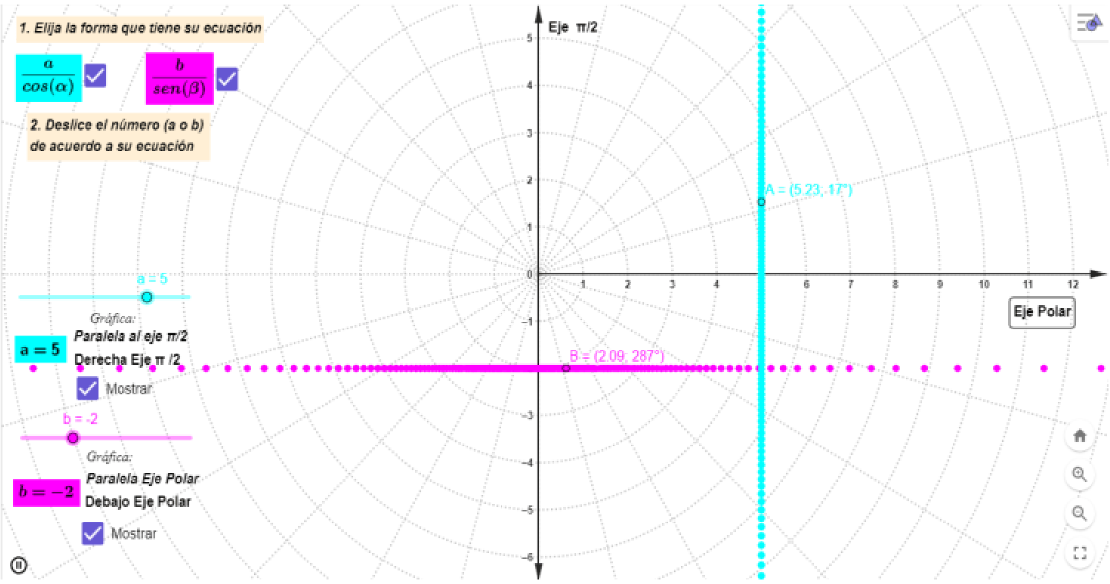
Paso 20. Elija casilla de control sin rótulo y seleccionando los objetos “Número a, Texto 1, 2, 3, 4, y Valor lógico c”; además una nueva con los objetos “Número b, Texto 5, 6, 7, 8, y Valor lógico d”. Desactive las etiquetas y desactive las casillas.

Paso 21. Ahora si elija los valores de las ecuaciones del ejemplo que son: $rcos(\alpha) = 5$ y $rsen(\beta) = -2$.

Es decir, el número a es 5 y el número b es -2, las gráficas en GeoGebra quedan de la siguiente manera.

Figura 55

Ejemplo de rectas polares



El archivo que se ha diseñado permite observar e identificar las gráficas de rectas en ecuaciones polares todo esto manejando los control es decir activando y desactivando las casillas colocadas, observando los elementos descritos de cada una. Para visualizar, utilizar el archivo online y verificar los comandos utilizados, escanee el código adjunto.

DESCRÚBEME

Ejemplo 3.3. *Utilice el software GeoGebra para graficar la ecuación dada por* $r = 6\cos(\theta)$ *además identifique su orientación, a qué eje es paralela y su centro.*

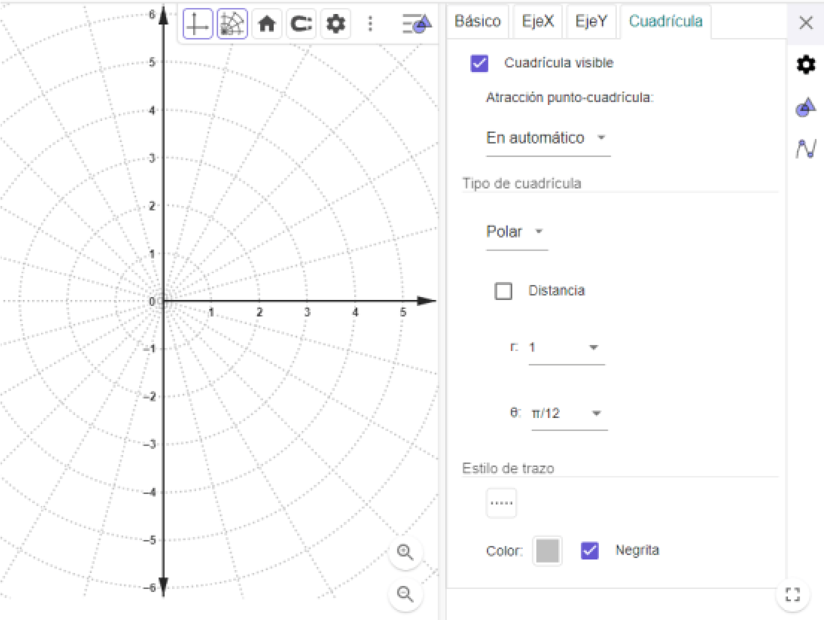
Graficar circunferencias en coordenadas polares en un cuaderno es relativamente fácil, pero demanda tiempo construir punto a punto, por lo cual se diseñará un archivo paso a paso en GeoGebra de su graficación, permitiendo identificar algunas características de las mismas.

Paso 1. Primeramente, se le dará un aspecto de plano polar a la vista gráfica, es decir se modificará la cuadrícula. Para esto se dirige al ícono de configuración (rueda o engranaje) de la parte superior derecha y dar clic, una vez realizado se cambia el aspecto de los ejes al gusto, además en la ventana de cuadrícula se dirige a tipo y seleccionar polar.

Paso 2. Después de seleccionar polar en la parte posterior se habilita la opción de distancia pero en base a lo específico de polar (radio y ángulo), se selecciona $r: 1$ y $\theta: \pi/12$, además del estilo de trazo líneas entrecortadas y el color de preferencia.

Figura 56

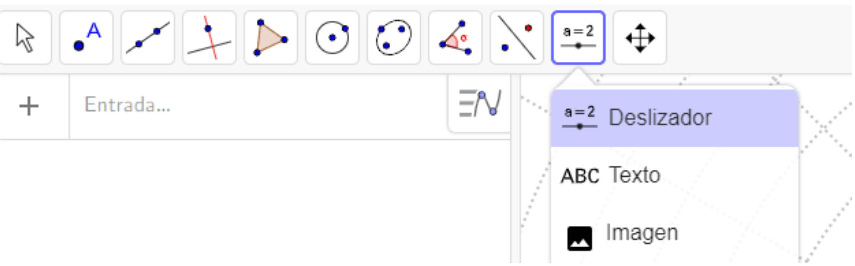
Configuración de vista en sistema polar



Paso 3. Una vez realizado la configuración de aspecto, se dirige al ícono correspondiente de la barra de herramientas como se muestra en la figura, y seleccionar deslizador.

Figura 57

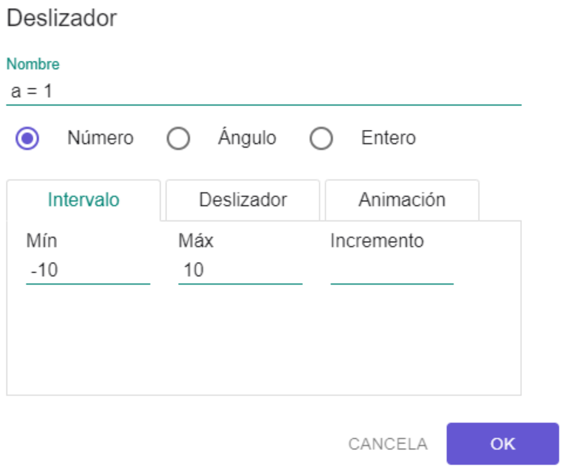
Selección de herramienta "deslizador"



Paso 4. Se abrirá una ventana para delimitar el número a, como en la figura, en este caso se ingresa el rango de $-10 \leq a \leq 10$, finalmente dar clic en OK.

Figura 58

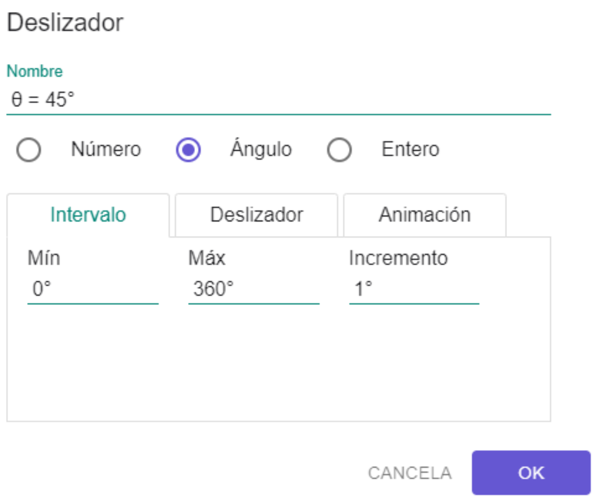
Delimitar deslizador con un rango



Paso 5. Ahora otro deslizador con nombre “b” de iguales características, además uno nuevo de ángulo θ como en la figura, con rango $0° \leq \theta \leq 360°$, luego dar clic en ok, después ocultarlo de la vista gráfica.

Figura 59

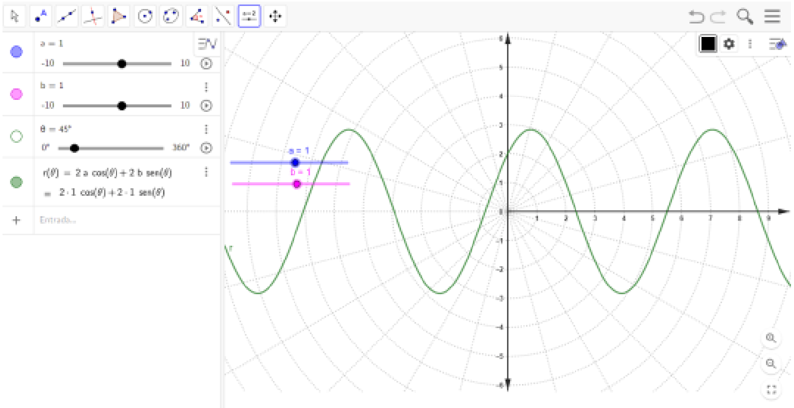
Deslizador con valor de ángulo



Paso 6. En la parte de entrada escriba el comando “$r(\theta) = 2 * a * \cos(\theta) + 2 * b * sen(\theta)$”, luego al presionar enter, la función $r(\theta)$ aparecerá en la pantalla de GeoGebra, haga clic en el punto de color en la ventana algebraica a la izquierda de la pantalla para “ocultar” la función en la vista gráfica.

Figura 60

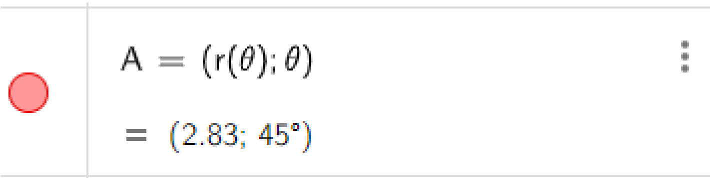
Ingresar función combinada



Paso 7. Construya un punto en la entrada digitalizando el comando "$A = (r(\theta); \theta)$", luego dar clic en los tres puntos y elegir propiedades, en la ventana emergente en básico activar la casilla "Mostrar rastro" y en etiqueta visible "Nombre y valor", además elija el color de su preferencia.

Figura 61

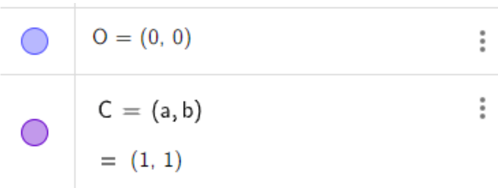
Ingresar punto forma manual



Paso 8. En la casilla de entrada cree dos puntos nuevo "$O = (0,0)$" que corresponde al polo y "$C = (a, b)$" que es el centro de las gráficas, cámbiele el color de los puntos.

Figura 62

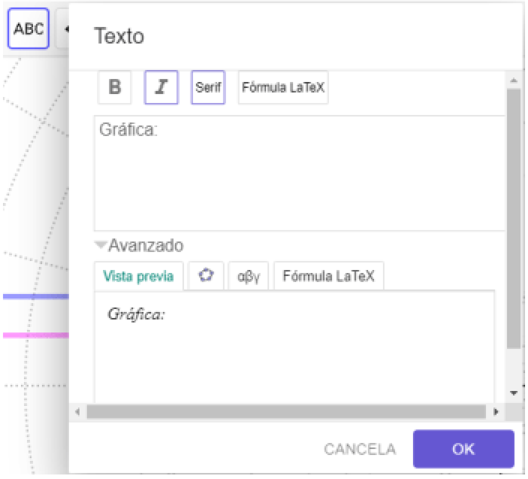
Ingresar nuevos puntos



Paso 9. Ahora se dirige a la décima casilla de herramientas y elija texto, luego dar clic en la pantalla donde quiere que se muestre el texto. Se habilita una ventana emergente, en la parte superior escribir "Gráfica:" tal como se observa en la imagen para finalmente dar en "Ok".

Figura 63

Ingresar texto simple



Paso 10. En la casilla de entrada ingrese el comando "Si(a>0 ∧ b≟0,"Derecha del Polo",Si(a<0 ∧ b≟0,"Izquierda del Polo"))" luego cámbiele los aspectos de forma. Este comando condicional nos permite identificar la orientación que tendrá la gráfica cuando la constante a sea mayor o menor que cero. Los caracteres especiales se activan en la cuarta entrada de teclado, estos corresponden a condición de igual "≟" y del operador and "∧".

Figura 64

Texto con condicionales especiales

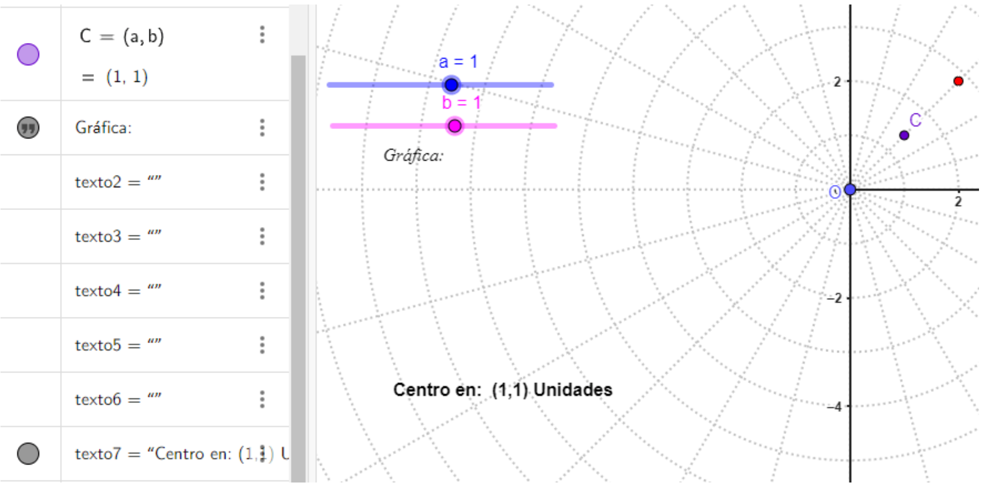
Paso 11. Ahora crear una entrada tal como el paso anterior, pero ahora que el comando condicional permita identificar la orientación que tendrá la gráfica cuando la constante b sea mayor o menor que cero. El comando es "Si(b>0 ∧ a≟0,"Encima del Polo",Si(b<0 ∧ a≟0,"Debajo del Polo"))".

Paso 12. Crear una entrada con el comando condicional que permita identificar a que eje es tangente. El comando es "Si(a≟0 ∧ b≠0,"Tangente al Eje Polar",Si(a≠0 ∧ b≟0,"Tangente al Eje π/2"))".

Paso 13. Una nueva entra con el comando “Si(a>0 ∧ b≟0,"Centro en: (" a ",0°)",Si(a<0 ∧ b≟0,"Centro en: (" a ",π)"))” que permite identificar el centro de la circunferencia sobre el eje polar, así mismo uno nuevo para el eje $\pi/2$ con “Si(b>0 ∧ a≟0,"Centro en: (" b ",90°)",Si(b<0 ∧ a≟0,"Centro en: (" b ",3π/2)"))”, por último para cuando el centro es en (a, b) con “Si(a≠0 ∧ b≠0,"Centro en: (" a "," b ") Unidades")”.

Figura 65

Texto con varios condicionales

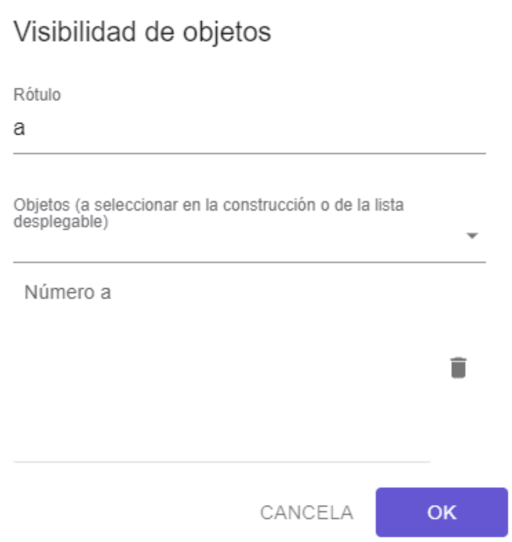


Paso 14. Ingresar con nuevo texto escrito “1. Elija los elementos que contiene su ecuación r = 2acos(θ) + 2bsen(θ)”, darle aspecto de forma que se vea como una instrucción.

Paso 15. Diríjase a herramientas, en el décimo ícono dé clic y esta vez elija casilla de control. Luego haga clic en la pantalla y en la ventana emergente en rótulo escriba “a” y en la lista desplegable elija “Número a”, después dar en “Ok”. Posterior repita el procedimiento con el objeto “Número b”.

Figura 66

Casilla de control vinculado a un objeto



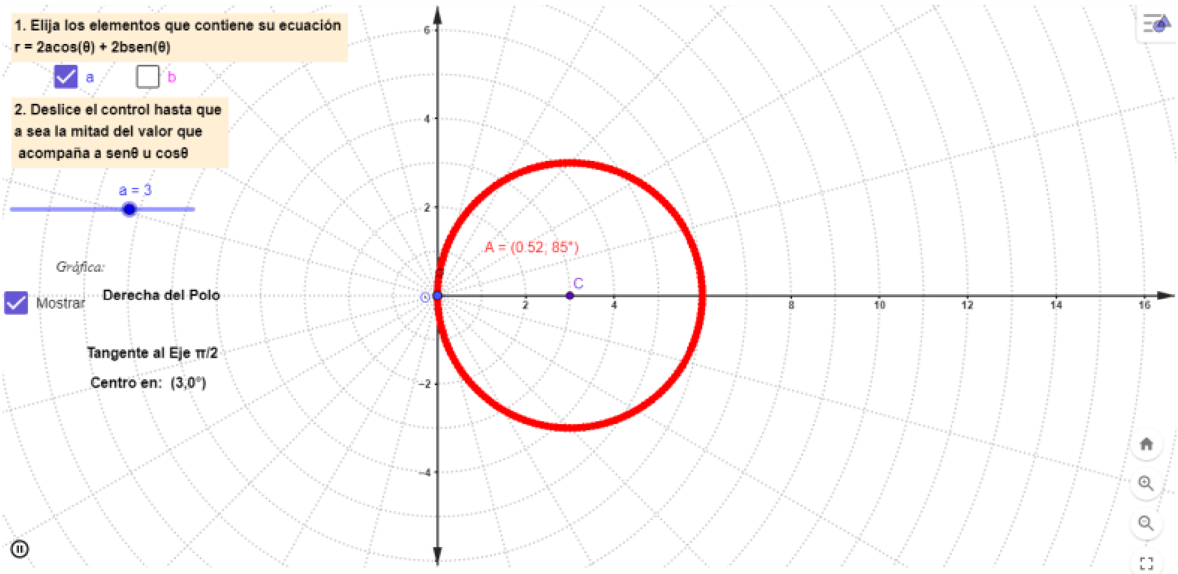
Paso 16. Ingresar un nuevo texto simple "2. Deslice el control hasta que a sea la mitad del valor que acompaña a senθ u cosθ".

Paso 17. Ingrese una nueva casilla de control con rótulo "Mostrar" y en objeto seleccione "Punto A", que es la gráfica. Posterior active play en el deslizador de ángulo, finalmente los deslizadores a y b colóquelos en 0, y desactive las casillas de control.

Paso 18. En el ejemplo se solicita la graficar la ecuación $r = 6\cos(\theta)$, por lo tanto se dirige al archivo y compara la ecuación general con su ecuación, la misma que no contiene b, es decir solo active a. Ahora da como dato 6, pero recuerde que la forma es $2a\cos(\theta)$, por lo tanto a vale $\frac{6}{2} = 3$. Deslizar hasta 3 y activar las casillas restantes, la gráfica queda así:

Figura 67

Comprobación valores del ejemplo 3.3

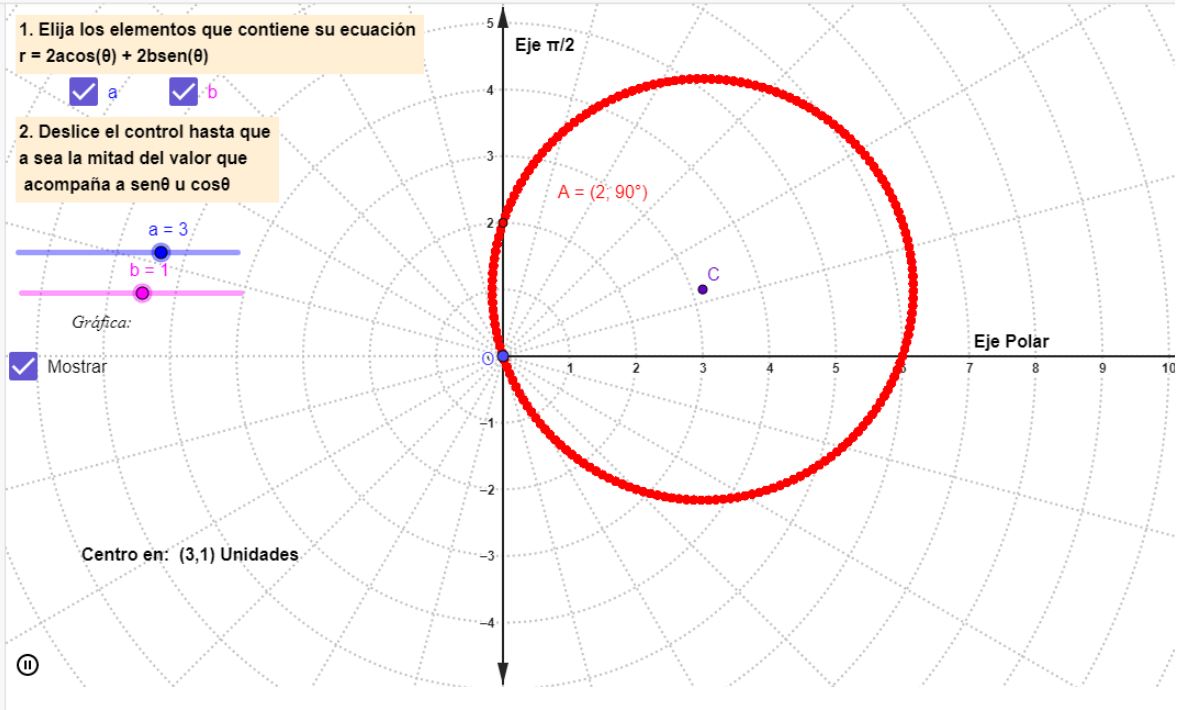


Respuesta: La ecuación corresponde a una circunferencia que es tangente al eje $\pi/2$ y está a la derecha del polo, además tiene centro en $(3{,}0°)$.

Ejemplo 3.4. *Utilice el software GeoGebra para graficar la ecuación dada por* $r = 6\cos(\theta) + 2sen(\theta)$ *además identifique sus características.*

Figura 68

Representación gráfica ejemplo 3.4



Respuesta: La ecuación corresponde a una circunferencia que tiene centro en (3,1), pero no es tangente a ningún eje, pues está sobre ambos, con mayor orientación a la derecha. Para visualizar, utilizar el archivo online y verificar los comandos utilizados, escanee el código adjunto.

DESCRÚBEME

Practica lo aprendido

Preguntas rápidas de Verdadero-Falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Explique por qué o dé un ejemplo para argumentar su posición.

a- La ecuación $r = C$ representa a una circunferencia con centro en el polo, y radio $|C|$ sin importar el valor de θ.

b- La ecuación $\theta = k$ corresponde a una recta que pasa por el origen y forma un ángulo k con el eje polar.

c- Las ecuaciones que representan a rectas paralelas al eje polar y eje $\frac{\pi}{2}$ respectivamente son $rsen\,(\theta) = b;\quad rcos(\theta) = a.$

d- La ecuación $r = 3\cos(\theta)$ representa una circunferencia con centro en el origen y radio 3.

e- La ecuación en coordenadas polares dada por $r = 2\,a\cos(\theta) + 2bsen(\theta)$ corresponde a una circunferencia con centro en el origen (0,0).

Ejercicios

Responda cada una de las preguntas argumentando su respuesta. Verifique su respuesta utilizando el software GeoGebra.

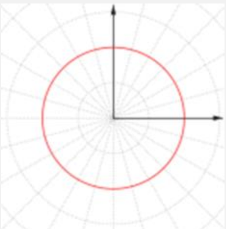
1- Encuentre la ecuación polar de la línea recta que pasa por el origen y forma un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ con el eje polar.

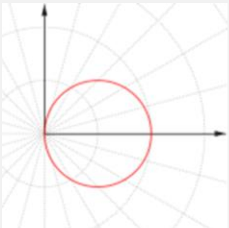
2- Determine la ecuación polar de la circunferencia que tiene centro en $(2;\pi/3)$.

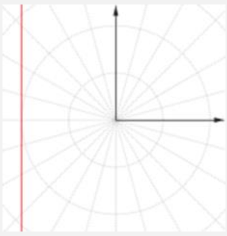
3-4 Indica el centro de las circunferencias dadas por las ecuaciones polares

3. $r = 5sen(\theta)$ **4.** $r = 9\cos(\theta) + 6sen(\theta)$

5-7 Calcula las ecuaciones polares que le corresponden a las siguientes gráficas.

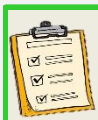
5. 

6. 

7. 

8-10 Grafica las ecuaciones polares en el plano polar, luego describe sus diferencias respecto a los ejes (paralela u tangente).

8. $r\cos(\theta) = -2$ **9.** $r = \frac{17}{5}\mathrm{sen}(\theta)$ **10.** $r = 3\cos(\theta)$



Comprueba lo Aprendido

https://www.geogebra.org/m/gbxnrwre

ESCANÉAME

Unidad 4. Caracoles de Pascal

Resultado de aprendizaje:
Identifica los tipos de caracoles de pascal a partir de los elementos y forma de la ecuación polar correspondiente.

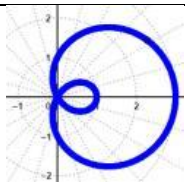
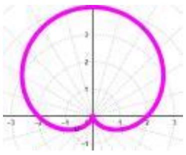
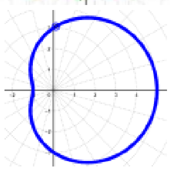
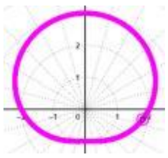
Descripción Teórica

Limaçon es un término francés proveniente del latín limax que significa caracol, estudiado por Etienne Pascal (1588-1640), por lo que son conocidos como caracoles de Pascal. Es una familia de curvas de caracol que sus gráficas provienen de la ecuación polar de la forma $r = a \pm b\cos\theta$ o $r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta$, donde las funciones trigonométricas indican la orientación o dirección de la gráfica, pues si se tiene $sen\,\theta$ es una orientación vertical y si es $\cos\theta$ la curva tiene orientación horizontal, tomando en cuenta que $0 < \theta < 2\pi$.

Además se debe tener en cuenta los valores absolutos de $a\ y\ b$ para identificar los tipos que se presentan en base a la razón a/b, tal como se detalla en la tabla.

Tabla 21

Tipos de caracoles

Condición de la razón a/b	Nombre del caracol	Representación
$\frac{a}{b} < 1$	Caracol con lazo	
$\frac{a}{b} = 1$	Cardiode (limaçon con forma corazón)	
$1 < \frac{a}{b} < 2$	Caracol con hendidura	
$\frac{a}{b} \geq 2$	Caracol convexo (limaçon sin hendidura)	

Si bien se ha presentado la forma de ver el tipo de caracol en base a la razón a/b, todo esto se puede complementar identificando los puntos de corte que tendrá la gráfica en los diferentes ejes tomando en cuenta los valores de a y b, para ello se presenta la tabla que expone en forma detallada los corte en cada eje de la ecuación general:

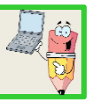
$$r = a \pm b\cos\theta \tag{11}$$
$$r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{12}$$

Tabla 22

Corte en los ejes de graficas caracoles

		$\boldsymbol{r = a + b}$ _____		$\boldsymbol{r = a - b}$ _____	
Condición		*Corte en X*	*Corte en Y*	*Corte en X*	*Corte en Y*
$\boldsymbol{\frac{a}{b} < 1}$	$Sen\ \theta$	$\pm a$	$(b+a)$ $(b-a) \rightarrow Lazo$	$\pm a$	$(b-a)$ $(b+a) \rightarrow Lazo$
	$Cos\ \theta$	$(b+a)$ $(b-a) \rightarrow Lazo$	$\pm a$	$(b-a)$ $(b+a) \rightarrow Lazo$	$\pm a$
$\boldsymbol{\frac{a}{b} = 1}$	$Sen\ \theta$	$\pm a$	$(a+b)$ $(a-b) \rightarrow (0{,}0) \rightarrow Abertura$		*Como a debe ser igual a b, se tiene los mismos valores en las dos ecuaciones*
	$Cos\ \theta$	$(a+b)$ $(a-b) \rightarrow (0{,}0) \rightarrow Abertura$		$\pm a$	
$\boldsymbol{1 < \frac{a}{b} < 2}$	$Sen\ \theta$	$\pm a$	$(b+a)$ $(b-a)$ $\rightarrow Hendidura$	$\pm a$	$(b-a)$ $(b+a)$ $\rightarrow Hendidura$
	$Cos\ \theta$	$(b+a)$ $(b-a)$ $\rightarrow Hendidura$	$\pm a$	$(b-a)$ $(b+a)$ $\rightarrow Hendidura$	$\pm a$
$\boldsymbol{\frac{a}{b} \geq 1}$	$Sen\ \theta$	$(b+a)$ $(b-a) \rightarrow$ $Achatamiento$	$\pm a$	$(b-a)$ $(b+a) \rightarrow$ $Achatamiento$	$\pm a$
	$Cos\ \theta$	$\pm a$	$(b+a)$ $(b-a) \rightarrow$ $Achatamiento$	$\pm a$	$(b-a)$ $(b+a) \rightarrow$ $Achatamiento$

Tal como se mencionó la orientación viene dada por la función seno y coseno, pero a las gráficas también se las puede analizar en específico la dirección y simetría, para lo cual se toma en cuenta el criterio de la estructura de la ecuación polar y apoyados en los puntos de corte mostrados en la gráfica se tiene una visión general de las ecuaciones: sí es de la forma $r = a + b\cos\theta$ apunta hacia la derecha con simetría al eje polar, tal como la gráfica de la ecuación $r = a - b\cos\theta$ pero apuntando hacia la izquierda; por otro lado cuando la ecuación toma la representación de $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$ su dirección es hacia arriba con simetría respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ y si tiene el signo negativo ($r = a - b\,\mathrm{sen}\,\theta$) la gráfica apuntará hacia abajo con el mismo eje de simetría.

Utiliza el software 

Para construir la gráfica y verificar los conceptos presentados se realiza el ejemplo que se presenta a continuación haciendo uso del software GeoGebra.

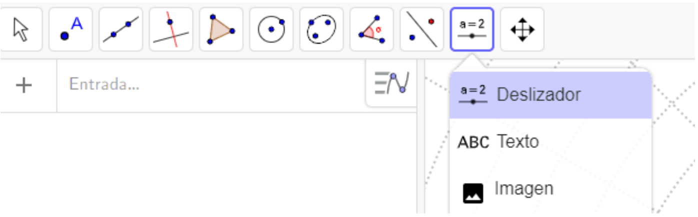
Ejemplo 4.1. *Grafique usando el software GeoGebra la curva polar* $r = 1 + 3\ sen\ \theta$*, e identifique su dirección y simetría.*

La gráfica será de la ecuación polar general de la forma $r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta$, por lo que el ejemplo propone un valor específico tanto para a (1) como para b (3), pero continuando con la forma de trabajo, se utiliza deslizadores para analizar de mejor manera la gráfica.

Paso 1. Una vez ingresado al software se crea un control deslizante haciendo clic en el décimo ícono en la esquina superior izquierda como se muestra en la figura, y seleccione deslizador.

Figura 69

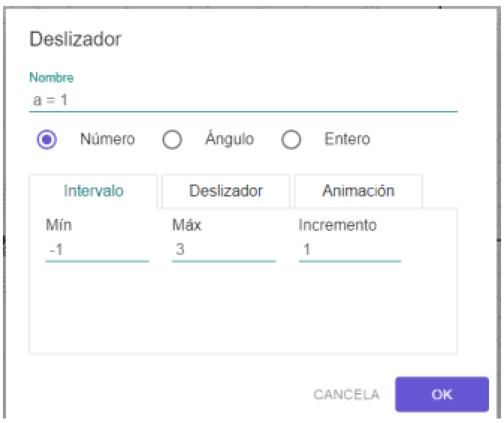
Selección herramienta "deslizador"



Paso 2. Se abrirá una ventana para delimitar el número a, como en la figura, ingrese un rango que contenga el valor solicitado de 1, en este caso se ingresa $-1 \leq a \leq 3$, con incremento de 1.

Figura 70

Delimitar deslizador con un rango



Paso 3. Dar clic en OK.

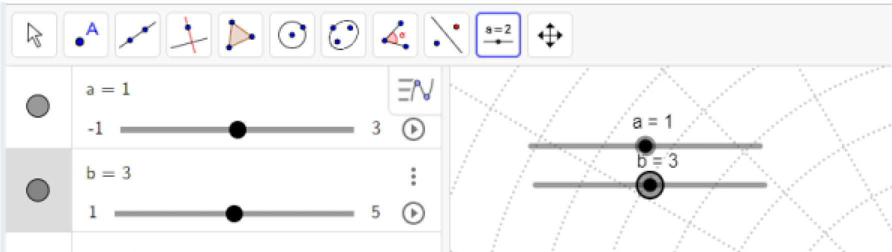
Paso 4. Para el segundo control deslizante (b), simplemente haga clic en el mismo ícono nuevamente y repita el procedimiento anterior.

Paso 5. Ingrese un rango que contenga el valor solicitado de 3, en este caso se ingresa $1 \leq a \leq 5$, con incremento de 1, posteriormente dar clic en ok.

Paso 6. Coloque los valores solicitados en los deslizadores, a igual a 1, y b igual a 3, para ello solo deslice el punto de color negro de cada deslizador al valor que desee.

Figura 71

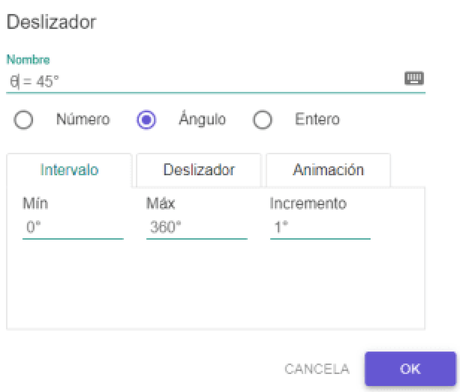
Seleccionar valores en deslizadores



Paso 7. Ingrese un tercer deslizador pero esta vez seleccione ángulo, asignándole el nombre de tetha (θ) en vez de α con valores entre $0° \leq \theta \leq 360°$ e incremento de 1°, después dar clic en ok, tal como se muestra en la figura.

Figura 72

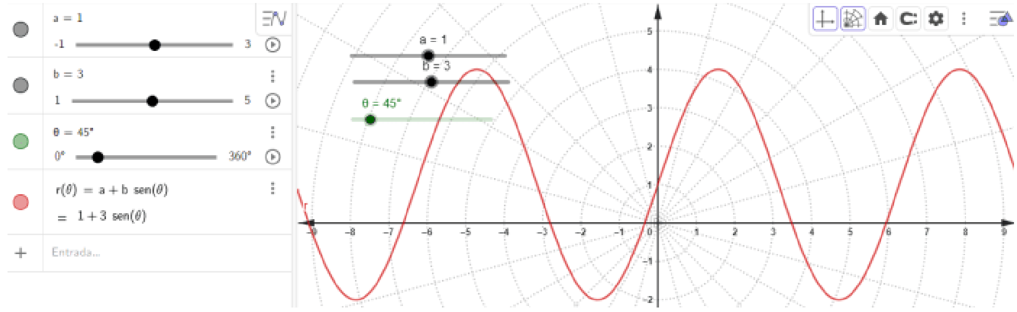
Deslizador con valor de ángulo



Paso 8. Escriba la ecuación $r(\theta) = a + bsen(\theta)$ en el campo de entrada (la parte izquierda de la pantalla). Al presionar enter, la función $r(\theta)$ aparecerá en la pantalla de GeoGebra, haga clic en el punto rojo en la ventana de álgebra a la izquierda de la pantalla para "ocultar" la función en la vista gráfica.

Figura 73

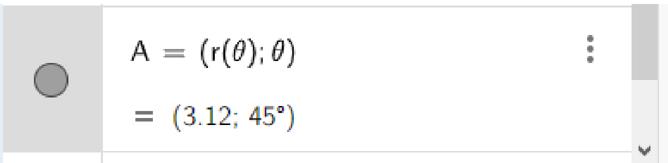
Ingresar función vinculada a otros objetos



Paso 9. En el campo de entrada ingresar $A = (r(\theta);\ \theta)$, que corresponde al punto de la curva de la ecuación polar con cada valor de ángulo en el rango ingresado al inicio.

Figura 74

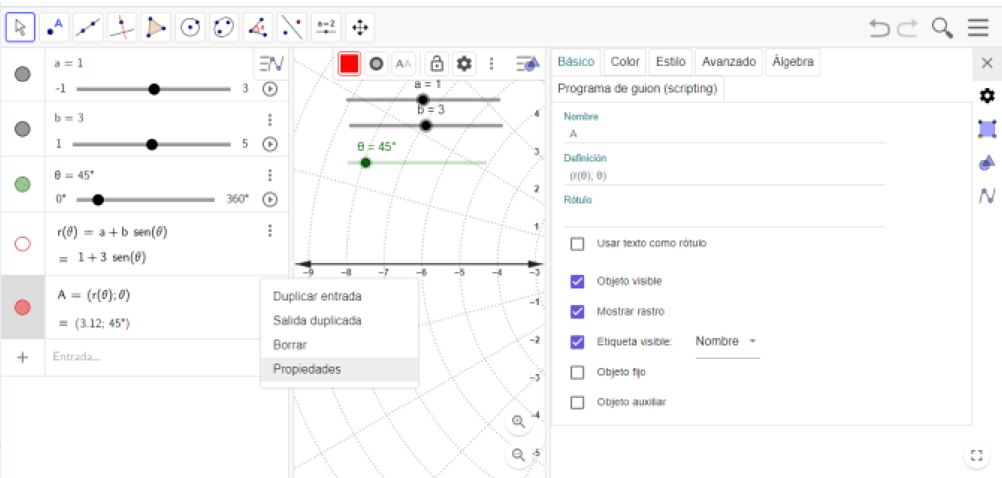
Ingresar punto en coordenadas polar



Paso 10. En la parte izquierda donde está el punto A, dé clic en los tres puntos y seleccione propiedades, en la ventana emergente active la casilla mostrar rastro, además si desea, puede ir al apartado de color y seleccionar el de su preferencia, en seguida dar clic en la x de la ventana (emergente) para cerrarla.

Figura 75

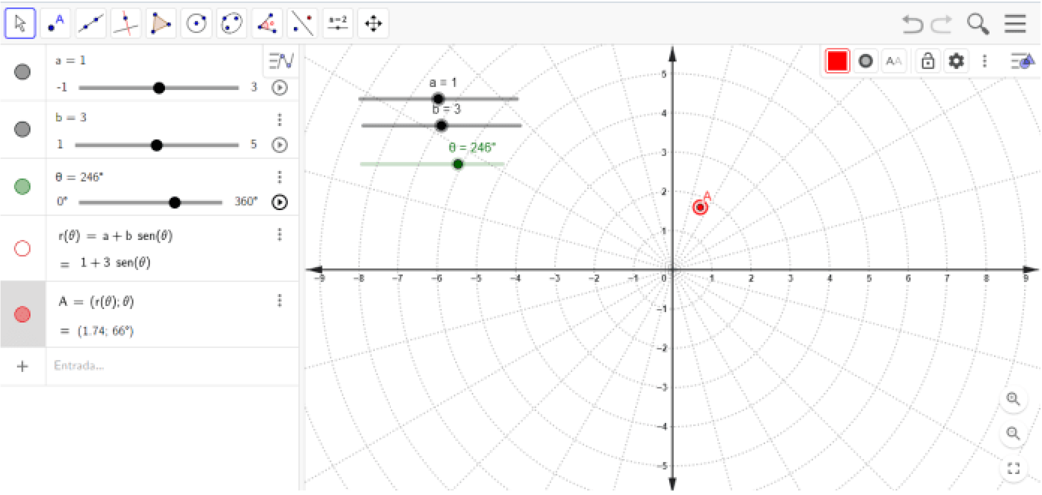
Mostrar rastro de un punto



Paso 11. Para ver la gráfica completa en la parte izquierda de la pantalla dar play en el botón del deslizador del ángulo, y observe como se construye la gráfica punto a punto.

Figura 76

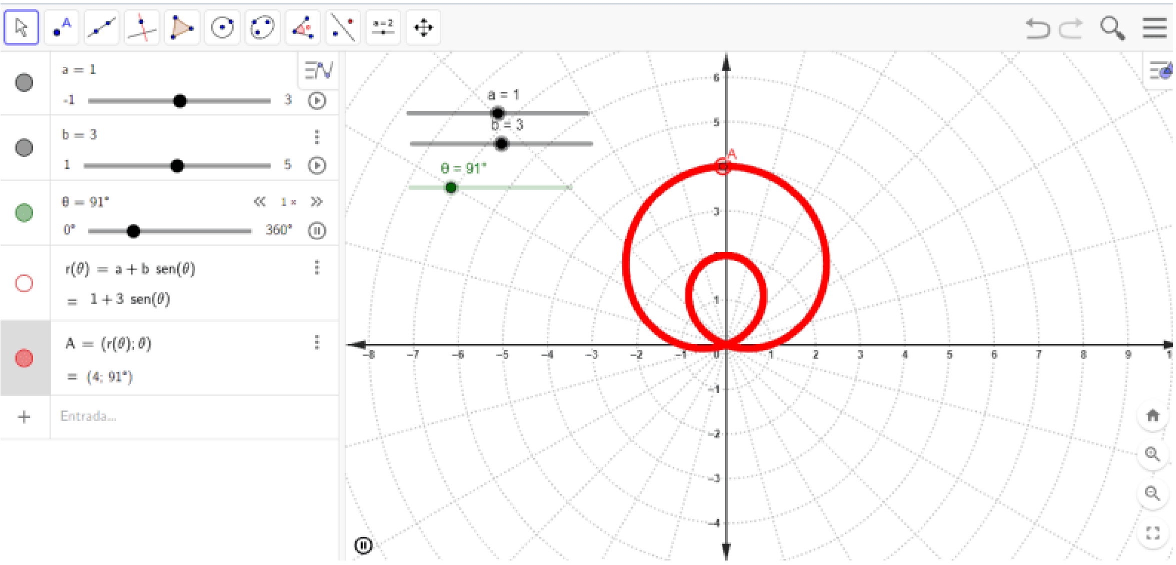
Activar representación gráfica



Respuesta: Nótese que la gráfica de la ecuación polar es un caracol con lazo, pues la razón $\frac{a}{b}$ es menor a 1.

Figura 77

Representación gráfica de ejemplos 4.1



En la base a la gráfica y aplicando los fundamentos teóricos, la orientación es vertical por contener a la función seno en su ecuación, con dirección hacia arriba, es decir es simétrica respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$, pues la curva toma representación de $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$, elementos que se identifican con facilidad en la gráfica. Para visualizar mejor la gráfica en el software y verificar cómo se construyó, escanee el código adjunto.

DESCRÚBEME

Ejemplo 4.2. *Aplicando los fundamentos teóricos, encuentre los cortes en los ejes de la curva polar* $r = 3 - 2\, cos\ \theta$, *e identifique su dirección, simetría y el tipo de caracol .*

Para encontrar lo solicitado se procede de la siguiente manera:

Paso 1. Identificar el tipo de caracol con la condición de la razón $\frac{a}{b}$ con sus valores absolutos.

$$r = 3 - 2\, cos\ \theta = a - bcos\theta \rightarrow \quad a = 3 \ \ y \ \ b = -2$$

$\frac{3}{2} = 1.5$; Recordemos que sí a/b es mayor que 1 pero menor que 2, entonces el tipo de caracol es *un caracol con hendidura.*

Paso 2. Identificar la simetría.

Para ello se observa que la función trigonométrica en la ecuación es coseno, por lo tanto, su gráfica se dará en el eje polar, teniendo una simetría respecto al mismo, entonces *es simétrica al eje polar*.

Paso 3. Identificar la orientación.

Su orientación es hacia la izquierda, ya que el valor de b es negativo y compone la ecuación de la forma $r = a - bcos\theta$, la misma que forma la gráfica en la parte izquierda del plano polar; entonces tiene *orientación a la izquierda.*

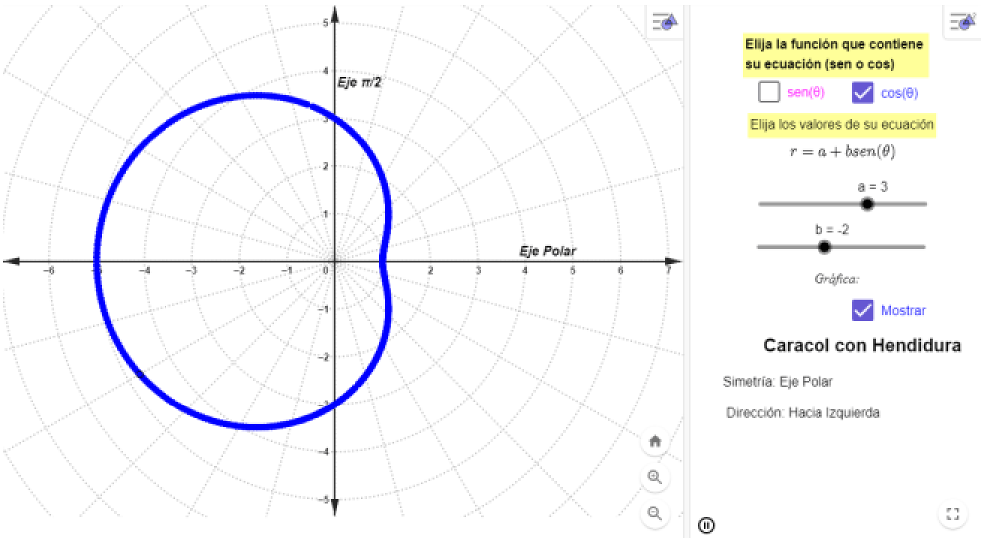
Paso 4. Identificar los cortes en los ejes en base a lo encontrado anteriormente.

Como ya se identificó el tipo de ecuación y la función trigonométrica que lo acompaña, se procede a verificar el corte en Y que es en $\pm a = \ \pm 3$, y en el eje X es $b - a = -2 - 3 = -5$, así como también con su hendidura en $b + a = -2 + 3 = 1$; entonces *corta al eje* $\frac{\pi}{2}$ *en* ± 3, *y al eje polar en* -5 *y* 1.

Paso 5. Construir la gráfica comprobando lo encontrado.

Figura 78

Representación gráfica ejemplo 4.2



Practica lo aprendido

Preguntas rápidas de Verdadero-Falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Explique por qué o dé un ejemplo para argumentar su posición.

a- Un caracol que tiene orientación horizontal, es decir simetría respecto al eje polar viene dado por la ecuación $r = a \pm bcos(\theta)$.

b- Un caracol que tiene simetría respecto al eje polar viene dado por la ecuación $r = a \pm bsen(\theta)$.

c- Un caracol convexo viene dado por las ecuaciones $r = a \pm \cos(\theta)$ o $r = a \pm sen(\theta)$ siempre que $\frac{a}{b} \geq 2$.

d- La ecuación $r = 3 + 1\cos(\theta)$ corresponde a un caracol con lazo.

e- La ecuación $r = 4 - 2\text{sen}(\theta)$ corresponde a un caracol con hendidura.

Ejercicios

Responda cada una de las preguntas argumentando su respuesta. Verifique su respuesta utilizando el software GeoGebra.

1- Encuentre los cortes con el eje $\frac{\pi}{2}$ de la ecuación $1 + 2sen(\theta)$.

2- Determine el tipo de caracol que se forma de la ecuación $r = 3 + 3sen(\theta)$.

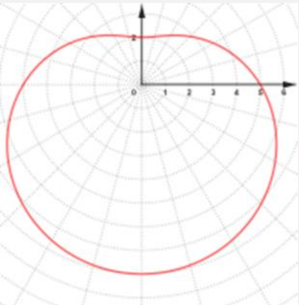
3-4 Indica la simetría y tipo de caracol que se forma de las ecuaciones polares

3. $r = 1 - \frac{9}{4}\cos(\theta)$ **4.** $r = 5 + \frac{9}{2}sen(\theta)$

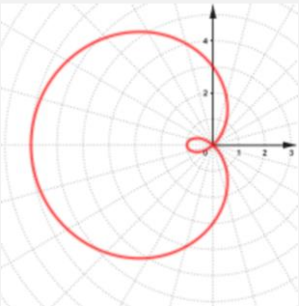
5-7 Grafica las ecuaciones en el plano polar, luego describe sus características (tipo, simetría, orientación, corte con ejes).

5. $\mathrm{r} = 6 - 7\cos(\theta)$ **6.** $\mathrm{r} = 5 - \frac{9}{2}\cos(\theta)$ **7.** $\mathrm{r} = 1 + \cos(\theta)$

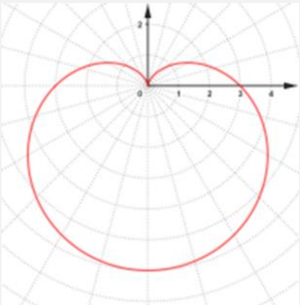
8-10 Calcula las ecuaciones polares que le corresponden a las siguientes gráficas.



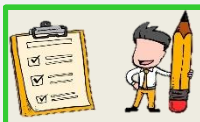
8.



9.



10.



Comprueba lo Aprendido

https://www.geogebra.org/m/jjqtg2n4

ESCANÉAME

Resultado de aprendizaje:
Identifica las rosas polares a partir de los elementos y forma de la ecuación polar correspondiente.

Descripción Teórica

Las gráficas de curvas de ecuaciones en coordenadas polares que se asemejan a una flor de pétalos recibe el nombre de rosas polares o rosetas, las mismas se obtienen de la ecuación:

$$\boldsymbol{r = a * \cos(n\theta)} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{r = a * sen(n\theta)} \tag{14}$$

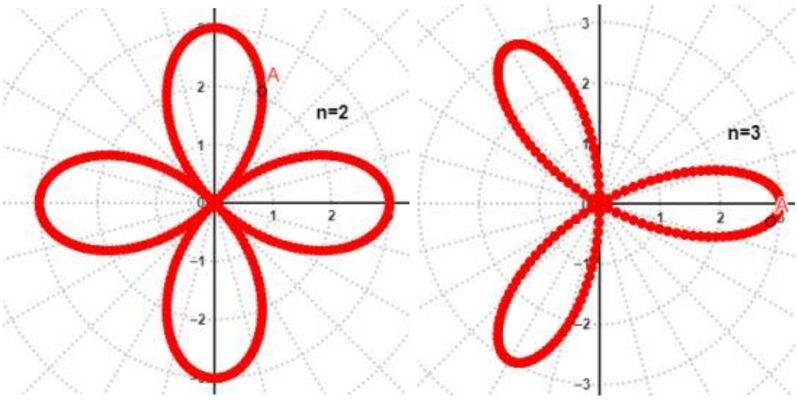
donde a es la longitud del pétalo (hojas) y el número de hojas depende de $n \in \mathbb{N}^*$ de tal forma que:

$$Sí\; n\; es\; \boldsymbol{par}\; tendrá\; \boldsymbol{2n}\; pétalos$$

$$Sí\; n\; es\; \boldsymbol{impar}\; tendrá\; \boldsymbol{n}\; pétalos$$

Figura 79

Ejemplos de rosas polares



Todas las rosas pasan por el polo, y su orientación como simetría depende de la función que acompañe a la ecuación ($sen(n\theta)$; $\cos(n\theta)$), tal como se resume en la siguiente tabla.

Tabla 23

Orientación de Rosas

Valor de n	$\boldsymbol{Cos(n\theta)}$		$\boldsymbol{Sen(n\theta)}$	
	Corte Ejes	***Simetría***	***Corte Ejes***	***Simetría***
Par	En los 2 ejes	Ambos ejes	No corta los ejes	Ambos ejes
Impar	1 pétalo pasa sobre Eje Polar	Eje Polar	1 pétalo pasa sobre Eje $\pi/2$	Eje $\pi/2$

Utiliza el software

Ejemplo 5.1. *Utilice el software GeoGebra para graficar la ecuación dada por* $r = 3\text{sen}(3\theta)$ *además identifique el número de pétalos, a que ejes corta y su simetría.*

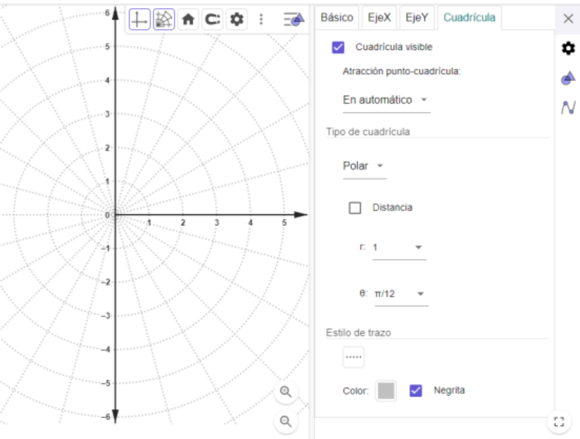
Graficar ecuaciones de rosas en coordenadas polares en un cuaderno es complejo, pues demanda tiempo construir punto a punto, por lo cual se diseñará un archivo paso a paso en GeoGebra de su graficación, permitiendo identificar algunas características de las mismas por medio de la aplicación de los conceptos teóricos resumidos en el apartado anterior, y poder observar tanto con la función $sen\ \theta$ como $\cos\theta$.

Paso 1. Primeramente, se le dará un aspecto de plano polar a la vista gráfica, es decir se modificará la cuadrícula. Para esto se dirige al ícono de configuración (rueda o engranaje) de la parte superior derecha y dar clic, una vez realizado se cambia el aspecto de los ejes al gusto, además en la ventana de cuadrícula se dirige a tipo y seleccionar polar.

Paso 2. Después de seleccionar polar en la parte posterior se habilita la opción de distancia pero en base a lo específico de polar (radio y ángulo), se selecciona $r{:}\,1$ y $\theta{:}\,\pi/12$, además del estilo de trazo líneas entrecortadas y el color de preferencia.

Figura 80

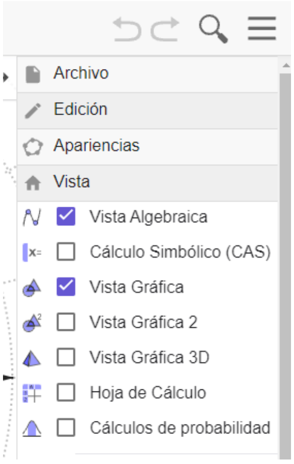
Configuración de vista en sistema polar



Paso 3. Dirigirse al ícono de Menú, posterior dar clic en “Vista” y activar las casillas de “Vista Gráfica” y “Vista gráfica 2”.

Figura 81

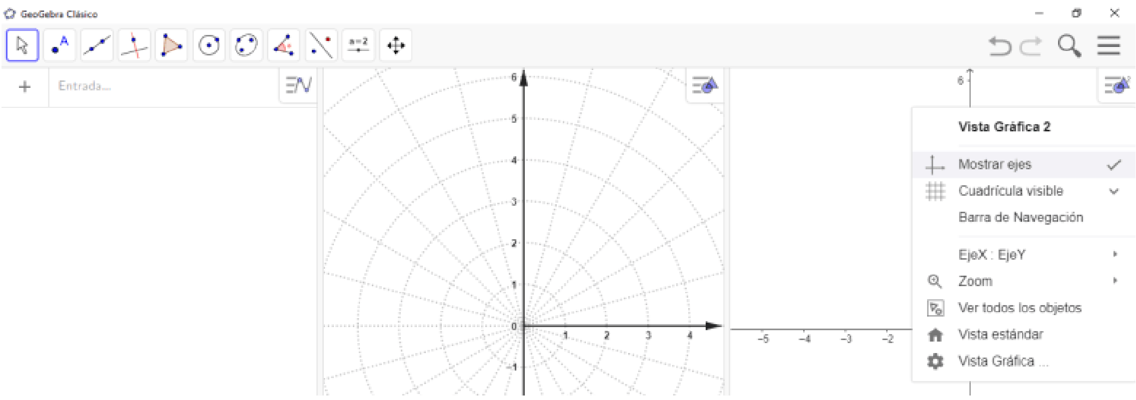
Activar los tipos de vistas



Paso 4. El espacio de trabajo se muestra como en la imagen, ahora en la vista gráfica 2, no mostrar los ejes haciendo clic derecho sobre la vista y desactivando la opción. En esta nueva vista se desarrollará todos los elementos como deslizadores, textos, entre otros para que la otra vista se visualice de mejor manera la gráfica correspondiente.

Figura 82

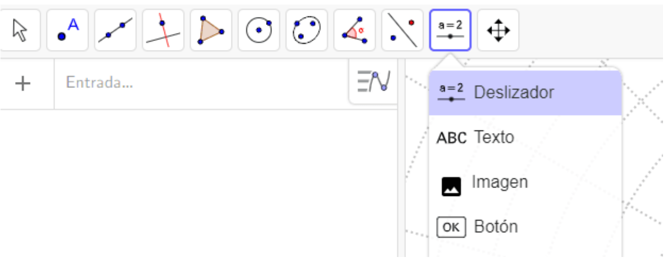
Configuración de las vistas de trabajo



Paso 5. Una vez realizado la configuración de aspecto, se dirige al ícono correspondiente de la barra de herramientas como se muestra en la figura, y seleccionar deslizador.

Figura 83

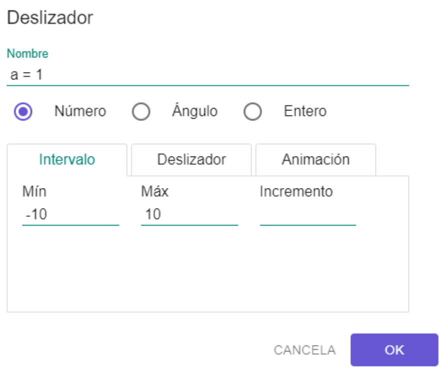
Selección de herramienta "deslizador"



Paso 6. Se abrirá una ventana para delimitar el número a, como en la figura, en este caso se ingresa el rango de $-10 \leq a \leq 10$, finalmente dar clic en OK.

Figura 84

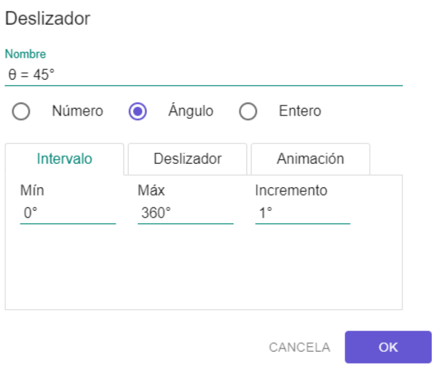
Delimitar deslizador con un rango



Paso 7. Ahora otro deslizador con nombre "n" de rango $1 \leq n \leq 10$ e incremento de 1, además uno nuevo de ángulo θ como en la figura, con rango $0° \leq \theta \leq 360°$, luego dar clic en ok, después ocultarlo de la vista gráfica (solo el ángulo).

Figura 85

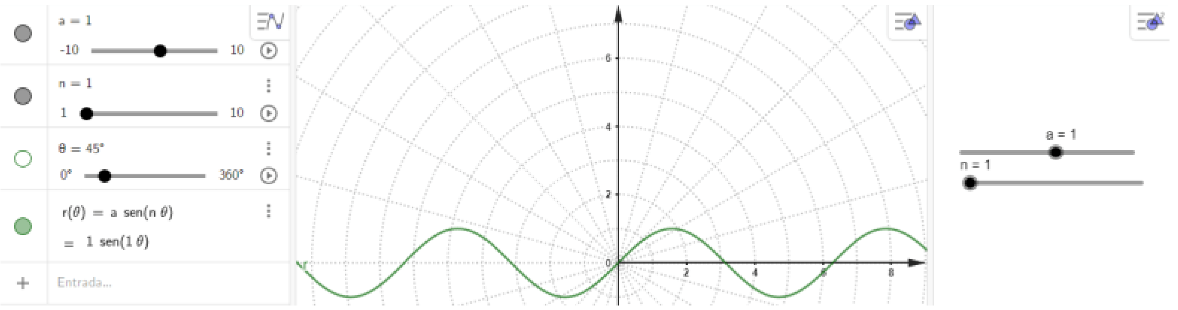
Deslizador con valor de ángulo



Paso 8. En la parte de entrada escriba el comando "$r(\theta) = a * sen(n * \theta)$", luego al presionar enter, la función $r(\theta)$ aparecerá en la pantalla de GeoGebra, haga clic en el punto de color en la ventana algebraica a la izquierda de la pantalla para "ocultar" la función en la vista gráfica.

Figura 86

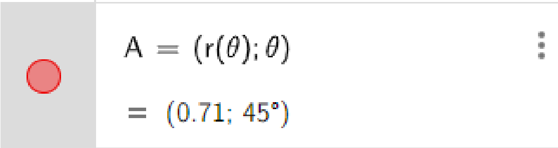
Ingresar función vinculada a otros elementos



Paso 9. Construya un punto en la entrada digitalizando el comando “$A = (r(\theta); \theta)$”, luego dar clic en los tres puntos y elegir propiedades, en la ventana emergente en básico activar la casilla “Mostrar rastro” y en etiqueta visible “Nombre y valor”, además elija el color de su preferencia.

Figura 87

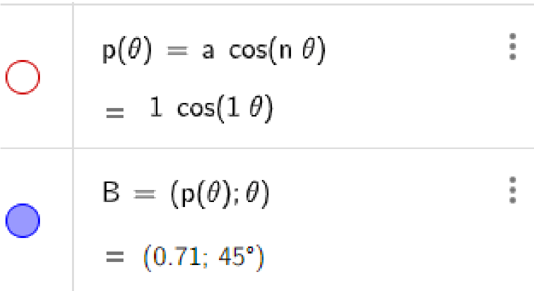
Configuración de un punto



Paso 10. En la casilla de entrada cree una nueva función digitando “$p(\theta) = a * \cos(n * \theta)$, además un nuevo punto “$B = (p(\theta); \theta)$” que corresponde a la gráfica pero con la otra función, esto con la finalidad del mismo documento graficar a elección de la forma de la ecuación y evitar repetir todo el procedimiento a realizar.

Figura 88

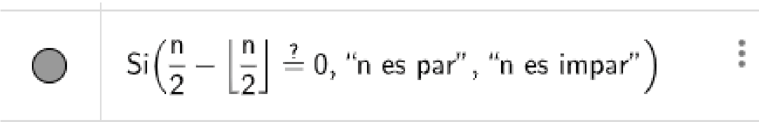
Insertar función y punto de forma manual



Paso 11. Dar clic sobre la vista gráfica 2, luego en la parte de entrada ingresar el comando “Si(((n)/(2))-floor(((n)/(2))) ≟0,"n es par","n es impar")”. GeoGebra lo convierte a lenguaje simbólico propio, que representa para usar la función truncar parte entera (piso).

Figura 89

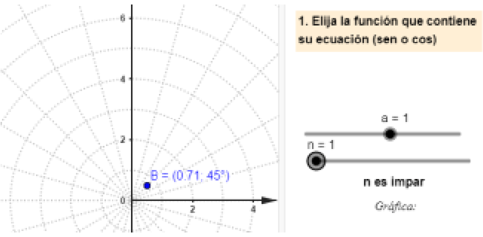
Texto con condicional truncar



Paso 12. Ingresar un texto simple “Gráfica:”, luego ingresar uno nuevo para darle aspecto de instrucción con el comando “Elija la función que contiene su ecuación (sen o cos)”, cámbiele el aspecto de forma, modificando sus propiedades (color, estilo, etc).

Figura 90

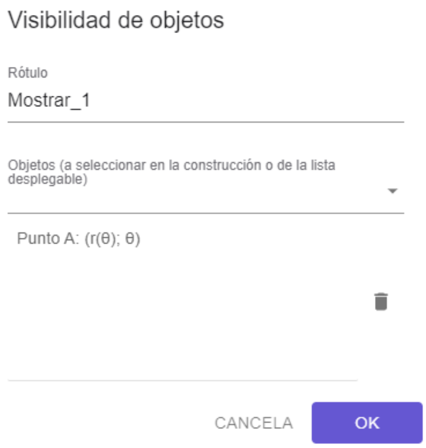
Ingresar texto simple



Paso 13. Diríjase al décimo ícono de las herramientas, pero esta vez elija casilla de control. En rótulo digite "Mostrar_1" y de la lista desplegable elija "Punto A", luego dar clic en "Ok" Repita el procedimiento con rótulo "Mostrar_2" eligiendo el objeto "Punto B".

Figura 91

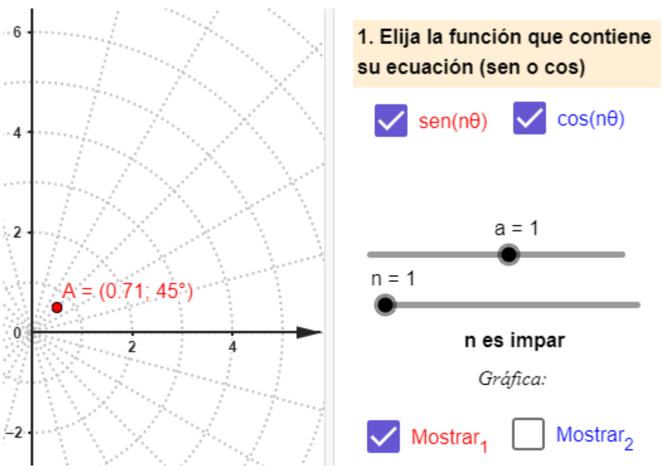
Configuración de casilla de control



Paso 14. Ahora ingresar nuevas casillas de control con rótulo "$sen(n\theta)$" y el objeto "Valor lógico b"; luego con "$cos(n\theta)$" y de la lista "Valor lógico c". El primero corresponde a la gráfica del punto A y el segundo del punto B, cámbiele color para distinguir.

Figura 92

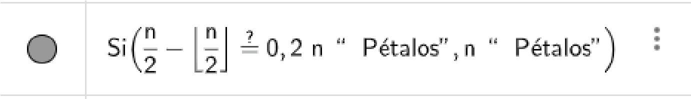
Casillas de control vinculadas a otras



Paso 15. En la parte de entrada digite “Si(((n)/(2))-floor(((n)/(2)))≟0,2 n " Pétalos",n " Pétalos")”. Este código permite saber cuántos pétalos tendrá la rosa polar, utilizando el criterio del paso 11.

Figura 93

Texto con varios condicionales



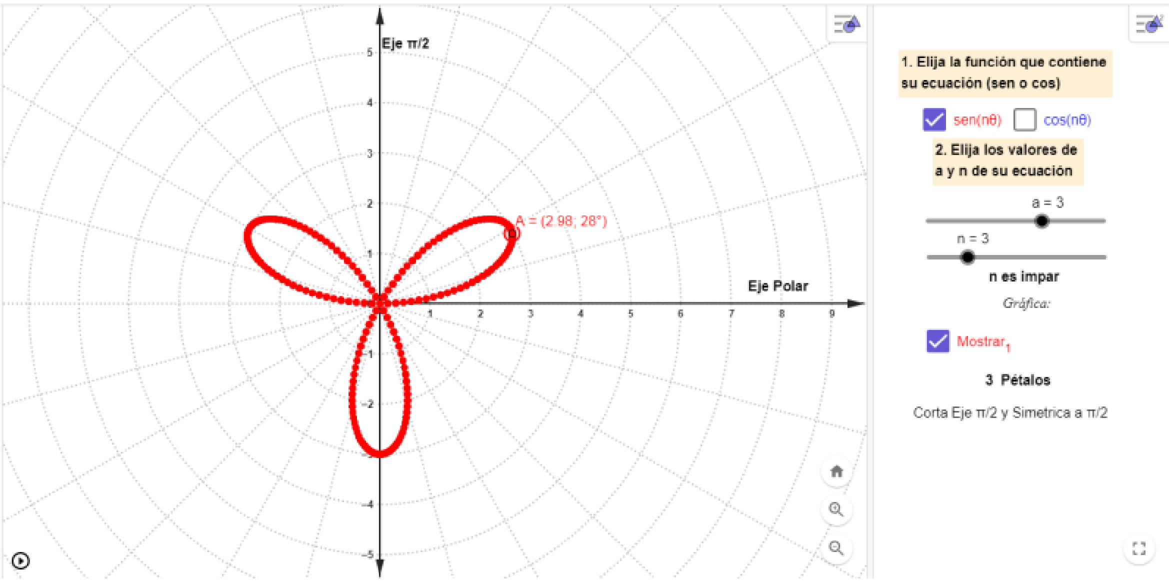
Paso 16. Ahora ingrese el comando “Si(d≟true ∧ ((n)/(2))-floor(((n)/(2)))≟0," No corta Ejes y Simetrica a los 2 Ejes","Corta Eje π/2 y Simetrica a π/2")”. Además, digite una nueva entrada con “Si(e≟true ∧ ((n)/(2))-floor(((n)/(2)))≟0,"Corta a los 2 Ejes y Simetrica a ambos","Corta Eje Polar y Simetrica a Eje Polar")”. Estos códigos permiten saber a qué ejes corta la gráfica y cual es simétrica.

Paso 17. Antes de utilizarlo dé play al botón donde está el ángulo, y desactive todas las casillas de control para evitar errores en la representación gráfica de la ecuación.

Paso 18. Ahora sí la ecuación del ejemplo es $r = 3\text{sen}(3\theta)$, es decir que a vale 3 y el valor de n igual a 3, además primero se debe activar la casilla de $sen(n\theta)$; la gráfica en el software con sus características queda de la siguiente forma.

Figura 94

Representación gráfica ejemplo 5.1



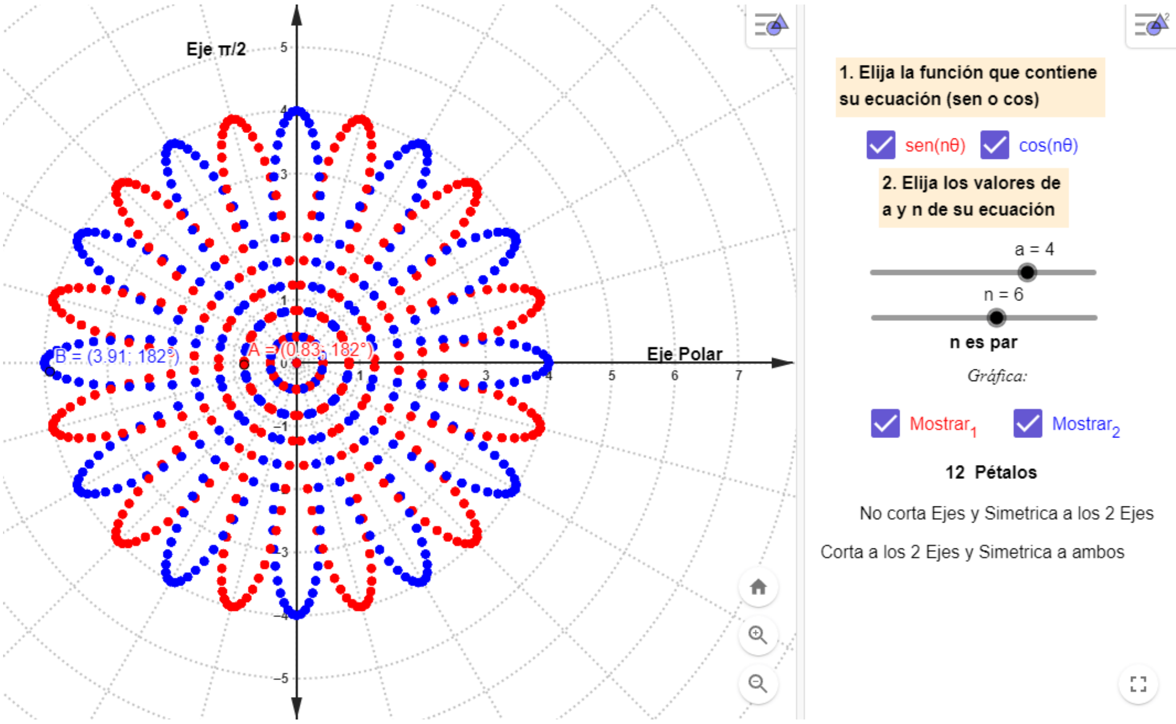
Respuesta: Nótese que la gráfica muestra una rosa polar de 3 pétalos, pues n es impar, así mismo corta a la prolongación del eje $\pi/2$ y es simétrica respecto al mismo eje. Para visualizar mejor la gráfica en el software y verificar cómo se construyó, escanee el código adjunto.

DESCRÚBEME

Ejemplo 5.2. *Utilice el software GeoGebra para graficar las ecuaciones dadas por* $r = 4\text{sen}(6\theta)$ *y* $r = 4\cos(6\theta)$, *compárelas y describa qué observa.*

Figura 95

Representación gráfica ejemplo 5.2



Respuesta: Nótese que la gráfica muestra una rosa polar de 12 pétalos, tanto para seno como coseno, pues n es par; lo curioso es al graficarlas juntas, una complementa a la otra, es decir ocupa los espacios donde no forma parte esa ecuación, esto se diferencia en los colores así completando el círculo trigonométrico de radio a.

Practica lo aprendido

Preguntas rápidas de Verdadero-Falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Explique por qué o dé un ejemplo para argumentar su posición.

a- Todas las rosas pasan por el polo, y su orientación como simetría depende de la función que acompañe a la ecuación $sen(n\theta)$ o $\cos(n\theta)$.

b- El número de pétalos de una rosa viene dado por el valor de n, considerando si n es par será n pétalos y si n es impar será 2n pétalos.

c- Las ecuaciones que representan a rosas polares son $r = bsen\,(n\theta)$; $r = acos(n\theta)$ con $n \in \mathbb{N}^*$.

d- La ecuación $r = 3\cos(4\theta)$ representa una rosa con cuatro pétalos.

e- La ecuación $r = 4\cos(3\theta)$ corresponde a una rosa con tres pétalos de longitud cuatro unidades.

Ejercicios

Responda cada una de las preguntas argumentando su respuesta. Verifique su respuesta utilizando el software GeoGebra.

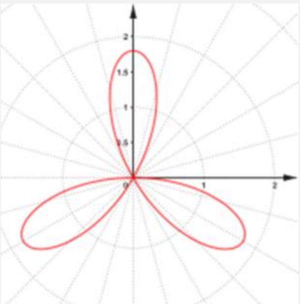
1- Encuentre la ecuación polar de una rosa que no corte los ejes con ocho pétalos de longitud cuatro.

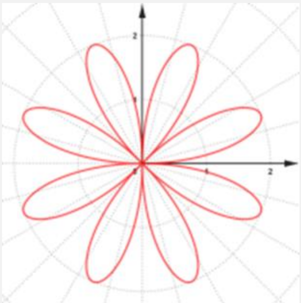
2- Determine la ecuación polar de la rosa que tiene simetría con el eje polar de cinco pétalos con longitud cuatro.

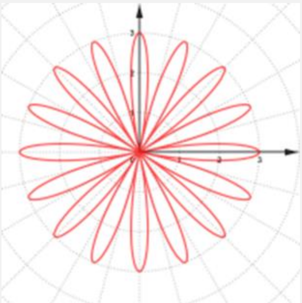
3-5 Indica la simetría y el número de pétalos de las rosas dadas por las ecuaciones

3. $r = 3sen(9\theta)$ **4.** $r = \frac{9}{2}\cos(6\theta)$ **5.** $r = \frac{17}{5}sen(5\theta)$

6-8 Calcula las ecuaciones polares que le corresponden a las siguientes gráficas.

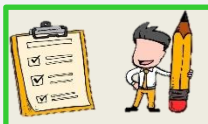
6. 

7. 

8. 

9-10 Grafica las ecuaciones polares en un mismo plano polar, luego describe sus diferencias.

9. $\mathrm{r} = 5\mathrm{sen}(7\theta)$ **10.** $\mathrm{r} = 5\cos(7\theta)$



Comprueba lo Aprendido

https://www.geogebra.org/m/durybbem

ESCANÉAME

Unidad 6. Cónicas y Otras Gráficas

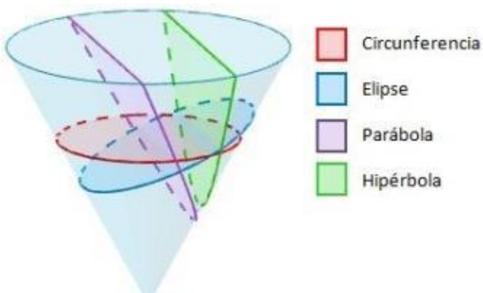
Resultado de aprendizaje:
Reconoce la representación de cónicas y otras curvas especiales a partir de la forma de sus ecuaciones polares.

Descripción Teórica

Cónicas

Las cónicas pueden definirse como lugares geométricos, que resultan de la intersección de un cono con un plano, cabe destacar que en un plano bidimensional lo que se observa gráficamente son las curvas mas no toda la sección de la intersección antes mencionada. En geometría analítica son muy estudiadas las curvas en sí, las mismas que en coordenadas cartesianas tienes sus respectivas ecuaciones, pero también en coordenadas polares, por lo que resulta importante aprender su ecuación y representación general.

Figura 96
Tipos de cónicas



Existen cuatro tipos de cónicas que son la circunferencia, elipse, parábola e hipérbola; sin embargo, la primera ya ha sido estudiada en un apartado anterior pues esta tiene diferentes formas de representarla, por lo que ahora se mostrará la ecuación que engloba a las cónicas.

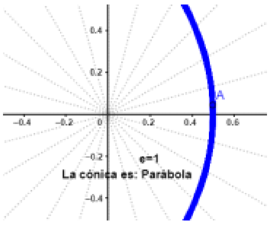
En coordenadas polares la ecuación para las cónicas viene dada por:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{ed}}{\mathbf{1} \pm \boldsymbol{e}\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta})} \tag{15}$$

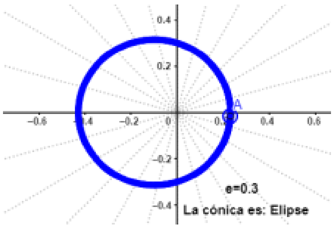
$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{ed}}{\mathbf{1} \pm \boldsymbol{e}\mathbf{sen}(\boldsymbol{\theta})} \tag{16}$$

Es decir que, viene en función de una variable “d” que es la distancia de una recta directriz medida desde el polo, las directrices son $rcos(\theta) = \pm d$ y $rsen(\theta) = \pm d$ respectivamente, tomando en cuenta que uno de sus focos es el polo según corresponda al tipo de cónica. La letra “e” corresponde a la excentricidad y es lo que finalmente determina al tipo de cónica, pues:

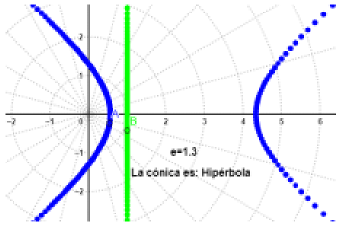
Sí $\boldsymbol{e = 1}$ es ***Parábola***



Sí $\boldsymbol{0 < e < 1}$ es ***Elipse***



Sí $\boldsymbol{e > 1}$ es ***Hipérbola***



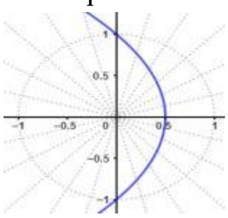
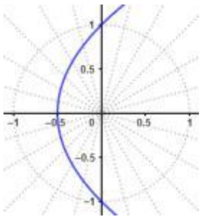
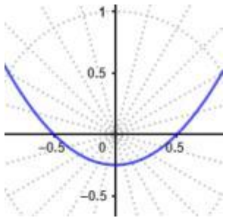
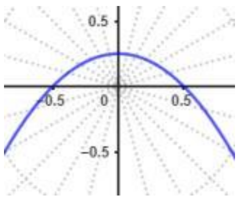
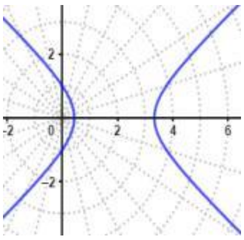
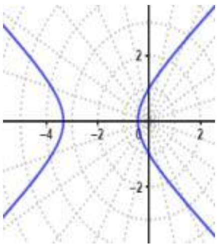
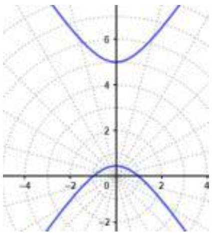
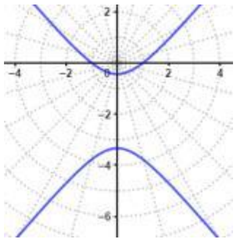
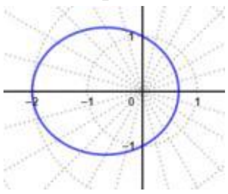
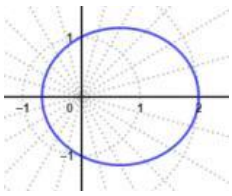
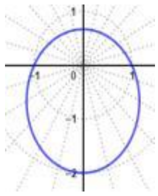
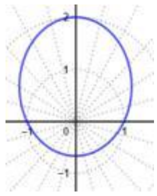
La orientación en relación con los ejes depende de si se tiene $sen\ \theta$ o $\cos\theta$, además del signo más o menos que está en el denominador, tal como las ecuaciones del inicio. No obstante, para generalizar las gráficas se realiza una adecuación a la ecuación, tomando en cuenta que el signo determina la orientación (izquierda o derecha, arriba o abajo) y el valor de e acompaña a dicho signo, sin embargo "e" toma valores positivos por definición expuesta anteriormente para entender el tipo de cónica, entonces las ecuaciones a considerar en la graficación de las curvas en el software quedan de la forma:

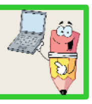
$$r = \frac{|e|d}{1+e\ cos(\theta)} \quad \text{y} \quad r = \frac{|e|d}{1+e\ sen(\theta)}$$

La orientación y el tipo de cónica se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 24

Tipos de cónicas

Tipo	$\boldsymbol{Cos(\theta)}$ +	-	$\boldsymbol{Sen(\theta)}$ +	-
$e = 1$ Parábola	Horizontal Abertura hacia izquierda 	Horizontal Abertura hacia derecha 	Vertical Abertura hacia abajo 	Vertical Abertura hacia arriba 
$e > 1$ Hipérbola	Horizontal Predominancia a la derecha 	Horizontal Predominancia a la izquierda 	Vertical Predominancia arriba eje polar 	Vertical Predominancia abajo eje polar 
$0 < e < 1$ Elipse	Horizontal Predominancia a la izquierda 	Horizontal Predominancia a la derecha 	Vertical Predominancia abajo eje polar 	Vertical Predominancia arriba eje polar 

Utiliza el software 

Ejemplo 6.1. *Utilice el software GeoGebra para graficar la ecuación dada por* $r = \frac{3}{1-sen(\theta)}$ *identifique el tipo de cónica, y su orientación.*

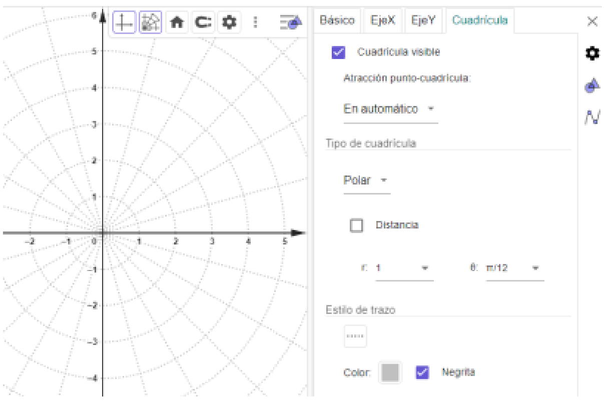
Graficar ecuaciones de cónicas en coordenadas polares en un cuaderno es complejo, pues demanda tiempo construir punto a punto, por lo cual se diseñará un archivo paso a paso en GeoGebra de su graficación, permitiendo identificar algunas características de las mismas por medio de la aplicación de los conceptos teóricos resumidos en el apartado anterior, y poder observar tanto con la función $sen\ \theta$ como $\cos\theta$.

Paso 1. Primeramente, se le dará un aspecto de plano polar a la vista gráfica, es decir se modificará la cuadrícula. Para esto se dirige al ícono de configuración (rueda o engranaje) de la parte superior derecha y dar clic, una vez realizado se cambia el aspecto de los ejes al gusto, además en la ventana de cuadrícula se dirige a tipo y seleccionar polar.

Paso 2. Después de seleccionar polar en la parte posterior se habilita la opción de distancia pero en base a lo específico de polar (radio y ángulo), se selecciona r: 1 y θ: $\pi/12$, además del estilo de trazo líneas entrecortadas y el color de preferencia.

Figura 97

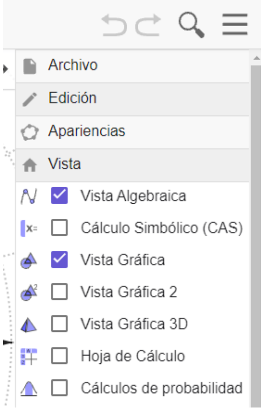
Configuración vista de sistema polar



Paso 3. Dirigirse al ícono de Menú, posterior dar clic en “Vista” y activar las casillas de “Vista Gráfica” y “Vista gráfica 2”.

Figura 98

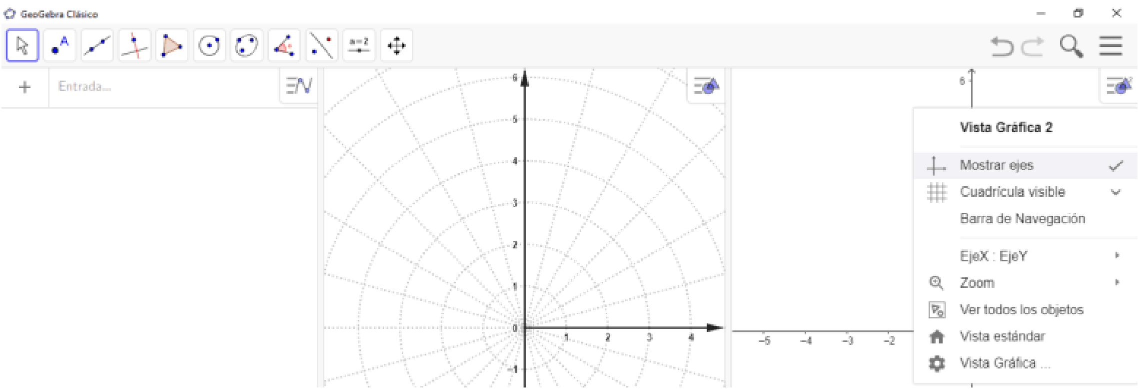
Activar vistas de trabajo



Paso 4. El espacio de trabajo se muestra como en la imagen, ahora en la vista gráfica 2, no mostrar los ejes haciendo clic derecho sobre la vista y desactivando la opción. En esta nueva vista se desarrollará todos los elementos como deslizadores, textos, entre otros para que la otra vista se visualice de mejor manera la gráfica correspondiente.

Figura 99

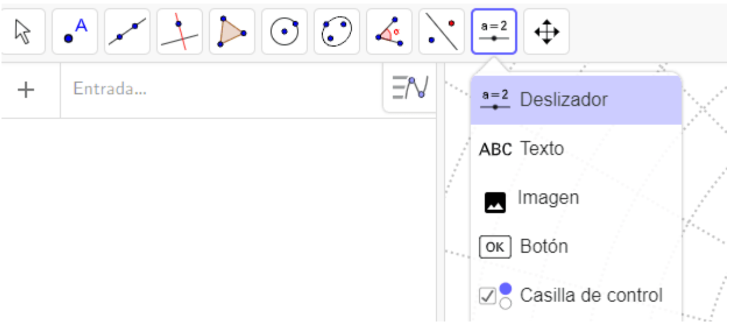
Configuración de espacio de trabajo



Paso 5. Una vez realizado la configuración de aspecto, se dirige al ícono correspondiente de la barra de herramientas como se muestra en la figura, y seleccionar deslizador.

Figura 100

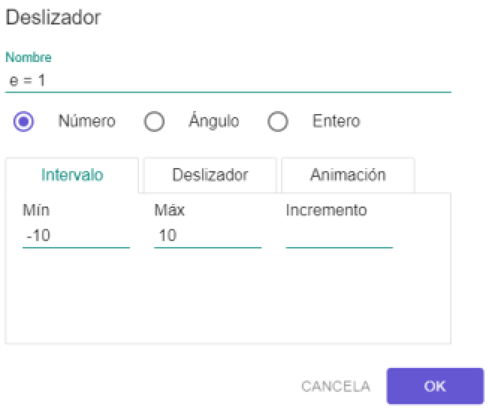
Selección herramienta "deslizador"



Paso 6. Se abrirá una ventana para delimitar el número e, como en la figura, en este caso se ingresa el rango de $-10 \leq e \leq 10$, finalmente dar clic en OK.

Figura 101

Delimitar deslizador de número



Paso 7. Ahora otro deslizador con nombre "d" de rango $0 \leq d \leq 10$, además uno nuevo de ángulo θ como en la figura, con rango $0° \leq \theta \leq 360°$, luego dar clic en ok, después ocultarlo de la vista gráfica (solo el ángulo).

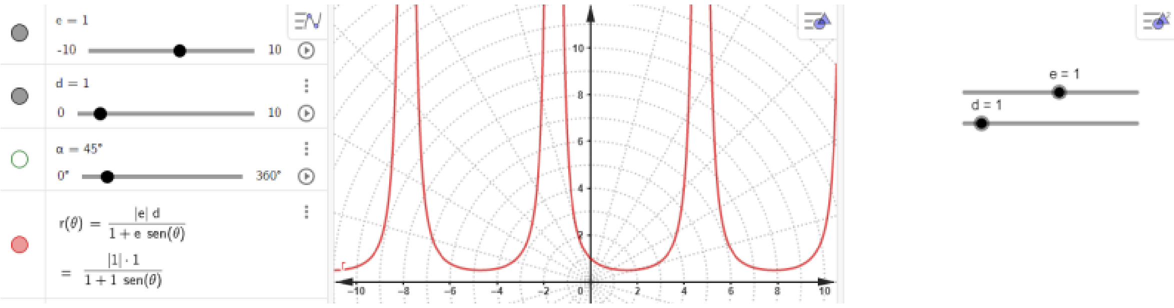
Figura 102

Deslizador con valor de ángulo

Paso 8. En la parte de entrada escriba el comando "$r(\theta) = \frac{|e|*d}{1+e*\,sen(\theta)}$" que es la ecuación con la consideración expuesta en el apartado anterior para generalizar las gráficas en Geogebra, luego al presionar enter, la función $r(\theta)$ aparecerá en la pantalla de GeoGebra, haga clic en el punto de color en la ventana algebraica a la izquierda de la pantalla para "ocultar" la función en la vista gráfica.

Figura 103

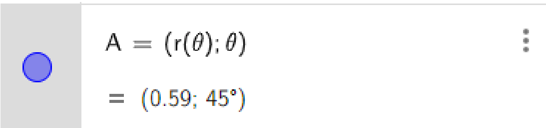
Ingresar función compleja



Paso 9. Construya un punto en la entrada digitalizando el comando “$A = (r(\theta); \theta)$”, luego dar clic en los tres puntos y elegir propiedades, en la ventana emergente en básico activar la casilla “Mostrar rastro” y en etiqueta visible “Nombre y valor”, además elija el color de su preferencia.

Figura 104

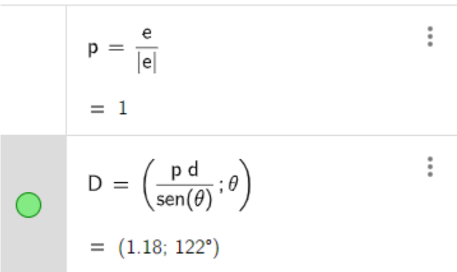
Configuración de punto



Paso 10. Ahora se construirá la recta directriz, por lo cual se crea un parámetro “p” para conocer el signo que acompaña a la función del denominador, pues este determina la orientación de la directriz, digitando en la casilla de entrada “$p = \frac{e}{|e|}$”. Luego crear un nuevo punto digitando en entrada “$D = \left(\frac{p*d}{sen(\theta)}; \theta\right)$” y active el rastro del punto.

Figura 105

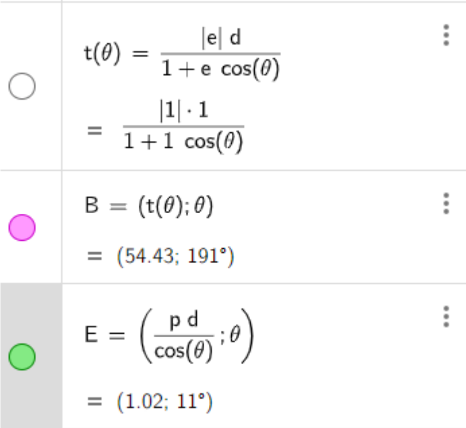
Punto a partir de parámetros



Paso 11. En la casilla de entrada cree una nueva función “$t(\theta) = \frac{|e|*d}{1+e*\cos(\theta)}$”, además un nuevo punto “$B = (t(\theta); \theta)$” y otro con “$E = \left(\frac{p*d}{\cos(\theta)}; \theta\right)$”que corresponde a la gráfica pero con la otra función, esto con la finalidad del mismo documento graficar a elección de la forma de la ecuación y evitar repetir todo el procedimiento a realizar.

Figura 106

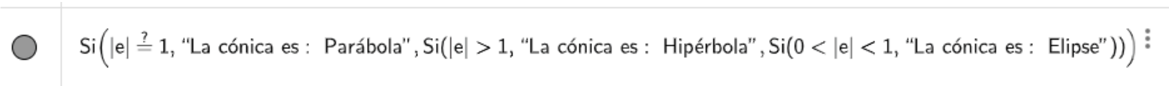
Función y punto de forma manual



Paso 12. Dar clic sobre la vista gráfica 2, luego en la parte de entrada ingresar el comando "Si(abs(e)≟1,"La cónica es: Parábola",Si(abs(e)>1,"La cónica es: Hipérbola",Si(0<abs(e)<1,"La cónica es: Elipse")))". GeoGebra lo convierte a lenguaje simbólico propio, que representa para usar "abs" valor absoluto.

Figura 107

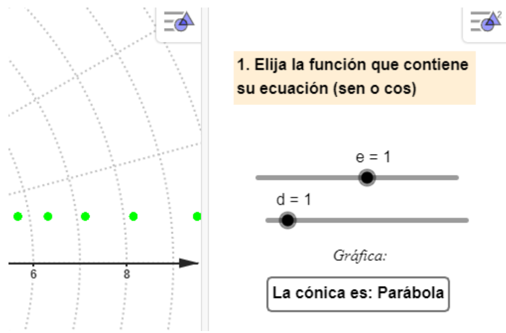
Texto con condicional y valor absoluto



Paso 13. Ingresar un texto simple "Gráfica:", luego ingresar uno nuevo para darle aspecto de instrucción con el comando "Elija la función que contiene su ecuación (sen o cos)", cámbiele el aspecto de forma, modificando sus propiedades (color, estilo, etc).

Figura 108

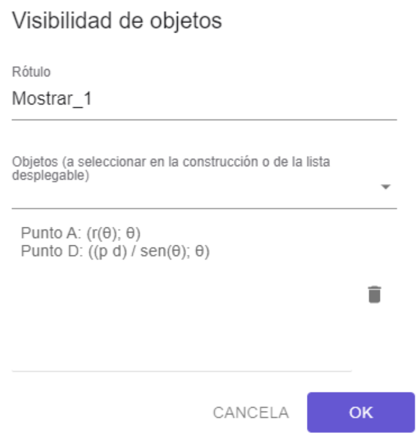
Texto simple personalizado



Paso 14. Diríjase al décimo ícono de las herramientas, pero esta vez elija casilla de control. En rótulo digite "Mostrar_1" y de la lista desplegable elija "Punto A y D", luego dar clic en "Ok". Repita el procedimiento con rótulo "Mostrar_2" eligiendo el objeto "Punto B y E".

Figura 109

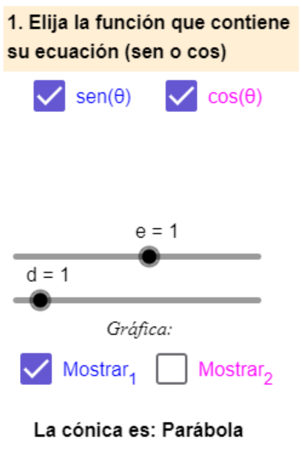
Casilla de control vinculada a objetos



Paso 15. Ahora ingresar nuevas casillas de control con rótulo “$sen(n\theta)$” y el objeto “Valor lógico a”; luego con “$cos(n\theta)$” y de la lista “Valor lógico b”. El primero corresponde a la gráfica del punto A y el segundo del punto B, cámbiele color para distinguir.

Figura 110

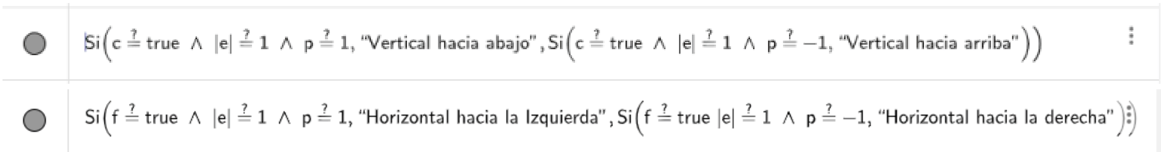
Casillas de control vinculadas a otras



Paso 16. En la parte de entrada digite “Si(c≟true ∧ abs(e)≟1 ∧ p≟1,"Vertical hacia abajo",Si(c≟true ∧ abs(e)≟1 ∧ p≟-1,"Vertical hacia arriba"))” . Posterior a esto una nueva con “Si(f≟true ∧ abs(e)≟1 ∧ p≟1,"Horizontal hacia la Izquierda",Si(f≟true abs(e)≟1 ∧ p≟-1,"Horizontal hacia la derecha"))”. Este código permite identificar la orientación de la parábola.

Figura 111

Texto con varios condicionales



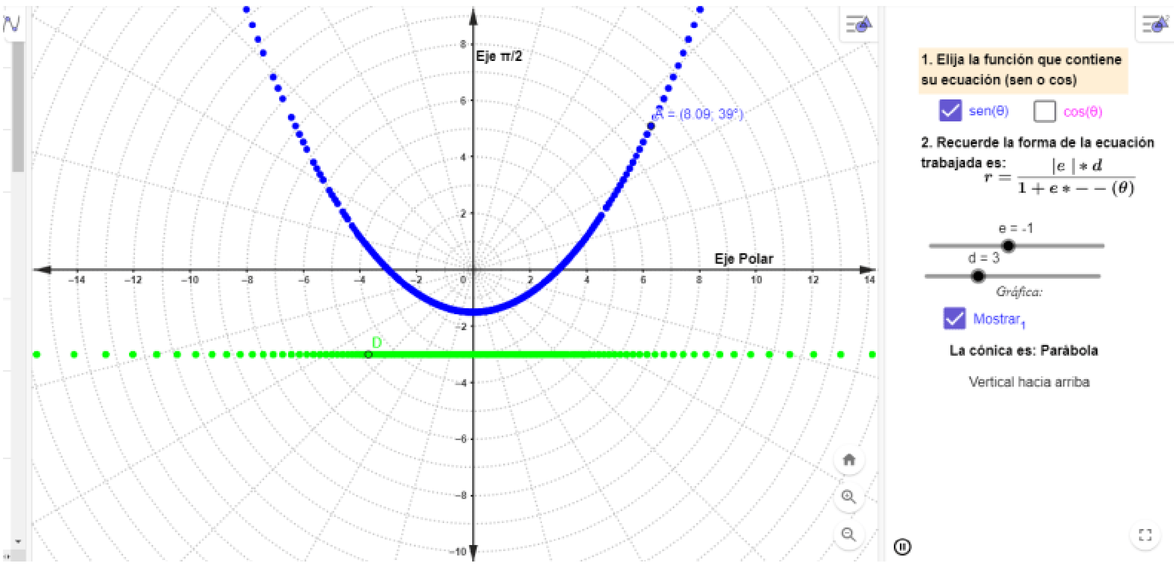
Paso 17. Ahora ingrese el comando “Si(c≟true ∧ abs(e)>1 ∧ p≟1,"Vertical, directriz encima del polo",Si(c≟true ∧ abs(e)>1 ∧ p≟-1,"Vertical, directriz debajo del polo"))”, luego otro con “Si(f≟true ∧ abs(e)>1 ∧ p≟1,"Horizontal, directriz derecha del polo",Si(f≟true ∧ abs(e)>1 ∧ p≟-1,"Horizontal, directriz izquierda del polo"))”. Repita el procedimiento, pero cambie la condición de e por 0<abs(e)<1, el resto lo mismo.

Paso 18. Antes de utilizarlo dé play al botón donde está el ángulo, y desactive todas las casillas de control para evitar errores en la representación gráfica de la ecuación.

Paso 19. Ahora sí la ecuación del ejemplo es $r = \frac{3}{1-sen(\theta)}$, es decir que en el deslizador $e = -1$, pero $|e|$ vale 1, por lo tanto en el numerado el valor de “d” será igual a 3, además primero se debe activar la casilla de $sen(n\theta)$; la gráfica en el software con sus características queda de la siguiente forma.

Figura 112

Representación gráfica ejemplo de cónica



Respuesta: Nótese que la gráfica muestra una parábola tal como lo dice el texto de la parte derecha, además que es vertical. Algo importante al momento de graficar es observar el valor de para así determinar el valor de “d”. Para visualizar mejor la gráfica en el software y verificar cómo se construyó, escanee el código adjunto.

DESCRÚBEME

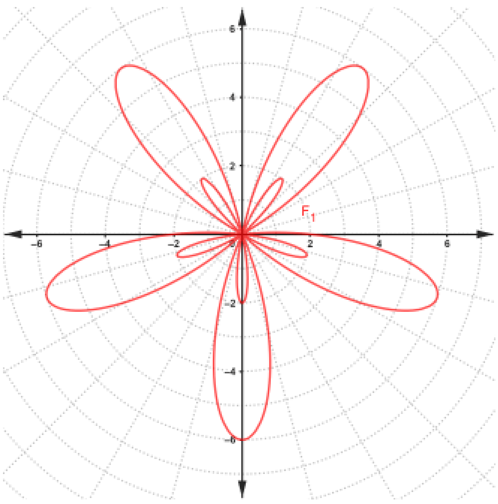
Curvas especiales en coordenadas polares

Hasta ahora se ha estudiado las gráficas de las curvas más conocidas en coordenadas polares, sin embargo, existen otras que trascienden la simplicidad de las coordenadas polares, por lo cual se expondrán varias gráficas que han cautivado a matemáticos por sus formas sorprendentes y belleza intrínseca, que desafía y expande los pensamientos, intuiciones y conocimientos de las coordenadas polares.

Estas se presentarán de forma nominal, gráfica y respectiva ecuación que la forma, por lo que se le invita al lector a explorarlas, ir más allá de su ecuación y descubrir sus características únicas y qué parecido con objetos de la naturaleza tiene, así como crear applet en GeoGebra para el estudio de cada una.

Figura 113

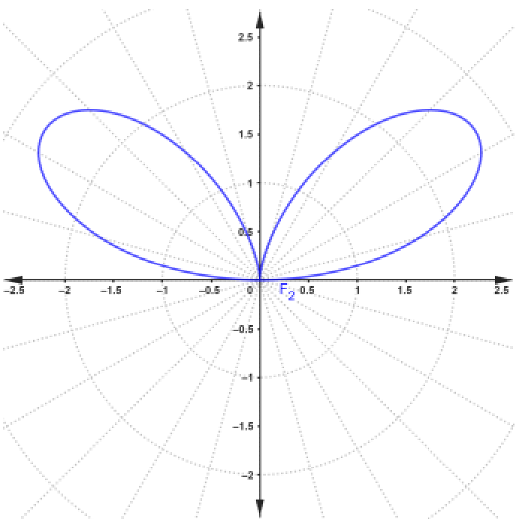
Rosa doble



Nota. $r = a - bsen(n\theta)\,;\;\; b > a\,, n \in \mathbb{Z}$

Figura 114

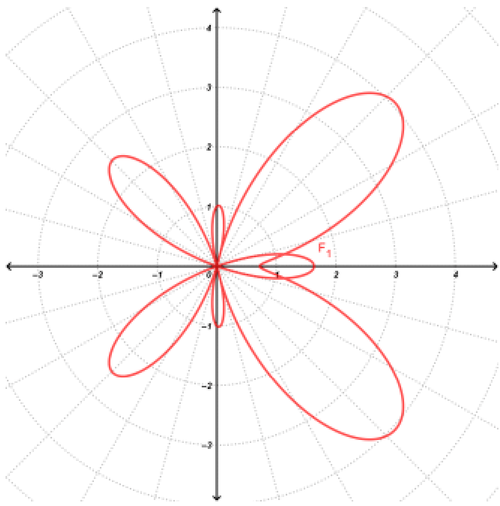
Rosa doble pétalo



Nota. $r = asen(n\theta)\cos^2(\theta)$

Figura 115

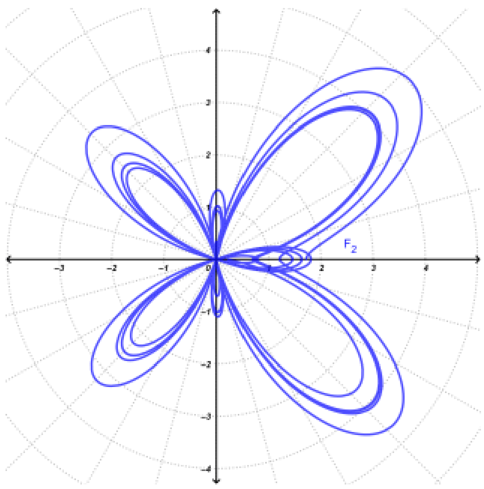
Mariposa



Nota. $r = e^{\cos(\theta)} - 2\,cos(4\theta)$

Figura 116

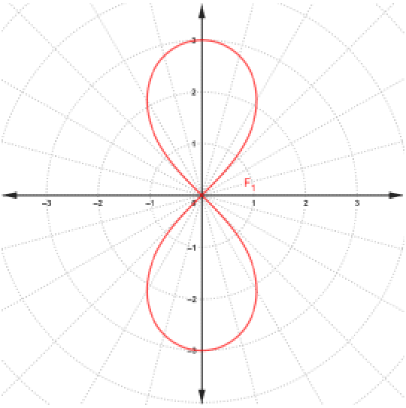
Mariposa de Tay



Nota. $r = e^{\cos(\theta)} - 2\,cos(4\theta) + \cos^5\left(\frac{\theta}{12}\right); \theta \leq 10\pi$

Figura 117

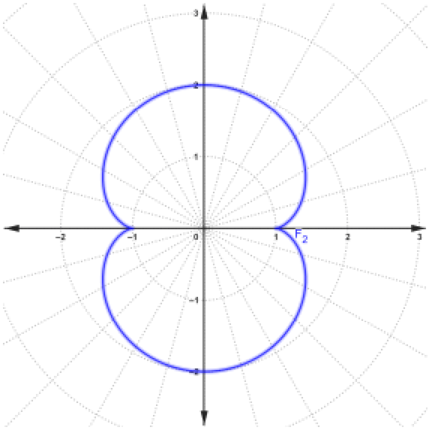
Leminscata de Bernoulli



Nota. $r^2 = \pm a^2 cos(2\theta)$

Figura 118

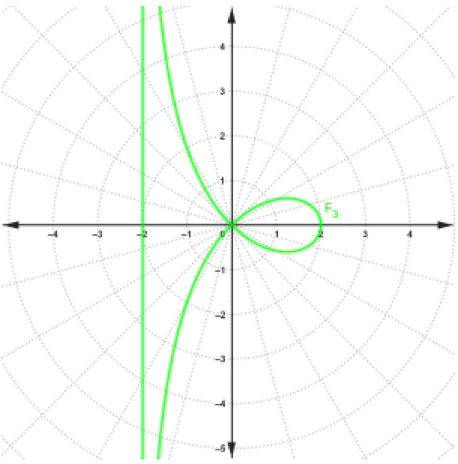
Nefroide



Nota. $r^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\left(sen^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

Figura 119

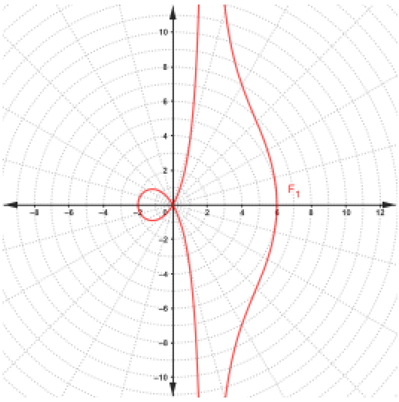
Estrofoide de Newton



Nota. $r = \mathrm{a}\cos(2\theta)\sec(\theta)$

Figura 120

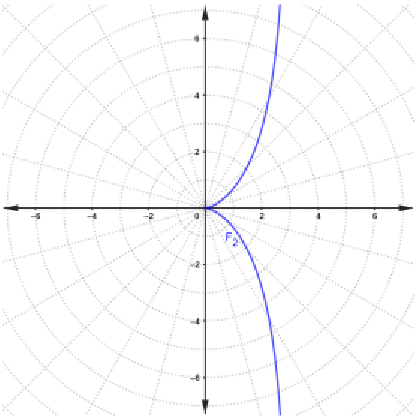
Concoide de Nicómenes



Nota. $r = \frac{\mathrm{a}}{\cos(\theta)} + b$

Figura 121

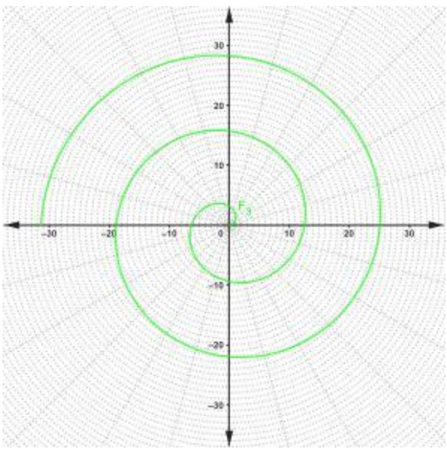
Cisoide de Diocles



Nota. $r = a\frac{sen^2(\theta)}{\cos(\theta)}$

Figura 122

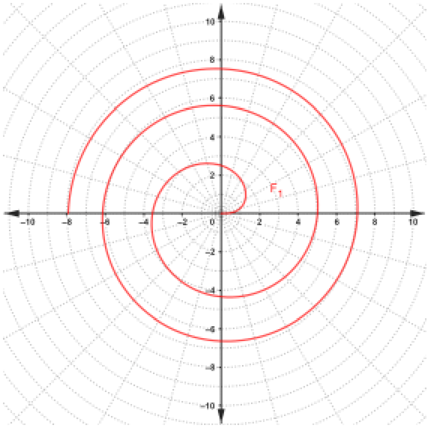
Espiral de Arquímedes



Nota. $r = \pm a\theta$

Figura 123

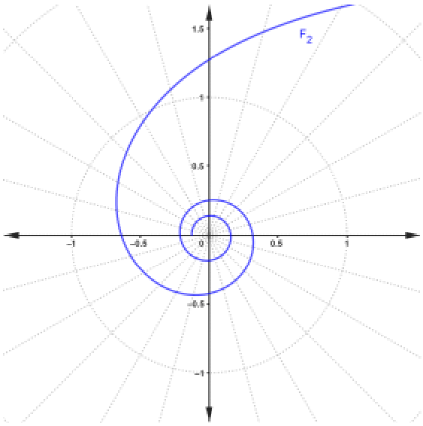
Espiral de Fermat



Nota. $r^2 = a^2\theta$

Figura 124

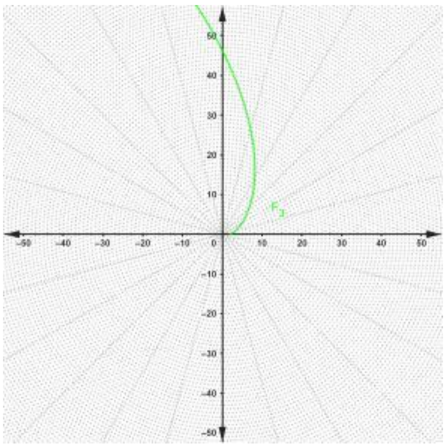
Espiral Hiperbólica



Nota. $r = \frac{\theta}{2}$

Figura 125

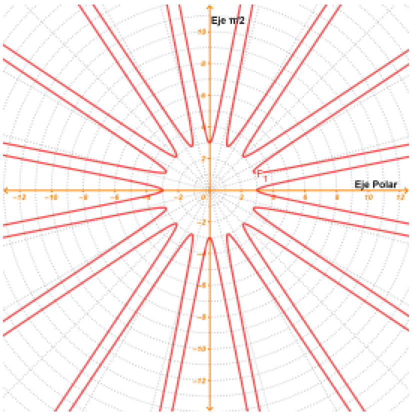
Espiral Logarítmica



Nota. $r = ae^{k\theta}$

Figura 126

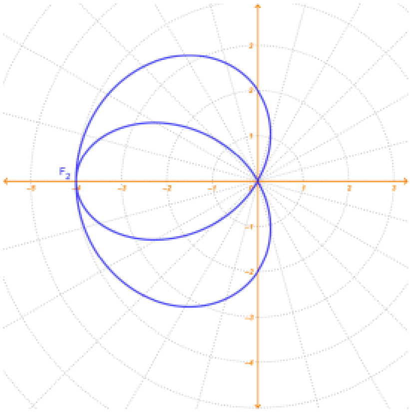
Espiga o Espiral de Cotes



Nota. $r = \frac{a}{\cos(n\theta)}$ ó $r = \frac{a}{sen(n\theta)}$; $n > 1$

Figura 127

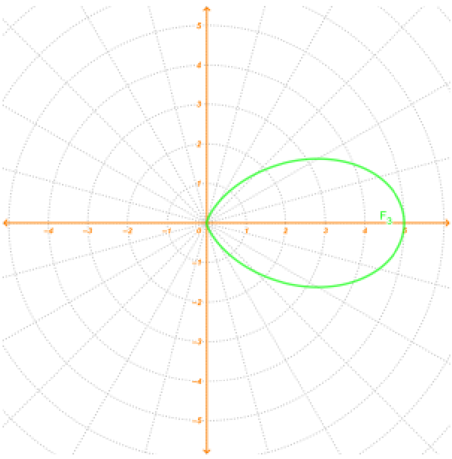
Curva de Jerabek



Nota. $r = a\frac{k\cos(\theta)-1}{\text{k}-\cos(\theta)}$; $a \neq 0$

Figura 128

Ovoide o Huevo de Kepler



Nota.$r = \text{a}\cos^3(\theta)$ ó $r = asen^3(\theta)$; $a \neq 0$

Concoide de Rosas

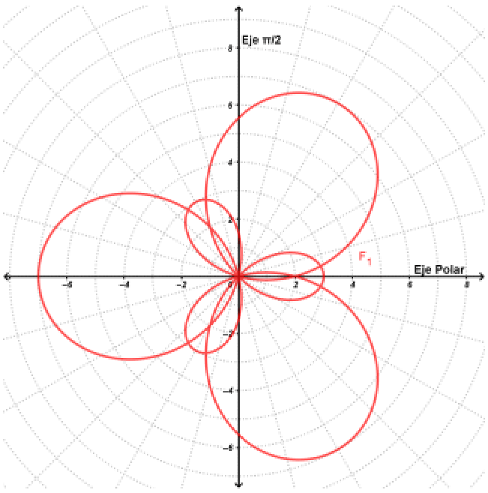
$$r = a + bsen(k\theta) \qquad ó \qquad r = a + bcos(k\theta); \quad k > 0$$

Lo más interesante de esta ecuación en coordenadas polares es que engloba varias gráficas y ecuaciones que se ha estudiado, dependiendo de los valores que toma a, b y k, pues si *k* es entero forma rosas, así mismo cuando *k* vale *1*, forma caracoles de Pascal; entonces lo diferente es cuando *k* toma valores racionales e irracionales, ya que se forma gráficas interesantes, muchas de ellas cuando el ángulo está entre $0 < \theta < 20\pi$, por lo cual se presenta algunos ejemplos. Además, puede escanear el código adjunto para graficar ecuaciones que se les ocurra y ver sus respectivas gráficas en el software GeoGebra.

DESCRÚBEME

Figura 129

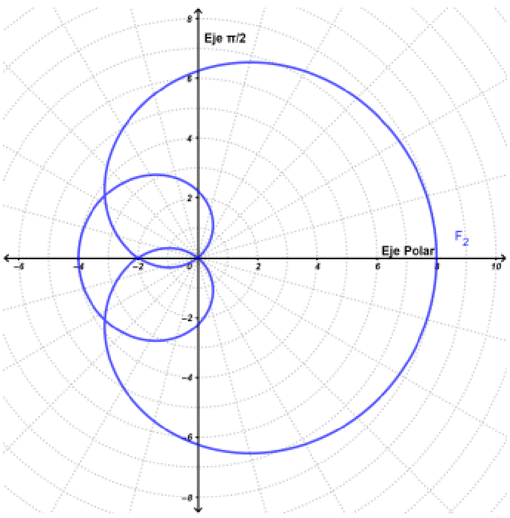
Ejemplo 1 de Concoide



Nota. $r = 2 + 5sen(1.5\,\theta)$

Figura 130

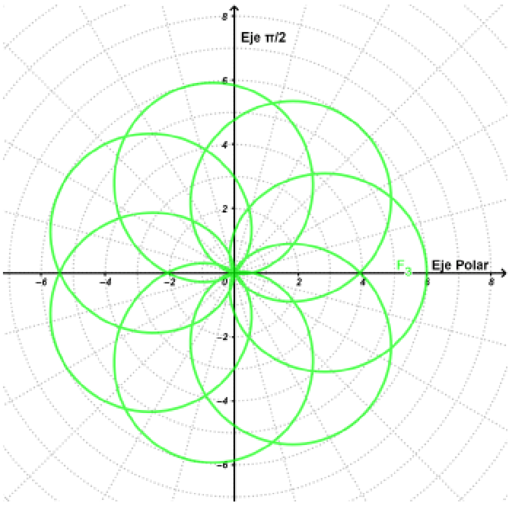
Ejemplo 2 de Concoide



Nota. $r = 2 + 6cos(0.5\,\theta)$

Figura 131

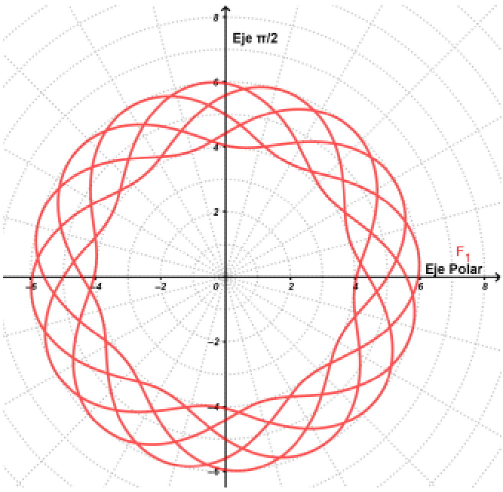
Ejemplo 3 de Concoide



Nota. $r = 3 + 3cos(1.4\ \theta)$

Figura 132

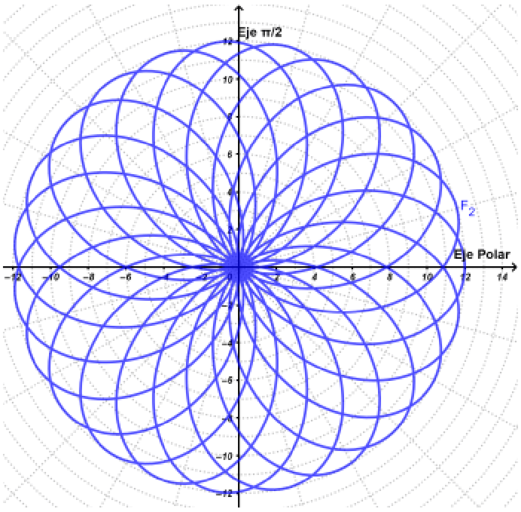
Ejemplo 4 de Concoide



Nota. $r = 5 + 1sen(3.2\ \theta)$

Figura 133

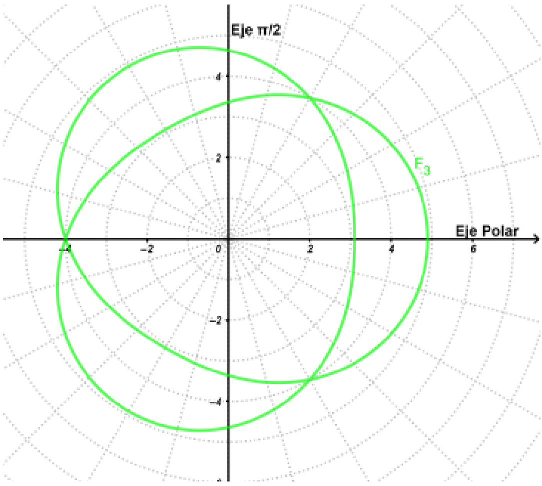
Ejemplo 5 de Concoide



Nota. $r = 6 + 6cos(2.3\ \theta)$

Figura 134

Ejemplo 6 de Concoide



Nota. $r = 4 + 0.9\ cos(1.5\theta)$

Practica lo aprendido

Preguntas rápidas de Verdadero-Falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Explique por qué o dé un ejemplo para argumentar su posición.

a- Las cónicas en forma polar vienen dadas por $r = \frac{ed}{1 \pm e * cos(\theta)}$ o $r = \frac{ed}{1 \pm e * sen(\theta)}$.

b- En coordenadas polares la variable "e" permite identificar el tipo de cónica.

c- Las ecuaciones de las cónicas vienen expresadas por un parámetro "d", lo misma que representa a rectas directrices expresadas por $rcos(\theta) = \pm d$ y $rsen(\theta) = \pm d$.

d- La ecuación polar $r = \frac{5}{1 + 2\cos(\theta)}$ representa una parábola en forma polar.

e- La ecuación polar $r = \frac{4}{3 - 2\cos(\theta)}$ corresponde a una elipse en forma polar.

Ejercicios

Responda cada una de las preguntas argumentando su respuesta. Verifique su respuesta utilizando el software GeoGebra.

1- Grafique las cónicas $r = \frac{e}{1 + e\cos(\theta)}$ con $e = 0.4, 0.6, 0.9$, describe cómo afecta el valor de e la forma de la curva.

2- Encuentre una ecuación polar para la órbita de Marte alrededor del Sol que es una elipse con excentricidad 0.093 y semieje mayor de $2.88x10^8\ km$.

3- Grafique las cónicas $r = \frac{ed}{1 + e\cos(\theta)}$ con $e = 1$ y $d = 0.5; 1; 2; 3.5$ describe cómo afecta el valor de "d" la forma de la curva.

4-5 Escriba una ecuación polar para las cónicas que cumplan las condiciones

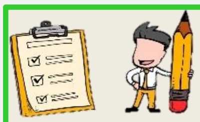
4. $e = \frac{1}{2}, directriz\ r = 4\sec(\theta)$ **5.** $e = 1.5, directriz\ r = 2\csc(\theta)$

6-8 Identifique la excentricidad y tipo de cónica, luego grafique las cónicas

6. $r = \frac{4}{2 + \cos(\theta)}$ **7.** $r = \frac{10}{5 - 6\,\mathrm{sen}(\theta)}$ **8.** $r = \frac{2}{3 + 3\cos(\theta)}$

9-10 Grafica las ecuaciones polares y describa su parecido con objetos de la naturaleza, tome en cuenta para $0 \leq \theta \leq 10\pi$.

9. $r = 5 + cos\left(\frac{16}{5}\theta\right)$ **10.** $r = e^{\cos(\theta)} - 2\,cos(4\theta)$



Comprueba lo Aprendido

https://www.geogebra.org/m/zajjuakj

ESCANÉAME

RESUMEN

Coordenadas Polares - Cartesianas

$x = rcos(\theta)$ (1)

$y = rsen(\theta)$ (2)

$r^2 = x^2 + y^2$ (3)

$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ (4)

Rectas

$r = \frac{a}{\cos(\theta)}$ (5)

$r = \frac{b}{sen(\theta)}$ (6)

Circunferencias

$r = 2acos(\theta)$ (7)

$r = 2bsen(\theta)$ (8)

$r = 2\,a\cos(\theta) + 2bsen(\theta)$ (9)

$r = C$ (10)

Caracoles de Pascal

$r = a \pm bcos(\theta)$ (11)

$r = a \pm bsen(\theta)$ (12)

Rosas Polares

$r = acos(n\theta)$ (13)

$r = bsen(n\theta)$ (14)

$n \in \mathbb{N}^*$

Cónicas

$r = \frac{ed}{1 \pm e * \cos(\theta)}$ (15)

$r = \frac{ed}{1 \pm e * sen(\theta)}$ (16)

Clave de Respuestas

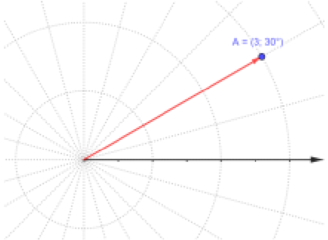
UNIDAD 2. PÁGINA 30

Preguntas Verdadero-Falso

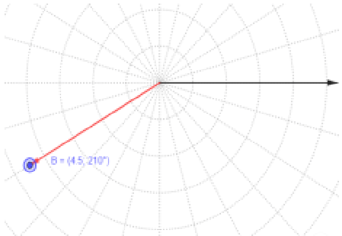
b- Verdadero **d-** Falso

Ejercicios

2- $(2\sqrt{2}; 315°)$

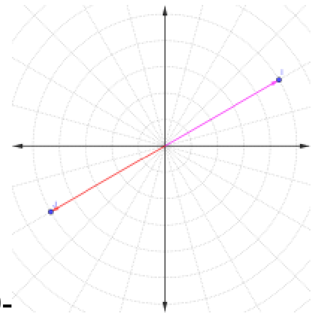


4-



6-

8- $\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{5}\right)$



10-

UNIDAD 3. PÁGINA 49

Preguntas Verdadero-Falso

b- Verdadero **d-** Falso

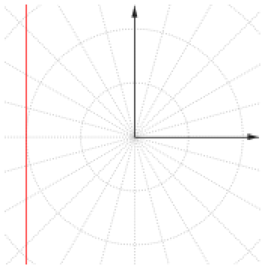
Ejercicios

2- $r = 2cos(\theta) + \frac{17}{5}sen(\theta)$

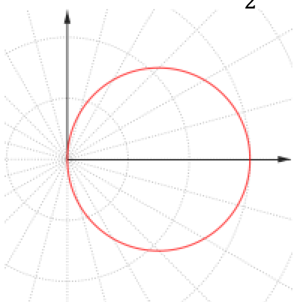
4- $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$

6- $r = 2\cos(\theta)$

8- Paralela al eje $\frac{\pi}{2}$



10- Tangente al eje $\frac{\pi}{2}$



UNIDAD 4. PÁGINA 57

Preguntas Verdadero-Falso

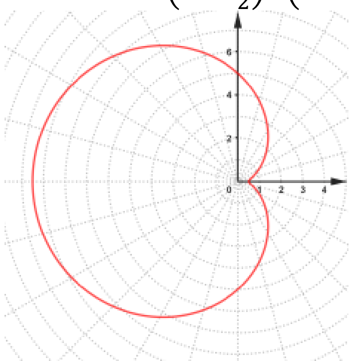
b- Falso **d-** Falso

Ejercicios

2- Cardiode

4- Caracol con hendidura y simetría a $\frac{\pi}{2}$

6- Caracol con hendidura; Simetría al Eje polar; Horizontal a la izquierda; Cortes en $(8.5; 180°), \left(4.5; \frac{\pi}{2}\right), \left(4.5; \frac{3\pi}{2}\right)$



8- $r = 5 - 3sen(\theta)$

10- $3 - 3sen(\theta)$

UNIDAD 5. PÁGINA 66

Preguntas Verdadero-Falso

b- Falso **d-** Falso

Ejercicios

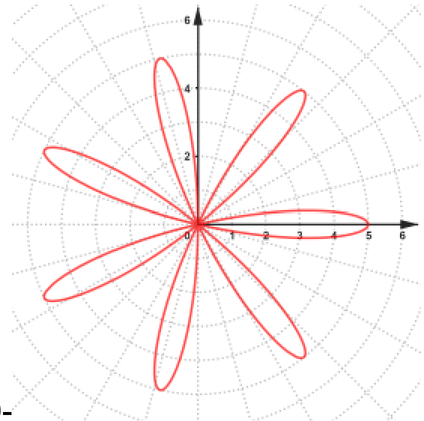
2- $r = 4cos(5\theta)$

4- 12 pétalos; simétrica ambos ejes

6- $r = -\frac{9}{5}\text{sen}(3\theta)$

8- $r = 3cos(8\theta)$

10-



UNIDAD 6. PÁGINA 81

Preguntas Verdadero-Falso

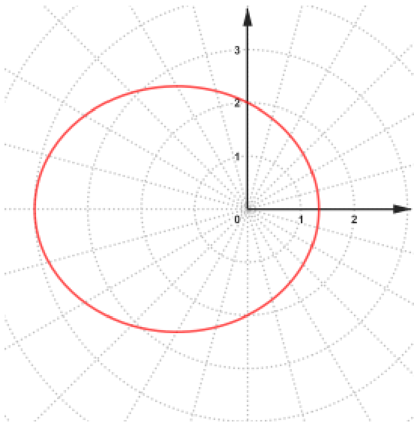
b- Verdadero **d-** Falso

Ejercicios

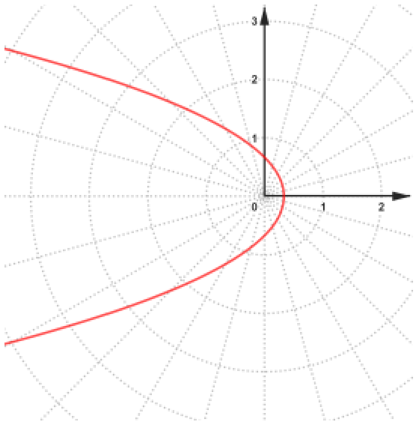
2- $r = \frac{2.26x10^8}{1+0.093\cos(\theta)}$

4- $r = \frac{4}{2+\cos(\theta)}$

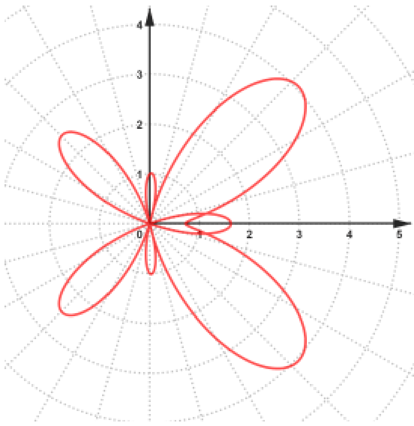
6- $e = \frac{1}{2}$ Elipse



8- $e = 1$ Parábola



10- Mariposa



Referencias Bibliográficas

Aquise Escobedo, S., Cuadros Paz, L., Delgado Sarmiento, Y., & Meza Campos, L. (2019). Aprendizaje del Cálculo con visualización interactiva. *Revista Iberica de Sistemas e Tecnologias de Informacao*, *21*, 254–267. http://www.risti.xyz/issues/ristie21.pdf

Araya, V., Alfaro, M., & Andonegui, M. (2007). CONSTRUCTIVISMO: ORIGENES Y PERSPECTIVAS. *Laurus*, *13*(24), 76–92. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76111485004

Baptista, F. (2017). *O Ensino de coordenadas polares através do software GeoGebra* [Tesis de Grado, Universidade Estadual de Campinas]. https://doi.org/https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2017.985856

Cueva, J. L., García, A., & Martínez, O. A. (2020). La influencia del conectivismo para el uso de las tic en el proceso de enseñanza aprendizaje. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, *2*(21). https://doi.org/10.46377/DILEMAS.V32I1.1975

Haro, F. (2020). *Aplicación del Software Libre Geogebra en el Aprendizaje de Sólidos de Revolución en Cálculo Integral para los Estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, Matemática y Física de la Universidad Central del Ecuador* [Trabajo de Grado, Universidad Central del Ecuador]. http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/22494

Jadán, W. (2022). *Guía Didáctica para el Uso de Geogebra Aplicado a Problemas de Optimización en la Asignatura de Cálculo Diferencial*. Repositorio Institucional - Universidad de Cuenca.

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica* (13va.). Limusa. https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Lehmann]GeometriaAnalitica.pdf

Leithol, L. (1998). *El Cálculo* (7ma ed.). Oxford University Press-Harla México.

Perez, U. (2014). *Estrategia didactica para introducir las coordenadas polares y sus aplicaciones en la representacion y analisis de la parabola y la elipse* [Tesis de MaestrUniversidad Nacional de Colombia]. http://www.bdigital.unal.edu.co/48870/

Raichman, S., & Totter, E. (2016). *Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías*. Universidad Nacional de Cuyo. https://bdigital.uncu.edu.ar/objetos_digitales/7224/librogeoing.pdf

Rivera, J., & Álvarez, E. (2020). *Cálculo Vectorial- Parte I*. Fondo Editorial Pascual Bravo. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Calculo_III/index.html?page=2

Rivera, J., & Navarro, J. (2018). *Curvas y superficies paramétricas*. Fondo Editorial Pascual Bravo. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Curvas_y_Superficies_Parametricas/index.html

Villena, M. (2013). *Coordenadas Polares*. ESPOL.